ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXV, № 3, 1982 Механика

Р. К. АЛЕКСАНЯН, Ж. Г. АПИКЯН

ОБ ОДНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ

Рассматривается представление функции напряжений для плоской задачи теории упругости для анизотропного призматического тела с поперечным сечением в виде прямоугольника, имеющего в каждой точке плоскость упругой симметрии, нормальную к образующим его боковой поверхности. Другие представления функции напряжений в прямоугольных и полярных координатах рассмотрены в работах [1, 2]. В предельном случае полученное представление для анизотропного прямоугольника совпадает с известным решением Файлона для изотропного прямоугольника [3].

Для одного частного случая ортотропии при помощи рассматриваемого представления функции напряжений решение первой основной задачи симметрично нагруженного прямоугольника приведено к решению квазивполне регулярной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений.

1. Функция напряжений в системе прямоугольных координат удовлетворяет дифференциальному уравнению [4]

$$a_{22}\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}-2a_{26}\frac{\partial^4 F}{\partial x^3\partial y}+(2a_{12}+a_{66})\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\partial y^2}-2a_{16}\frac{\partial^4 F}{\partial x\partial y^3}+a_{11}\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}=0 \tag{1.1}$$

Решение уравнения (1.1) ищем в виде

$$F(x, y)=e^{\lambda(x+\delta y)} \tag{1.2}$$

Подставляя (1.2) в (1.1), для определения δ получаем алгебраическое уравнение четвертого порядка

$$a_{11}\delta^4-2a_{16}\delta^3+(2a_{12}+a_{66})\delta^2-2a_{26}\delta+a_{22}=0 \tag{1.3}$$

Уравнение (1.3) не имеет действительных корней [4].

В случае, когда корни уравнения (1.3) простые

$$\delta_1=\sigma_1+i\nu_1,\quad \delta_2=\sigma_2+i\nu_2,\quad \delta_3=\bar{\delta}_1,\quad \delta_4=\bar{\delta}_2 \tag{1.4}$$

рассмотрим следующие решения уравнения (1.1):

$$\begin{aligned}\widetilde{F}_1&=\widetilde{A}_1e^{\lambda(x+\delta_1 y)}+\widetilde{A}_2e^{\lambda(x+\bar{\delta}_1 y)}\\ \widetilde{F}_2&=\widetilde{A}_3e^{\mu(x+\delta_2 y)}+\widetilde{A}_4e^{\mu(x+\bar{\delta}_2 y)}\end{aligned} \tag{1.5}$$

Параметры λ и μ определяются из граничных условий и для прямоугольника имеют бесконечное число дискретных значений λ_n, μ_n ($n = 1, 2, \ldots$).

2. Требуя, чтобы на сторонах $y=0$ и $y=b$ прямоугольника $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$ выполнялись однородные граничные условия для функций $\widetilde{F}_m$

$$\widetilde{F}_m\Big|_{y=0} = 0, \quad \widetilde{F}_m\Big|_{y=b} = 0 \quad (m = 1,\ 2) \tag{2.1}$$

получаем

$$\sin \lambda\nu_1 b = 0, \quad \sin \mu\nu_2 b = 0$$

откуда

$$\lambda = \frac{\pi n}{\nu_1 b}, \qquad \mu = \frac{\pi k}{\nu_2 b} \quad (n,\ k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots)$$

Решение, соответствующее всем значениям параметров λ_n и μ_k, представляется в виде

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \operatorname{ch} \frac{\pi n}{\nu_1 b}(x + \sigma_1 y) + B_n \operatorname{sh} \frac{\pi n}{\nu_1 b}(x + \sigma_1 y) \right] \sin \frac{\pi n y}{b} \\ \Phi_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n \operatorname{ch} \frac{\pi n}{\nu_2 b}(x + \sigma_2 y) + D_n \operatorname{sh} \frac{\pi n}{\nu_2 b}(x + \sigma_2 y) \right] \sin \frac{\pi n y}{b} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Представляя решение уравнения (1.1) в виде

$$F = e^{\lambda(y + px)} \tag{2.3}$$

для p найдем следующие значения:

$$p_m = \zeta_m^{-1}\ (m = 1,\ 2,\ 3,\ 4), \quad p_1 = \alpha_1 + i\beta_1$$

$$p_2 = \alpha_2 + i\beta_2, \qquad p_3 = \overline{p}_1, \quad p_4 = \overline{p}_2$$

Независимые решения, которые соответствуют значениям p_m ($m = 1, 2, 3, 4$), будут

$$e^{\lambda(y + p_1 x)}, \qquad e^{\lambda(y + \overline{p}_1 x)}, \qquad e^{\mu(y + p_2 x)}, \qquad e^{\mu(y + \overline{p}_2 x)}.$$

Рассмотрим функции

$$\begin{aligned} \widetilde{F}_3 &= \overline{B}_1 e^{\lambda(y + p_1 x)} + \overline{B}_2 e^{\lambda(y + \overline{p}_1 x)} \\ \widetilde{F}_4 &= \overline{B}_3 e^{\mu(y + p_2 x)} + \overline{B}_4 e^{\mu(y + \overline{p}_2 x)} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Требуя, чтобы функции (2.4) удовлетворяли граничным условиям

$$\widetilde{F}_m\Big|_{x=0} = 0, \quad \widetilde{F}_m\Big|_{x=a} = 0 \quad (m = 3,\ 4) \tag{2.5}$$

находим

$$\sin \lambda\beta_1 a = 0, \quad \sin \mu\beta_2 a = 0$$

откуда

$$\lambda = \frac{\pi n}{\beta_1 a}, \qquad \mu = \frac{\pi k}{\beta_2 a} \quad (n,\ k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots)$$

Окончательно получаем следующие решения:

$$\begin{aligned}
\Phi_3 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[E_n \operatorname{ch} \frac{\pi n}{\beta_1 a} (y + \alpha_1 x) + F_n \operatorname{sh} \frac{\pi n}{\beta_1 a} (y + \alpha_1 x) \right] \sin \frac{\pi n x}{a} \\
\Phi_4 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[G_n \operatorname{ch} \frac{\pi n}{\beta_2 a} (y + \alpha_2 x) + H_n \operatorname{sh} \frac{\pi n}{\beta_2 a} (y + \alpha_2 x) \right] \sin \frac{\pi n x}{a}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Общее решение уравнения (1.1) представляется в виде

$$F = \sum_{m=1}^{4} \Phi_m \tag{2.7}$$

3. Если корни уравнения (1.3) двукратные

$$\delta = \delta_1 = \delta_2 = \sigma + i\nu, \quad \bar{\delta} = \delta_3 = \delta_4 = \sigma - i\nu \tag{3.1}$$

то рассматривая независимые решения уравнения (1.1) в виде

$$e^{\lambda(x + \delta y)}, \quad e^{\lambda(x + \bar{\delta} y)}, \quad x e^{\mu(x + \delta y)}, \quad x e^{\mu(x + \bar{\delta} y)}$$

находим решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям (2.1)

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}_5 = \sum_{n=1}^{\infty} \Bigg\{ & A_n \operatorname{ch} \frac{\pi n}{\nu b} (x + \sigma y) + B_n \operatorname{sh} \frac{\pi n}{\nu b} (x + \sigma y) + \\
& + \frac{\pi n x}{b} \left[C_n \operatorname{ch} \frac{\pi n}{\nu b} (x + \sigma y) + D_n \operatorname{sh} \frac{\pi n}{\nu b} (x + \sigma y) \right] \Bigg\} \sin \frac{\pi n y}{b}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям (2.5), получается аналогично

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}_6 = \sum_{n=1}^{\infty} \Bigg\{ & E_n \operatorname{ch} \frac{\pi n}{\beta a} (y + \alpha x) + F_n \operatorname{sh} \frac{\pi n}{\beta a} (y + \alpha x) + \\
& + \frac{\pi n y}{a} \left[G_n \operatorname{ch} \frac{\pi n}{\beta a} (y + \alpha x) + H_n \operatorname{sh} \frac{\pi n}{\beta a} (y + \alpha x) \right] \Bigg\} \sin \frac{\pi n x}{a}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Здесь $\alpha + i\beta = p = \delta^{-1}$, где δ — корень (3.1).

Общее решение уравнения (1.1) представляется в виде суммы решений (3.2) и (3.3)

$$F=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{A_n \operatorname{ch}\frac{\pi n}{\nu b}(x+\sigma y)+B_n \operatorname{sh}\frac{\pi n}{\nu b}(x+\sigma y)+\right.$$

$$\left.+\frac{\pi n x}{b}\left[C_n \operatorname{ch}\frac{\pi n}{\nu b}(x+\sigma y)+D_n \operatorname{sh}\frac{\pi n}{\nu b}(x+\sigma y)\right]\right\}\sin\frac{\pi n y}{b}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{E_n \operatorname{ch}\frac{\pi n}{\beta a}(y+\alpha x)+F_n \operatorname{sh}\frac{\pi n}{\beta a}(y+\alpha x)+\right.$$

$$\left.+\frac{\pi n y}{a}\left[G_n \operatorname{ch}\frac{\pi n}{\beta a}(y+\alpha x)+H_n \operatorname{sh}\frac{\pi n}{\beta a}(y+\alpha x)\right]\right\}\sin\frac{\pi n x}{a} \qquad (3.4)$$

Если в (3.4) подставим $\sigma=\alpha=0$ и $\nu=\beta=1$, получим общее представление функции напряжений для плоской задачи теории упругости изотропного прямоугольника [3, 5]

$$F=\sum_{n=1}^{\infty}[A_n \operatorname{ch}\alpha_n x+B_n \operatorname{sh}\alpha_n x+\alpha_n x(C_n \operatorname{ch}\alpha_n x+D_n \operatorname{sh}\alpha_n x)]\sin\alpha_n y+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}[E_n \operatorname{ch}\beta_n y+F_n \operatorname{sh}\beta_n y+\beta_n y(G_n \operatorname{ch}\beta_n y+H_n \operatorname{sh}\beta_n y)]\sin\beta_n x$$

где $\alpha_n=\dfrac{\pi n}{b}$, $\beta_n=\dfrac{\pi n}{a}$.

4. Рассмотрим первую основную задачу для прямоугольника $-a\leqslant x\leqslant a$, $-b\leqslant y\leqslant b$, материал которого обладает свойством ортотропии частного вида. Предположим, что корни уравнения (1.3) чисто мнимые и различные

$$\delta_{1,3}=\pm i\nu_1,\quad \delta_{2,4}=\pm i\nu_2,\quad \nu_2>\nu_1>0$$

причем ν_1, ν_2 удовлетворяют уравнению

$$a_{11}\nu^4-(2a_{12}+a_{66})\nu^2+a_{22}=0$$

В случае, когда прямоугольник нагружен симметрично относительно обеих его осей симметрии, имеем следующие условия симметрии и граничные условия:

$$u(0,y)=\tau_{xy}(0,y)=v(x,0)=\tau_{xy}(x,0)=0 \qquad (4.1)$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{xx}&=\frac{\partial^2F}{\partial y^2}=f_1(y)=\sum_{n=1}^{\infty}e_{1n}\cos\alpha_n y\\ \tau_{xy}&=-\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}=f_2(y)=\sum_{n=1}^{\infty}e_{2n}\sin\alpha_n y\end{aligned}\right\}\quad \text{при}\quad x=a,\ 0<y<b \qquad (4.2)$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{yy}&=\frac{\partial^2F}{\partial x^2}=f_3(x)=\sum_{n=1}^{\infty}e_{3n}\cos b_n x\\ \tau_{xy}&=f_4(x)=\sum_{n=1}^{\infty}e_{4n}\sin b_n x\end{aligned}\right\}\quad \text{при}\quad y=b,\ 0<x<a$$

где $a_n = \gamma_n/b$, $b_n = \gamma_n/a$, $\gamma_n = (2n-1)\pi/2$, f_1, f_2, f_3, f_4 — заданные функции, кусочно-гладкие в соответствующих интервалах.

Требуя, чтобы функции (1.5), (2.4) удовлетворяли граничным условиям

$$\frac{\partial \widetilde{F}_m}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \widetilde{F}_m\bigg|_{x=a} = \frac{\partial \widetilde{F}_k}{\partial y}\bigg|_{y=0} = \widetilde{F}_k\big|_{y=b} = 0 \qquad (k=1,\ 2;\ m=3,\ 4)$$

получаем представление функции напряжений

$$F(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(A_n \operatorname{ch}\frac{a_n}{\nu_1}x + B_n \operatorname{ch}\frac{a_n}{\nu_2}x\right)\cos a_n y + \right.$$
$$\left. + (C_n \operatorname{ch} b_n\nu_1 y + D_n \operatorname{ch} b_n\nu_2 y)\cos b_n x\right]$$

Условия (4.1) выполняются при любых $A_n, \ldots, D_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Удовлетворяя граничным условиям (4.2), получаем уравнения для определения неизвестных $A_p, \ldots, D_p$ $(p = 1, 2, \ldots)$

$$A_p \operatorname{ch}\frac{\gamma_p}{d_1} + B_p \operatorname{ch}\frac{\gamma_p}{d_2} = -\frac{e_{1p}}{a_p^2}, \qquad C_p \operatorname{ch}\gamma_p d_1 + D_p \operatorname{ch}\gamma_p d_2 = -\frac{e_{3p}}{b_p^2}$$

$$\frac{A_p}{d_1}\operatorname{sh}\frac{\gamma_p}{d_1} + \frac{B_p}{d_2}\operatorname{sh}\frac{\gamma_p}{d_2} - \frac{e_{2p}}{a_p b_p} = \tag{4.3}$$

$$= -2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+p}\frac{\gamma_n^3}{\gamma_p^2}\left(C_n\frac{d_1^2 \operatorname{ch}\gamma_n d_1}{\gamma_n^2 d_1^2 + \gamma_p^2} + D_n\frac{d_2^2 \operatorname{ch}\gamma_n d_2}{\gamma_n^2 d_2^2 + \gamma_p^2}\right)$$

$$C_p d_1 \operatorname{sh}\gamma_p d_1 + D_p d_2 \operatorname{sh}\gamma_p d_2 - \frac{e_{4p}}{a_p b_p} =$$

$$= -2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+p}\frac{\gamma_n^3}{\gamma_p^2}\left(A_n\frac{\operatorname{ch}\dfrac{\gamma_n}{d_1}}{\gamma_n^2 + \gamma_p^2 d_1^2} + B_n\frac{\operatorname{ch}\dfrac{\gamma_n}{d_2}}{\gamma_n^2 + \gamma_p^2 d_2^2}\right)$$

где

$$d_i = \nu_i\frac{b}{a} \quad (i = 1, 2), \quad p = 1, 2, \ldots$$

Исключая неизвестные B_p, D_p из (4.3), получим совокупность двух бесконечных систем линейных уравнений

$$A_p u_p = 2\frac{d_2^2 - d_1^2}{d_1 d_2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+p}\gamma_n^3\frac{\operatorname{ch}\gamma_n d_1}{\operatorname{ch}\dfrac{\gamma_p}{d_1}}\frac{C_n}{F_{np}^{(1)}} + \frac{e'_{1p}}{\gamma_p^2 \operatorname{ch}\dfrac{\gamma_p}{d_1}}$$
$$\tag{4.4}$$
$$C_p v_p = 2(d_2^2 - d_1^2)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+p}\gamma_n^3\frac{\operatorname{ch}\dfrac{\gamma_n}{d_1}}{\operatorname{ch}\gamma_p d_1}\frac{A_n}{F_{np}^{(2)}} - \frac{e'_{2p}}{\gamma_p^2 \operatorname{ch}\gamma_p d_1}$$

где $u_p = d_2 \operatorname{th} \frac{\gamma_p}{d_1} - d_1 \operatorname{th} \frac{\gamma_p}{d_2}, \quad v_p = d_2 \operatorname{th} \gamma_p d_2 - d_1 \operatorname{th} \gamma_p d_1$

$$F_{np}^{(1)} = \left(\gamma_n^2 + \frac{\gamma_p^2}{d_1^2}\right)\left(\gamma_n^2 + \frac{\gamma_p^2}{d_2^2}\right), \quad F_{np}^{(2)} = (\gamma_n^2 + \gamma_p^2 d_1^2)(\gamma_n^2 + \gamma_p^2 d_2^2)$$

$$e_{1p}' = d_1 d_2 ab \left[e_{2p} + \frac{b}{a} \frac{e_{1p}}{d_2} \operatorname{th} \frac{\gamma_p}{d_2} + 2 \frac{a}{b} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+p} \frac{\gamma_n e_{3n}}{\gamma_n^2 + \frac{\gamma_p^2}{d_2^2}} \right]$$

$$e_{2p}' = ab \left[e_{4p} + \frac{a}{b} d_2 e_{3p} \operatorname{th} \gamma_p d_2 + 2 \frac{b}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+p} \frac{\gamma_n e_{1n}}{\gamma_n^2 + \gamma_p^2 d_2^2} \right]$$

Обозначая

$$X_n = C_n (-1)^n \sqrt{d_1}\, \gamma_n^2 \operatorname{ch} \gamma_n d_1, \quad Y_n = A_n (-1)^n \frac{\gamma_n^2}{\sqrt{d_2}} \operatorname{ch} \frac{\gamma_n}{d_1}$$

из (4.4) получаем

$$X_p = \sum_{n=1}^{\infty} b_{np} Y_n + c_p^{(2)}, \qquad Y_p = \sum_{n=1}^{\infty} a_{np} X_n + c_p^{(1)}, \quad p = 1, 2, \ldots \tag{4.5}$$

где введены обозначения

$$a_{np} = \frac{\alpha \delta_p^2 \delta_n}{u_p G_{np}^{(1)}}, \qquad b_{np} = \frac{\beta \delta_p^2 \delta_n}{v_p G_{np}^{(2)}}, \qquad \alpha = \frac{4(d_2^2 - d_1^2)}{\pi d_1 d_2 \sqrt{d_1 d_2}}$$

$$\beta = \frac{4}{\pi}(d_2^2 - d_1^2)\sqrt{d_1 d_2}, \quad G_{np}^{(1)} = \left(\delta_n^2 + \frac{\delta_p^2}{d_1^2}\right)\left(\delta_n^2 + \frac{\delta_p^2}{d_2^2}\right), \quad \delta_n = 2n - 1$$

$$G_{np}^{(2)} = (\delta_n^2 + \delta_p^2 d_1^2)(\delta_n^2 + \delta_p^2 d_2^2)$$

$$c_p^{(1)} = \frac{(-1)^p e_{1p}'}{\sqrt{d_2}\, u_p}, \qquad c_p^{(2)} = \frac{(-1)^{p+1} \sqrt{d_1}\, e_{2p}'}{v_p}$$

При больших p имеем оценки

$$\begin{gathered}
\sum_{n=1}^{\infty} a_{np} = \frac{\alpha \delta_p^2}{u_p} \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{n}{\left(n^2 + \frac{\delta_p^2}{d_1^2}\right)\left(n^2 + \frac{\delta_p^2}{d_2^2}\right)} < \\
< \frac{\alpha d_2^2}{u_p} \left[3 \frac{d_2^2}{\delta_p^2} + \frac{d_2}{4\delta_p} + \frac{\ln z}{2(z^2 - 1)} \right] = O\left(\frac{1}{p}\right) + \frac{2}{\pi} \varphi(z) \\
\sum_{n=1}^{\infty} b_{np} = \frac{\beta \delta_p^2}{v_p} \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{n}{(n^2 + \delta_p^2 d_1^2)(n^2 + \delta_p^2 d_2^2)} < \\
< \frac{\beta}{d_1^2 v_p} \left[\frac{3}{\delta_p^2 d_1^2} + \frac{1}{4\delta_p d_1} + \frac{\ln z}{2(z^2 - 1)} \right] = O\left(\frac{1}{p}\right) + \frac{2}{\pi} \varphi(z)
\end{gathered} \tag{4.6}$$

где $z = \frac{d_2}{d_1}$, $\varphi(z) = \frac{\sqrt{z} \ln z}{z - 1}$.

При получении оценок (4.6) использовано неравенство (при больших u, v)

$$\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{n}{(n^2+u^2)(n^2+v^2)} < \frac{1}{u^2}\left[\frac{3}{u^2}+\frac{1}{4u}+\frac{\ln z}{2(z^2-1)}\right], \quad \frac{v}{u}=z>1 \tag{4.7}$$

которое будет доказано ниже.

При $z>1$ $\varphi(z)<1$. Тем самым, при больших p сумма коэффициентов в уравнениях (4.5) не превосходит 0,64. Свободные члены этих систем стремятся к нулю. Следовательно, совокупность систем (4.5) квази-вполне регулярна.

Для доказательства неравенства (4.7) вводим функцию

$$f(x) = \frac{x}{(x^2+u^2)(x^2+v^2)}$$

Пусть x_m и x_n — соответственно точки максимума и перегиба функции $f(x)$ для $x>0$. Тогда имеем

$$\frac{u}{\sqrt{3}} \leqslant x_m < u, \quad u \leqslant x_n < u\sqrt{3}$$

Пусть x_n лежит в интервале $[2N-1, 2N+1)$, где N — натуральное число. Тогда

$$\sum_{n=3,5,\ldots}^{2N-3} [f(n)+f(n+2)] < \int_{3}^{2N-1} f(x)\,dx, \quad N>2$$

$$2\sum_{n=2N+1,\,2N+3,\ldots}^{\infty} f(n) < \int_{2N-1}^{\infty} f(x)\,dx$$

откуда

$$\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} f(n) < f(1)+\frac{1}{2}f(3)+\frac{1}{2}f(2N-1)+\frac{1}{2}\int_{3}^{\infty} f(x)\,dx \tag{4.8}$$

Для больших u имеем

$$\frac{1}{2}f(2N-1) < f(2N+1) < f(x_n) \leqslant f(u) \tag{4.9}$$

С другой стороны,

$$\int_{3}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2(z^2-1)u^2}\ln\frac{9+z^2u^2}{9+u^2} < \frac{\ln z}{(z^2-1)u^2} \tag{4.10}$$

Из (4.8) — (4.10) вытекает неравенство (4.7).

5. Проведено численное исследование для задачи растягивания квадратной пластинки ($a = b$) симметричной нагрузкой, расположенной по некоторому участку границы. Заданные функции $f_1, \ldots, f_4$ в граничных условиях (4.2) в этом случае имеют вид

$$f_1(y) = \begin{cases} q & \text{при } 0 < y < c \\ 0 & \text{при } c < y < a \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} q & \text{при } 0 < x < c \\ 0 & \text{при } c < x < a \end{cases}; \quad \begin{matrix} f_2(y) = 0 \text{ при } 0 < y < a \\ f_4(x) = 0 \text{ при } 0 < x < a \end{matrix}$$

Вычисляя коэффициенты $e_{1n}, \ldots, e_{4n}$, получим

$$e_{1n} = e_{3n} = \frac{2q \sin \varepsilon\gamma_n}{\gamma_n}, \quad e_{2n} = e_{4n} = 0, \qquad \varepsilon = \frac{c}{a}.$$

В совокупности (4.5) свободные члены имеют вид

$$c_p^{(1)} = \frac{2(-1)^p d_1 d_2 a^2 q}{\sqrt{d_2}\, \gamma_p u_p} \left[\frac{1}{d_2} \operatorname{th} \frac{\gamma_p}{d_2} \sin \varepsilon\gamma_p - \frac{(-1)^p d_2}{\operatorname{ch} \gamma_p / d_2} \operatorname{sh} \frac{\varepsilon\gamma_p}{d_2} \right]$$

$$c_p^{(2)} = \frac{2(-1)^{p+1} \sqrt{d_1}\, a^2 q}{\gamma_p v_p} \left[d_2 \operatorname{th} \gamma_p d_2 \sin \varepsilon\gamma_p - \frac{(-1)^p \operatorname{sh} \varepsilon \gamma_p d_2}{d_2 \operatorname{ch} \gamma_p d_2} \right]$$

В центре пластинки ($x = 0$, $y = 0$) нормальные напряжения определяются формулами

$$\sigma_{xx}(0, 0) = \frac{1}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 (d_1^2 C_n + d_2^2 D_n - A_n - B_n)$$

$$\sigma_{yy}(0, 0) = \frac{1}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 \left(\frac{A_n}{d_1^2} + \frac{B_n}{d_2^2} - C_n - D_n \right)$$

Вычисления проведены на ЭВМ ЕС-1022 для разных значений ε ($\varepsilon = 1$; 0,75; 0,5; 0,25; 0,1) и трех разных ортотропных материалов: 1) слоистый стеклопластик ортогонального армирования (2:1), 2) березовая трехслойная фанера, 3) БФС, 7 мм, 7 слоев. Для этих материалов: 1) $d_1 = 0{,}4444$; $d_2 = 2{,}637$; 2) $d_1 = 0{,}3442$; $d_2 = 4{,}1087$; 3) $d_1 = 0{,}373$; $d_2 = 3{,}262$.

Значения $\bar{\sigma}_1 = (2a/p)\,\sigma_{xx}(0, 0)$, $\bar{\sigma}_2 = (2a/p)\,\sigma_{yy}(0, 0)$ и $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2$, где $P = 2qc$, в зависимости от ε приведены в таблице.

Таблица 1

	1) d_1=0.4444; d_2=2.637					2) d_1=0.3442; d_2=4.1087					3) d_1=0.373; d_2=3.262				
ε	1	0.75	0.5	0.25	0.1	1	0.75	0.5	0.25	0.1	1	0.75	0.5	0.25	0.1
$\bar{\sigma}_1$	1	1.197	1.566	2.133	2.439	1	1.245	1.768	2.849	3.719	1	1.23	1.685	2.485	3.001
$\bar{\sigma}_2$	1	1.195	1.519	1.927	2.113	1	1.258	1.709	2.377	2.739	1	1.233	1.64	2.217	2.516
$\bar{\sigma}$	2	2.392	3.085	4.06	4.552	2	2.503	3.477	5.226	6.458	2	2.463	3.325	4.702	5.517

Отметим, что в случае $\varepsilon = 1$ совокупность систем (4.5) имеет конечное решение

$$X_n = \frac{X_1}{\delta_n}, \quad Y_n = \frac{Y_1}{\delta_n} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

где

$$X_1 = \sqrt{d_1}\varkappa, \quad Y_1 = -\frac{d_1^2}{\sqrt{d_2}}\varkappa, \quad \varkappa = \frac{4}{\pi}\frac{d_2^2+1}{d_2^2-d_1^2}a^2 q$$

Сравнение величины $\bar{\sigma}$, полученной в данной работе и в работе [5], показывает увеличение $\bar{\sigma}$ в случае рассмотренных здесь ортотропных материалов, причем это увеличение тем больше, чем меньше ε. С другой стороны, для рассмотренных материалов $E_1 > E_2$ (E_1 и E_2 — модули упругости вдоль главных направлений) и, как видно из таблицы, $\bar{\sigma}_1 > \bar{\sigma}_2$ в большинстве случаев.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса,
Институт механики АН
Арм. ССР

Поступила 8 XII 1980

Ռ. Կ. ԱԼԵՔՍԱՆՅԱՆ, Ժ. Գ. ԱՊԻԿՅԱՆ

ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆԱՁԵՎ ՍԱԼԻ ՀԱՄԱՐ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐԹ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԻ ՆԵՐԿԱՅԱՑՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է ուղղանկյունաձև լայնական կտրվածքով անիզոտրոպ պրիզմատիկ մարմնի առաձգականության տեսության հարթ խնդրի համար լարումների ֆունկցիայի ներկայացում: Դիտարկվող մարմինը յուրաքանչյուր կետում ունի իր կողմնային մակերևույթի ծնիչներին ուղղահայաց առաձգական սիմետրիայի հարթություն:

Օրթոտրոպության մի մասնավոր դեպքի համար լարումների ֆունկցիայի դիտարկվող ներկայացման օգնությամբ սիմետրիկ բեռնավորված ուղղանկյունաձև սալի առաջին հիմնական խնդրի լուծումը բերվում է գծային հանրահաշվական հավասարումների քվազի-լիովին ռեգուլյար անվերջ սիստեմի լուծմանը:

A PRESENTATION OF THE SOLUTION OF PLANE PROBLEM OF ELASTICITY FOR AN ANISOTROPIC RECTANGULAR PLATE

R. K. ALEKSANIAN, J. G. APIKIAN

Summary

A presentation of stress function for plane problem of elasticity for an anisotropic prismatic body with rectangle cross-section, having in

each point a plane of elastic symmetry perpendicular to the generators of the lateral surface is considered.

For a particular case of orthotropy with the aid of the considered presentation of stress function the solution of the first main problem of symmetrically loaded rectangular plate is reduced to the solution of quasi-quite regular infinite system of linear algebraic equations.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алексанян Р. К.* Об одном классе решений уравнений плоской задачи теории упругости анизотропного тела.— Докл. АН Арм. ССР, 1975, № 4.
2. *Алексанян Р. К., Чобанян К. С.* Характер напряжений вблизи края поверхности контакта скручиваемого анизотропного составного стержня.— ПМ, 1977, т. 13, вып. 6.
3. *Тимошенко С. П.* Теория упругости. М.: Изд. Наука, 1975.
4. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Изд. Наука, 1977.
5. *Абрамян Б. Л.* К плоской задаче теории упругости для прямоугольника.— ПММ, 1957, т. 21, вып. 1.