

А. Н. МАРТИРОСЯН

## НЕКОТОРЫЕ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГОЙ СРЕДЫ, ГРАНИЧАЩЕЙ С ЖИДКОСТЬЮ

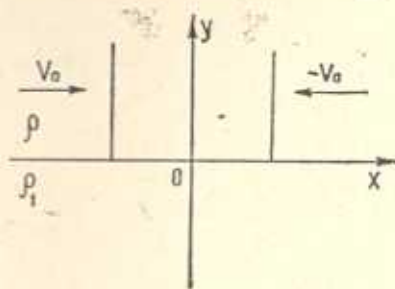
Рассматриваются задачи о соударении упругих плоских и осесимметричных тел, граничащих с жидкостью и движущихся в противоположных направлениях со скоростью  $V_0$ . Метод решения динамических задач теории упругости для изотропной среды предложен Смирновым и Соболевым [1]. Решение ряда задач динамической теории упругости методом Смирнова—Соболева и методом интегральных преобразований получено в [1—6]. Решение динамических задач при наличии трещины дано в [7, 4], а с применением метода Каньяра [8] — в работе [9]. Близкий по идее к [8] метод обращения интегральных преобразований с приведением решения к форме Смирнова—Соболева развит в [10, 11, 12, 13]. Применение указанного метода к задачам с трещинами дано в [14, 15]. Задача соударения плоских тел (стержней) со свободными поверхностями методом [3] решена в [16, 17]. Задача соударения цилиндрических стержней со свободными поверхностями решена в [18].

Плоская и осесимметричная задачи о соударении тел при наличии смешанных граничных условий методом [11, 14] решены в [19].

В настоящей работе дано решение плоских и осесимметричных задач соударения упругих тел, граничащих с жидкостью. Определена асимптотика задачи соударения тонких стержней. Для задач со смешанными граничными условиями определены коэффициенты интенсивности напряжений.

§ 1. Рассмотрим формулировку граничной задачи соударения полубесконечных упругих тел, ограниченных поверхностями прямых двугранных углов, которые по терминологии работы [16, 17] называем стержнями, и граничащих с сжимаемой жидкостью, (фиг. 1).

Если бы стержни были бесконечными в обе стороны, то задача была бы одномерной по  $x$ , где ось  $x$  направлена вдоль поверхности стержней параллельно скоростям их движения, и для проекций перемещений  $u, v$  на оси  $x, y$  имело бы место [14] в условиях неупругого соударения стержней



Фиг. 1.

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = -V_0 \sigma(x-at) + V_0 \sigma(-x-at)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = -\frac{V_0}{a} \sigma(at - |x|), \quad V_0 = 0 \quad (1.1)$$

Вводя двумерные возмущения  $U = u - u_0$ ,  $V = v$ , можно записать уравнения движения для упругих сред при  $y > 0$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + b^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + (a^2 - b^2) \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = b^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + (a^2 - b^2) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \quad (1.2)$$

Уравнения движения жидкости в полуплоскости  $y < 0$  имеют вид:

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} \right) \quad (1.3)$$

где  $a$  и  $b$  — скорости продольных и поперечных волн соответственно,  $\sigma(x)$  есть единичная функция,  $c$  — скорость волны в жидкости. Предположим, что на границе  $y = 0$ ,  $-\infty < x < \infty$  удовлетворяются следующие граничные условия:

$$K \frac{\partial U}{\partial x} + a^2 \frac{\partial V}{\partial y} + K \frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{\rho_1}{\rho} c^2 \left( \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial U_1}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad V = V_1, \quad K = a^2 - 2b^2$$

Переходя к преобразованиям Лапласа  $\bar{U}$ ,  $\bar{V}$ ,  $\bar{U}_1$ ,  $\bar{V}_1$  от  $U$ ,  $V$ ,  $U_1$ ,  $V_1$  по  $t$ , граничные условия можно записать в виде

$$K \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + a^2 \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} = K \frac{V_0}{as} e^{-1|s|s/a} + \frac{\rho_1}{\rho} c^2 \left( \frac{\partial \bar{V}_1}{\partial y} + \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} = 0, \quad \bar{V} = \bar{V}_1 \quad (1.4)$$

где  $s = -i\omega$  есть параметр преобразования Лапласа, а  $\rho$ ,  $\rho_1$  — плотность соответствующих сред. Ищем решение уравнений (1.2), (1.3), записанных для  $\bar{U}$ ,  $\bar{V}$ ,  $\bar{U}_1$ ,  $\bar{V}_1$ , в виде

$$\bar{U}, \bar{V} = \sum_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} \bar{U}_{(n)}, \bar{V}_{(n)} e^{i(\bar{\alpha}_n x + \bar{\beta}_n y)} d\bar{\alpha}$$

$$\bar{U}_1, \bar{V}_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{U}_1, \bar{V}_1 e^{i(\bar{\alpha} x + \bar{\beta}_1 y)} d\bar{\alpha} \quad (1.5)$$

$$\bar{V}^{(n)} = \frac{a^2 \bar{\beta}_1^2 - b^2 \bar{\beta}_n^2}{(a^2 - b^2) \bar{\alpha} \bar{\beta}_n} \bar{U}^{(n)}, \quad \bar{U}_1 = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}_3} \bar{V}_1$$

$$\bar{\beta}_n = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_n^2} - \bar{\alpha}^2}, \quad \bar{\beta}_3 = -\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \bar{\alpha}^2}, \quad c_1 = a, \quad c_2 = b$$

Подставляя (1.5) в (1.4) и проводя обратное преобразование Фурье по  $x$ , получим алгебраические системы уравнений относительно  $\bar{U}^{(1)}$ ,  $\bar{V}_1$ ,  $\bar{U}^{(2)}$ , решение которых дается в виде

$$\begin{aligned} \bar{U}^{(1)} &= -\frac{iKV_0 b^2 \bar{\alpha} \bar{\beta}_3 \bar{\chi}}{a^2 \pi \bar{\beta}_1^2 R(\bar{\alpha})}, & \bar{U}^{(2)} &= \frac{2iKV_0 b^2 \bar{\alpha} \bar{\beta}_2 \bar{\beta}_3}{\pi a^2 \bar{\beta}_1^2 R(\bar{\alpha})} \\ \bar{V}_1 &= -\frac{iKV_0 \omega^2 \bar{\beta}_3}{\pi a^2 \bar{\beta}_1 R(\bar{\alpha})}, & \bar{\chi} &= \frac{\omega^2}{b^2} - 2\bar{\alpha}^2 \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$R(\bar{\alpha}) = b^4 \bar{\beta}_3 [\bar{\chi}^2 + 4\bar{\alpha}^2 \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2] - \frac{b_1 \bar{\beta}_1 \omega^4}{\rho}$$

где  $R(\bar{\alpha})$  — функция Рэлея, которая имеет только два корня, находящихся на вещественной оси [20].

Подставляя (1.6) в (1.5), получим решение поставленной задачи, периодическое по времени. Обратное преобразование по  $t$ , соответствующее решению нестационарной задачи, имеет вид

$$U; V; V_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \bar{U}; \bar{V}; V_1 e^{st} ds \quad (1.7)$$

При применении обратного преобразования Лапласа по  $t$  введем вместо  $\bar{\alpha}$  переменную  $(\bar{\alpha} = \omega \alpha)$ ,  $s = \sigma - i\tau$ ,  $\bar{\beta} = \omega \beta$ , где  $\sigma > 0$  и мало).

Существенными оказываются окрестности точек  $\alpha = \alpha_n$ , для которых выражения в экспонентах обращаются в нуль

$$f_n(\alpha_n) = 0, \quad f_n(\alpha) = t - \alpha x - \beta_n(\alpha) y, \quad n = 1, 2, 3 \quad (1.8)$$

причем сопряженные значения  $\bar{\alpha}_n$  также удовлетворяют (1.8). Как показано в [11], можно контур интегрирования  $-\infty < \alpha < \infty$  заменить контуром  $\Gamma_n$ , проходящим через указанные точки  $\alpha_n, \bar{\alpha}_n$  в направлении  $\text{Im}(z\alpha + \beta_n y) = 0$ . Вычисляя интеграл по  $s$ , окончательно получим

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 2 \text{Re} \sum_{n=1}^3 \frac{\bar{U}^{(n)}(z_n)}{f_n'(z_n)}, \quad \frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2} = 2 \text{Re} \frac{\bar{V}_1(z_3)}{f_3'(z_3)} \quad (1.9)$$

и такое же выражение для  $V$  с заменой  $\bar{U}^{(n)}$  на  $\bar{V}^{(n)}$ , где  $r^2 z_n = tx + yi \sqrt{t^2 - r^2 c_n^{-2}}$ ,  $r^2 z_3^* = tx - yi \sqrt{t^2 - r^2/c^2}$ ,  $r^2 = x^2 + y^2$ . Здесь  $\bar{U}^{(n)}$ ,  $\bar{V}_1$  дается (1.5), где положено  $\omega = 1$ .



Из (1.9) можно получить значение напряжений и перемещений при  $y=0$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\sigma_{yy}}{\rho} = \frac{2iKV_0 c_R \delta(t - |x|/c_R)}{a \sqrt{a^2 - c_R^2} R'(1/c_R)} - \operatorname{Re} \frac{2iKV_0 \varepsilon (|x| - ct) \varepsilon (|x| - at)}{\pi a^2 x R(x) \beta_1(x)}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = - \operatorname{Re} \frac{2iKV_0 \beta_3(x) \varepsilon (|x| - at) \varepsilon (|x| - ct)}{\pi a^2 x \beta_1(x) R(x)}$$

$$c = \frac{t}{x}, \quad R\left(\frac{1}{c_R}\right) = 0$$

где  $\delta(x)$  — дельта-функция,  $\varepsilon(x)$  — единичная функция, а при  $x=0$ , то есть на поверхности соударения стержней имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\sigma_{yy}}{\rho} = \frac{KV_0}{a} \delta(t) + \frac{2Kb^4 V_0 \bar{\lambda}^2 (ix_1) \beta_3(ix_1)}{\pi a^2 y R(ix_1) \beta_1^2(ix_1) \beta_1(ix_1)} +$$

$$+ \frac{8KV_0 b^4 \beta_3^2(ix_2)}{\pi a^2 y R(ix_2) \beta_1(ix_2) \beta_1^2(ix_2)}, \quad \alpha_n = \sqrt{\frac{t^2}{y^2} - \frac{1}{c_n^2}}, \quad n=1, 2$$

Для выделения особой части решения вблизи точечных волн полагаем

$$\alpha_n \approx \alpha_n^0 + \frac{iy}{r^2} \sqrt{\frac{2r}{c_n} \left(t - \frac{r}{c_n}\right)}, \quad n=1, 2$$

$$\alpha_3 \approx \alpha_3^0 - \frac{iy}{r^2} \sqrt{\frac{2r}{c} \left(t - \frac{r}{c}\right)}$$

$$\bar{U}^{(n)}(\alpha_n) \approx \bar{U}^{(n)}(\alpha_n^0) + \bar{U}^{(n)'}(\alpha_n^0)(\alpha_n - \alpha_n^0), \quad \alpha_n = tx/r^2$$

и поскольку  $\alpha_n^0, \beta_n(\alpha_n^0)$  действительны, а  $\bar{U}^{(n)}(\alpha_n^0), \bar{V}^{(n)}(\alpha_n^0), \bar{V}_1(\alpha_3^0)$  чисто мнимые, то можно из (1.9) получить

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2 \sum_1^2 i \bar{U}^{(n)}(\alpha_n^0) \frac{y}{r^2} \sqrt{\frac{2r}{c_n} \left(t - \frac{r}{c_n}\right)} \varepsilon \left(t - \frac{r}{c_n}\right)$$

$$\frac{dV_1}{dt} = -2i \bar{V}_1(\alpha_3^0) \frac{y}{r^2} \sqrt{\frac{2r}{c} \left(t - \frac{r}{c}\right)} \varepsilon \left(t - \frac{r}{c}\right)$$

и такое же выражение для  $\partial V/\partial t$  с заменой  $\bar{U}^{(n)}$  на  $\bar{V}^{(n)}$ .

Можно получить решение для соударения слоев конечной высоты  $2h$  и получить асимптотику для больших  $t$  так, как сделано в [19], причем  $\partial U/\partial x$  имеет тот же вид, что и для осесимметричной задачи, решенной в § 2.

§ 2. Получим решение задачи соударения упругих цилиндрических стержней радиуса  $\varepsilon$ , причем при  $r > \varepsilon$  среда заполнена жидкостью. Уравнения движения в цилиндрических координатах при наличии осевой симметрии для возмущений  $U_x = u_x - u_0$ ,  $U_r = u_r$  имеют вид (для  $r > \varepsilon$ ) (фиг. 2)

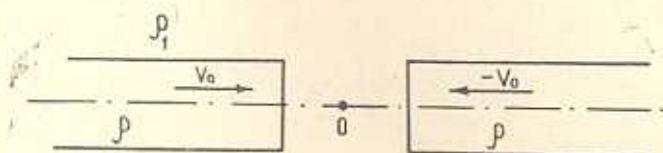
$$\frac{\partial^2 U_r}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial \Delta}{\partial r} + 2b^2 \frac{\partial \omega_\theta}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial \Delta}{\partial x} - \frac{2b^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\omega_\theta) \quad (2.1)$$

где

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rU_r) + \frac{\partial U_x}{\partial x}, \quad \omega_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_r}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial r} \right)$$

$u_0$  дается (1.1), а для  $r > \epsilon$  уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_{1r}}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial \Delta_1}{\partial r}, & \frac{\partial^2 U_{1x}}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial \Delta_1}{\partial x} \\ \Delta_1 &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rU_{1r}) + \frac{\partial U_{1x}}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.2)$$



Фиг. 2.

Граничные условия на поверхности соударяющихся стержней берем в виде ( $r = \epsilon$ )

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \rho \left[ K\Delta + 2b^2 \frac{\partial U_r}{\partial r} - \frac{KV_0}{a} \sigma \left( t - \frac{|x|}{a} \right) \right] = \sigma_{1rr} \\ \frac{\sigma_{rx}}{\rho} &= b^2 \left( \frac{\partial U_x}{\partial r} + \frac{\partial U_r}{\partial x} \right) = 0, \quad U_r = U_{1r}, \quad \frac{\sigma_{1rr}}{\rho_1} = c^2 \Delta_1 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Решение задачи (2.1), (2.2), (2.3) ищем в виде

$$\begin{aligned} \bar{U}_r &= \sum_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\bar{\alpha}x} J_1(r\bar{\beta}_n) \bar{U}_r^{(n)} d\bar{\alpha}, & \bar{U}_x &= \sum_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\bar{\alpha}x} J_0(\bar{\beta}_n r) \bar{U}_x^{(n)} d\bar{\alpha} \\ \bar{U}_{1r} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\bar{\alpha}x} J_2(r\bar{\beta}_3) \bar{U}_{1r} d\bar{\alpha}, & \bar{U}_{1x} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\bar{\alpha}x} J_0(r\bar{\beta}_3) \bar{U}_{1x} d\bar{\alpha} \end{aligned} \quad (2.4)$$

где

$$\bar{U}_r^{(n)} = i \frac{\alpha^2 \bar{\beta}_1^2 - b^2 \bar{\beta}_n^2}{(\alpha^2 - b^2) \alpha} \bar{U}_x^{(n)}, \quad \bar{U}_{1r} = \frac{i \bar{\beta}_3}{\alpha} \bar{U}_{1x}$$

$\bar{\beta}_n$  — дается (1.5), а  $J_0, J_1$  — функции Бесселя.

Подставляя (2.4) в (2.3), получим

$$\begin{aligned} \bar{U}_x^{(1)} &= \frac{i K V_0 \bar{\alpha} J_1(\epsilon \bar{\beta}_2)}{\pi \alpha^2 \bar{\beta}_1^2 F(\bar{\alpha})}, & U_x^{(2)} &= -\frac{2i K V_0 \bar{\alpha} \bar{\beta}_2 J_1(\epsilon \bar{\beta}_1)}{\pi \alpha^2 \bar{\beta}_1 F(\bar{\alpha})} \\ \bar{U}_{1x} &= \frac{i \omega^2 K V_0 \bar{\alpha} J_1(\epsilon \bar{\beta}_1) J_1(\epsilon \bar{\beta}_2)}{\pi \alpha^2 b^2 \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_3 J_1(\epsilon \bar{\beta}_3) F(\bar{\alpha})} \\ F(\bar{\alpha}) &= b^2 \bar{\alpha}^2 J_0(\epsilon \bar{\beta}_1) J_1(\epsilon \bar{\beta}_2) + 4b^2 \alpha \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 J_1(\epsilon \bar{\beta}_1) J_2(\epsilon \bar{\beta}_2) - \\ &- \frac{2\omega^2}{\epsilon} J_1(\epsilon \bar{\beta}_1) J_1(\epsilon \bar{\beta}_2) \bar{\beta}_1 - \frac{\rho_1 \omega^2 J_1(\epsilon \bar{\beta}_2)}{\rho b^2 \bar{\beta}_3 J_1(\epsilon \bar{\beta}_3)} J_1(\epsilon \bar{\beta}_1) J_0(\epsilon \bar{\beta}_3) \bar{\beta}_1 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Подставляя (2.5) в (2.4), получим решение поставленной задачи, периодическое во времени  $t$ , однако обратное преобразование Лапласа в простом виде записать не удастся. Определим асимптотику решения для больших  $t$ , в которой  $\omega \varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\omega r \rightarrow 0$ , тогда

$$F(x) \approx \frac{\omega^2 \beta_2}{2\alpha^2 \beta_1^2} (3a^2 - 4b^2) (x^2 - \alpha_1^2) (x^2 - \alpha_2^2) \quad (2.6)$$

$$\alpha_{1,2}^4 - \frac{3a^2 - 4b^2 - c^2}{c^2(3a^2 - 4b^2)} \alpha_{1,2}^2 + \frac{a^2 - b^2 - c^2}{b^2 c^2 (3a^2 - 4b^2)} = 0$$

Затем подставим (2.6) в (2.5) с учетом (2.4) и того, что  $\omega \varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\omega r \rightarrow 0$ . Вычисляя в интегралах по  $x$  вычеты в точках  $x = \alpha_1, \alpha_2, \alpha^{-1}$  при  $x > 0$  и  $x = -\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha^{-1}$  при  $x < 0$ , можно получить асимптотику в виде

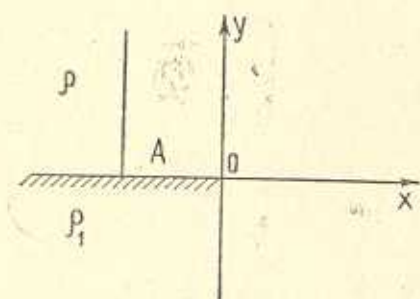
$$\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial x} = A \left[ \frac{\alpha_1 \beta_2^2(\alpha_1) \sigma(t - \alpha_1 |x|)}{(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \beta_1^2(\alpha_1)} - \frac{\alpha_2 \beta_2^2(\alpha_2) \sigma(t - \alpha_2 |x|)}{(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \beta_1^2(\alpha_2)} \right] - \frac{V_0}{a} \sigma\left(t - \frac{|x|}{a}\right)$$

$$\frac{\partial U_{1\varepsilon}}{\partial x} = \frac{a^2 A}{K(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)} [\alpha_1 \sigma(t - \alpha_1 x) - \alpha_2 \sigma(t - \alpha_2 |x|)], \quad A = -\frac{K^2 V_0}{a^2 b^2 (3a^2 - 4b^2)}$$

где  $\alpha_{1,2}^{-1}$  по (2.6) дают скорости волн вдоль поверхности стержней — жидкостей. Таким образом, наличие жидкого полупространства влияет как на значения скоростей волн, так и на величину деформации.

При отсутствии жидкости  $c = 0$  и получим  $\alpha_1^{-1} = c_0$  [19],  $\alpha_2^{-1} = 0$ , и можно решать задачу соударения со смешанными граничными условиями.

§ 3. Рассматривается плоская задача соударения при смешанных граничных условиях на поверхности стержней. Обозначим через  $x = -l$



Фиг. 3.

координату точки соударения  $A$ , фиг. 3. Вначале рассмотрим значения  $l \geq 0$ , при которых точка  $A$ , фиг. 3, находится на жесткой опоре. Переходя к преобразованиям Лапласа  $\bar{U}, \bar{V}, \bar{U}_1, \bar{V}_1$  от  $U, V, U_1, V_1$  по  $t$ , граничные условия можно записать в виде ( $y = 0$ )

$$K \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + a^2 \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} + K \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial x} =$$

$$= \frac{\rho_1}{\rho} c^2 \left( \frac{\partial \bar{V}_1}{\partial y} + \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x} \right) \text{ при } x > 0$$

$$V = V_1 \text{ при } x > 0; \quad \bar{V} = \bar{V}_1 = 0 \text{ при } x < 0$$



$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} = 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (3.1)$$

$$\bar{U}, \bar{V}, \bar{U}_1, \bar{V}_1 = O(r^{1/2}), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$$

(условие на ребре)

где  $\partial u_0 / \partial x = -V_0 / a s \exp(-x' s / a)$ ,  $x' = x + l$ ,  $\bar{U}, \bar{V}, \bar{U}_1, \bar{V}_1$  дается (1.5). Подставляя (1.5) в (3.1) и проводя обратное преобразование Фурье по  $x$ , можно получить уравнение Винера—Хопфа

$$\begin{aligned} \frac{2ib^2}{a^2} (a^2 - b^2) \sqrt{\frac{\omega}{b} - \bar{x}} F^-(\bar{x}) V^-(\bar{x}) &= \frac{\Omega_0^+(\bar{x})}{F^+(\bar{x}) \sqrt{\frac{\omega}{b} + \bar{x}}} + \\ &+ \frac{V_0 K \exp(i\omega l/a)}{2\pi a \omega \left(\bar{x} - \frac{\omega}{a}\right) \sqrt{\frac{\omega}{b} + \bar{x}} F^+(\bar{x})}, \quad \Omega_0^+ = \Omega_1^+ - \Omega^+ \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\Omega^+ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^{-i\bar{x}x} \left(\frac{\sigma_{yy}}{\rho}\right)_{y=0} dx, \quad \Omega_1^+ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{\rho_1}{\rho} e^2 \left(\frac{\partial \bar{V}_1}{\partial y} + \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x}\right)_{y=0} e^{-i\bar{x}x} dx$$

$$V^- = V_1^- = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} (\bar{V}_1)_{y=0} \exp(-i\bar{x}x) dx$$

$$F^\pm(\bar{x}) = \frac{\omega/c_R \pm \bar{x}}{\sqrt{(\omega/a \pm \bar{x})(\omega/b \pm \bar{x})}} \exp\left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\pm \omega/a}^{\mp \omega/b} \ln \frac{R(\tau)}{R(\tau) - \bar{x}} d\tau\right]$$

где  $\Omega_0^+(\bar{x})$  и  $V^-(\bar{x})$  аналитична соответственно в верхней и нижней полуплоскостях  $\bar{x}$ . Левая часть (3.2) аналитична в нижней полуплоскости  $\bar{x}$ , а правая часть — в верхней полуплоскости, кроме  $\bar{x} = \omega/a$ , где имеют простой полюс. Вычитая из обеих частей (3.2)

$$\frac{V_0 K \exp(i\omega l/a)}{2\pi a \omega (\bar{x} - \omega/a) \sqrt{\omega/a + \omega/b} F^+(\omega/a)} \equiv B(\bar{x}) \exp(i\omega l/a)$$

и используя условие на ребре, можно показать, что обе части полученного уравнения тождественно равны нулю, причем решение уравнения Винера—Хопфа получится в виде

$$V^- = \frac{ia^2 B(\bar{x}) \exp(i\omega l/a)}{2b^2 (b^2 - a^2) \sqrt{\omega/b - \bar{x}} F^-(\bar{x})} = \bar{V}_1 \equiv id_2(\bar{x}) \exp(i\omega l/a)$$

$$\bar{U}_1 = i \frac{\bar{x}}{\beta_3} d_2(\bar{x}) \exp(i\omega l/a) \equiv id_1(x) \exp(i\omega l/a)$$

$$\bar{U}^{(1)} = \frac{i\alpha^2 \bar{\alpha} \bar{\beta}_1 B(\bar{\alpha}) \exp(i\omega l/a)}{2(b^2 - \alpha^2) \omega^2 \bar{\beta}_1 F^-(\bar{\alpha}) V_{\omega/b - \bar{\alpha}}} \equiv i\alpha_1(\bar{\alpha}) \exp(i\omega l/a)$$

$$\bar{U}^{(2)} = \frac{i\alpha^2 \bar{\alpha} \bar{\beta}_2 B(\bar{\alpha}) \exp(i\omega l/a)}{(\alpha^2 - b^2) \omega^2 V_{\omega/b - \bar{\alpha}} F^-(\bar{\alpha})} \equiv i\alpha_2(\bar{\alpha}) \exp(i\omega l/a)$$

Аналогично (1.9) можно получить

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -2 \operatorname{Re} i \sum_1^2 \frac{\bar{\alpha}_n(x_n)}{f_n(x_n)}, \quad \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} = -2 \operatorname{Re} i \frac{d_1(x_3)}{f_3(x_3)}$$

$$f_n(x_n) = t - \frac{l}{a} - \alpha_n x - \beta_n(x_n) y = 0 \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -2 \operatorname{Re} i \sum_1^2 \frac{b_n(x_n)}{f_n(x_n)}, \quad \frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2} = -2 \operatorname{Re} i \frac{d_2(x_3)}{f_3(x_3)}$$

$$b_n(x) = (\alpha^2 \beta_1^2 - b^2 \beta_n^2) [(\alpha^2 - b^2) \alpha \beta_n]^{-1} a_n(x)$$

Из (3.3) можно получить значения коэффициента при  $(V \sqrt{-x})^{-1}$  в  $\sigma_{yy}$ , то есть коэффициента интенсивности напряжений ( $y = 0, x \rightarrow -0$ )

$$\frac{\sigma_{yy}}{\rho} = \frac{2V_0 K}{V \sqrt{-x}} \sqrt{t - \frac{l}{a}} \sigma \left( t - \frac{l}{a} \right)$$

$$\frac{\sigma_{1yy}}{\rho_1} = \frac{\alpha V_0 K \sqrt{\alpha b} (-x)^{3/2} \sigma(t - l/a)}{3\pi b^4 (\alpha^2 - b^2) \sqrt{\alpha^2 + b^2} F^+(l/a) (t - l/a)^{3/2}}$$

§ 4. Рассмотрим теперь случай, когда  $l < 0$ , то есть соударение стержней происходит вне жесткой опоры.

Аналогично § 3 можно получить уравнение Винера-Хопфа

$$\frac{2ib^2}{\alpha^2} (\alpha^2 - b^2) \sqrt{\frac{\omega}{b} - \bar{\alpha}} F^-(\bar{\alpha}) V^- = \frac{\Omega_0^+}{V_{\omega/b + \bar{\alpha}} F^+(\bar{\alpha})} +$$

$$+ \frac{KV_0 \exp(s l/a)}{2\pi a \omega (\omega/\alpha + \bar{\alpha}) V_{\omega/b + \bar{\alpha}} F^+(\bar{\alpha})} + f_1(\bar{\alpha}), \quad f_1 = \frac{f e^{i\omega l}}{\alpha + \alpha_R}$$

$$f(\bar{\alpha}) = \frac{V_0 K}{\pi a^2 X^+(\bar{\alpha}) V_{\omega/\alpha + \bar{\alpha}} (\bar{\alpha} - \omega/a)}$$

$$X^+(\bar{\alpha}) = \frac{F^+(\bar{\alpha}) V_{(\omega/\alpha + \bar{\alpha})(\omega/b + \bar{\alpha})}}{\omega/c_R + \bar{\alpha}}$$

где  $V^-, F^-, \Omega_0^+$  дается (3.2),  $\bar{\alpha}_R = \omega/c_R$ .

Для того, чтобы применить метод Винера-Хопфа, необходимо  $f_1(\bar{\alpha})$  представить как сумму двух функций, одна из которых аналитична в нижней полуплоскости, а другая — в верхней полуплоскости плоскости  $\bar{\alpha}$ ,

$$f_1(\bar{\alpha}) = f_1^+(\bar{\alpha}) + f_1^-(\bar{\alpha}) \quad (4.2)$$



Можно показать, что [14]

$$f_l(\bar{z}) = \int_{-\infty}^{-\omega/c} \varphi(\tau, \bar{z}) e^{i\tau} d\tau$$

$$\varphi(\tau, \bar{z}) = \begin{cases} \xi \equiv \varphi_1(\tau, \bar{z}), & \tau \in \left(-\infty, -\frac{\omega}{c}\right) \\ \frac{\xi b^2 \bar{\beta}_2(\tau) \chi^2(\tau)}{R(\tau)} \equiv \varphi_2(\tau, \bar{z}), & \tau \in \left[-\frac{\omega}{c}, -\frac{\omega}{b}\right] \\ \frac{\xi b^2 \bar{\beta}_2(\tau)}{R(\tau)} [\bar{K}^2(\tau) - 4\tau^2 \bar{\beta}_1(\tau) \bar{\beta}_2(\tau)] \equiv \varphi_3, & \tau \in \left[-\frac{\omega}{b}, -\frac{\omega}{a}\right] \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\xi(\tau, \bar{z}) = V_0 K \left[ \pi^2 a^2 X^+(\tau) \sqrt{-\frac{\omega}{a} - \tau} \left(\tau + \frac{\omega}{cR}\right) \left(\tau - \frac{\omega}{a}\right) (\tau - \bar{z}) \right]^{-1}$$

причем под  $X^+(\tau)$  подразумеваются граничные значения  $X^+(\tau)$  сверху на участке  $-\omega/c < \tau < -\omega/a$ .

Подставляя (4.3), (4.2) в (4.1) и решая уравнение Винера-Хопфа, можно получить

$$\bar{U}^{(n)} = iA_1^{(n)} e^{i\tau} + i \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{-\omega/c_k} A_{2,k}^{(n)}(\tau, \bar{z}) e^{i\tau} d\tau$$

$$\bar{V}_1 = iD_1 e^{i\tau} + i \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{-\omega/c_k} D_{2,k}(\tau, \bar{z}) e^{i\tau} d\tau$$

и такое же выражение для  $\bar{V}^{(n)}$ , где  $A$  заменено на  $B$ , причем

$$A_1^{(1)} = \frac{b^2 V_0 K \bar{\beta}_2 \bar{\chi}}{\pi a^2 R(\bar{z}) \bar{\beta}_1^2}, \quad A_{2,k}^{(1)} = \frac{a^2 \bar{\chi}(\bar{z}) \lambda_k(\tau, \bar{z})}{2(a^2 - b^2) V_{\omega/b - \bar{z}} F^-(\bar{z}) \bar{\beta}_1(\bar{z}) \omega^2} \quad (4.4)$$

$$\bar{\chi}(\bar{z}) A_1^{(2)} = -2\bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 A_1^{(1)}, \quad \bar{\chi}(\bar{z}) A_{2,k}^{(2)} = -2\bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 A_{2,k}^{(1)}$$

$$B_1^{(n)} = \frac{a^2 \bar{\beta}_1^2 - b^2 \bar{\beta}_n^2}{(a^2 - b^2) \bar{\alpha} \bar{\beta}_n} A_1^{(n)}, \quad B_{2,k}^{(n)} = \frac{a^2 \bar{\beta}_1^2 - b^2 \bar{\beta}_n^2}{(a^2 - b^2) \bar{\alpha} \bar{\beta}_n} A_{2,k}^{(n)}$$

$$D_1 = \frac{\bar{\beta}_1 \omega^2}{b^2 \bar{\alpha} \bar{\chi}} A_1^{(1)}, \quad D_{2,k} = \frac{\bar{\beta}_1 \omega^2}{b^2 \bar{\alpha} \bar{\chi}} A_{2,k}^{(1)}$$

$$c_1 = a, \quad c_2 = b, \quad c_3 = c, \quad \lambda_1 = \varphi_3, \quad \lambda_2 = \varphi_2 - \varphi_3, \quad \lambda_3 = \varphi_1 - \varphi_3$$

Аналогично (1.9) можно получить при  $l < 0$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -2 \operatorname{Re} i \sum_{n=1}^2 \left[ \frac{A_1^{(n)}(z_1^{(n)})}{f_1^{(n)}(z_1^{(n)})} + \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{-1/c_k} \frac{A_{2,k}^{(n)}(z_2^{(n)}, \xi) d\xi}{f_2^{(n)}(z_2^{(n)}, \xi)} \right]$$

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2} = -2 \operatorname{Re} i \left[ \frac{D_1(z_3)}{f_3(z_3)} + \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{-1/c_k} \frac{D_{2,k}(z_4, \xi) d\xi}{f_4(z_4)} \right]$$

$$f_1^{(n)}(z_1^{(n)}) = t - (x+l)z_1^{(n)} - y\beta_n(z_1^{(n)}) = 0 \quad (4.5)$$

$$f_2^{(n)}(z_2^{(n)}, \xi) = t - z_2^{(n)}x - y\beta_n(z_2^{(n)}) - \xi l = 0$$

$$f_3(z_3) = t - (x+l)z_3 - y\beta_3(z_3) = 0$$

$$f_4(z_4, \xi) = t - xz_4 - y\beta_3(z_4) - \xi l = 0$$

и такое же выражение для  $\partial^2 V/\partial t^2$ , где  $A$  заменено на  $B$ .

В (4.5) функции  $A$ ,  $B$ ,  $D$  находятся из (4.4), (4.3), где положено  $\omega = 1$ .

Из (4.5) можно получить значения коэффициента интенсивности напряжений для обеих сред ( $y = 0$ ,  $x \rightarrow -0$ )

$$\sigma_{yy} = -4\rho \sum_{k=1}^2 \int_{-1/c}^{-1/c_k} \frac{\sqrt{t-\tau l}}{\sqrt{V-x}} \mu_k(\tau) \sigma(t-\tau l) d\tau$$

$$\sigma_{1yy} = -\frac{2\rho a^2(-x)^{3/2}}{3b^2(a^2-b^2)} \sum_{k=1}^2 \int_{-1/c}^{-1/c_k} \frac{\mu_k(\tau)}{(t-\tau l)^{3/2}} \sigma(t-\tau l) d\tau$$

где  $\mu_k(\tau) = \lambda_k(\tau, x)(\tau - x)$ , причем решение равно нулю при  $\tau < -1/c$ .

Педагогический институт  
им. Х. Абовяна

Поступила 5 II 1981

Ա. Ն. ՄԱՐՏԻՐՈՅԱՆ

ՄԻ ՔԱՆԻ ՈՉ ՄՏԱՅԻՌՆԱՐ ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ ՀԵՂՈՒԿԻ ՀԵՏ  
ՍԱՀՄԱՆԱԿՑՈՂ ԱՌԱԶԳԱԿԱՆ ՄԻՋՍՎԱՅՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ա մ ֆ ո ֆ ո լ մ

Ստացված է անալիտիկ լուծում հեղուկի հետ սահմանակցող հարթ և անհրաժեշտորեն մարմինների առաձգական խնդրի համար խառը կլրային պայմանների առկայությամբ: Լուծումը որոշված է Սմիթնոլ-Սորոլիի ձևով, դրանված է լարումների ինտենսիվության գործակցի արժեքը ամրակցման մասակայքում:

# SOME UNSTEADY BOUNDARY PROBLEMS FOR ELASTIC MEDIUM BOUNDED BY FLUID

A. N. MARTIROSIAN

## S u m m a r y

Analytic solution for the elastic problem of impact of plane and axial symmetric bodies bounded with fluid in the presence of mixed boundary conditions is obtained. The solution in the Smirnov-Sobolev form is determined; the value of coefficient of intensity of stress near the support is found. For the small value of height or radius respectively in plane or axial symmetric problems, the simple formulae for elastic displacements corresponding to the asymptotic one-dimensional solution in the form of core waves are given.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Франк Ф., Милес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. М.—Л.: ОНТИ, 1937.
2. Бобич В. М., Капилевич М. Б. и др. Линейные уравнения математической физики. М.: Изд. Наука, 1964.
3. Веква И. Н. К вопросу распространения упругих волн в бесконечном слое, ограниченном двумя параллельными плоскостями. Тр. Тбилисск. геофиз. ин-та, 1937, т. 2.
4. Черепинов Г. П. Дифракция упругих волн на разрезе.—В сб. Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М.: Изд. Наука, 1972.
5. Зволинский Н. В., Флитман А. М., Костров Б. В., Афанасьев В. А. Некоторые задачи дифракции упругих волн. В сб. Приложения теории функций и механики сплошной среды, т. 1. М.: Изд. Наука, 1965.
6. Свекло В. А. К решению динамических задач плоской теории упругости для анизотропного тела.—ПММ, 1961, т. 25, вып. 5.
7. Мауэ А. Die Entspannungswelle bei plötzlichem Einschnitt eines gespannten elastischen Körpers.—ZAMM, 1954, Bd. 34, H. 1/2.
8. Каньяр А. Réflexion et réfraction des ondes seismiques progressives. Paris: Gauthier — Villards, 1939.
9. Бекер В. Dynamic stresses created by a moving crack.—Trans. ASME, Ser. E., J. Appl. Mech., 1962, vol. 29, No. 3.
10. Петрашнев Г. И., Мартик Г. Н., Огурцов К. И.—Уч. зап. ЛГУ, 1950, № 135, вып. 21.
11. Багдоев А. Г. Определение фундаментальных решений для уравнений магнитоупругости.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1974, т. 27, № 2.
12. Багдоев А. Г., Мартirosян А. Н. Решение ряда нестационарных пространственных задач для сплошной среды при наличии сосредоточенных импульсов.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1974, т. 27, № 3.
13. Багдоев В. С. Об одной краевой задаче динамической теории упругих анизотропных сред.—ПМТФ, 1974, № 3.
14. Багдоев А. Г., Мартirosян А. Н. Решение нестационарной задачи для анизотропной упругой плоскости с полубесконечным разрезом, на границах которого заданы нормальный и касательный импульсы.—МТТ, 1976, № 1.
15. Мартirosян А. Н. Решение нестационарной граничной задачи для магнитоупругой среды.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1974, т. 27, № 6.



16. Малков М. А. Двумерная задача об упругом соударении стержней.— Докл. АН СССР, 1965, т. 148, № 4.
17. Малков М. А. Асимптотика двумерной задачи об упругом соударении стержней.— ПИММ, 1968, т. 32, вып. 3.
18. Skulak R. Longitudinal Impact of some Infinite bars.— Journal of Applied Mechanics, 1957, 24, 1, 59—64.
19. Бездогов А. Г., Мартиросян А. Н. Задача соударения стержней при смешанных граничных условиях.— Докл. АН СССР, 1976, т. 226, № 3.
20. Гоголадзе В. Г. Дисперсия волн Рэлея в слое. Тр. сейсмолог. ин-та АН СССР, 119, 1947.