

Ю. А. АНТИПОВ, А. Ф. ДАЩЕНКО, Г. Я. ПОПОВ

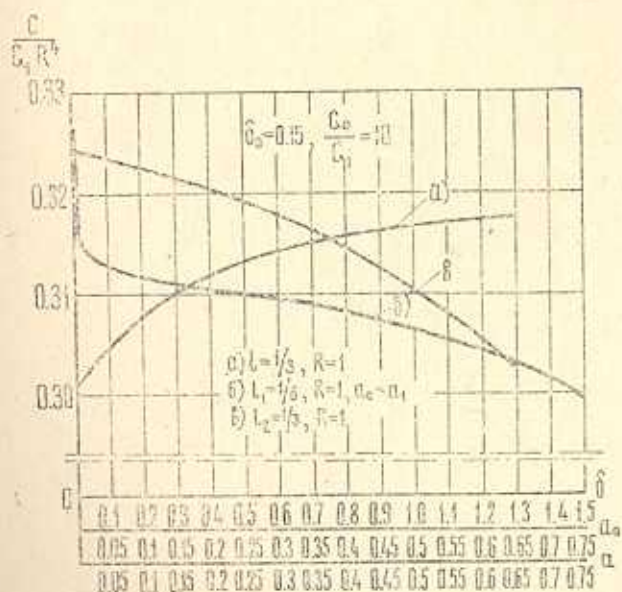
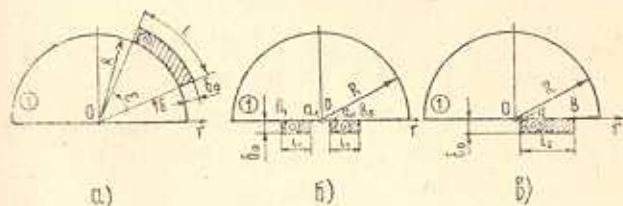
### О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ КРУЧЕНИЯ СТЕРЖНЕЙ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕЩИН И ТОНКИХ ПОДКРЕПЛЕНИЙ

Обобщенным методом интегральных преобразований [7] решаются следующие задачи кручения упругих изотропных стержней (валов):

1. Стержень с модулем сдвига  $G_1$ , имеющий сечение  $\Omega$  в виде полукруга ( $0 \leq r \leq R$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ), с тонким подкреплением толщиной  $\delta_0$  и модулем сдвига  $G_0$ , расположенным:

а) на криволинейном участке  $0 \leq \delta < \varepsilon \leq \pi$  (фиг. 1а);

б) на прямолинейном участке  $0 \leq a_i < b_i \leq R$  ( $i = 0, 1$ ) (фиг. 1б), скручивается моментами, приложенными к торцам. Необходимо найти зависимость жесткости скручиваемого стержня от положения подкрепления на боковой поверхности.



Фиг. 1.

2. Круглый цилиндрический вал ( $0 \leq r \leq R$ ) с несколькими кольцевыми поперечными трещинами скручивается моментами  $M$  (фиг. 3).

Требуется определить коэффициент интенсивности напряжений ( $K_{II}$ ) на краях трещин.

§ 1. Согласно известной теории кручения подкрепленных стержней [1] задачи 1а и 1б сводятся к нахождению функции напряжений  $\varphi(r, \theta)$  удовлетворяющей в области  $\Omega$  уравнению

$$\Delta \varphi = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \varphi = -2$$

а на контуре сечения условиям:

в случае задачи 1а

$$\varphi(r, 0) = \varphi(r, \pi) = 0, \quad r \in [0, R]; \quad \varphi(R, \theta) = 0, \quad \theta \in [\delta, \varepsilon] \quad (1.1)$$

$$\left[ \varphi + \nu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right]_{r=R} = 0, \quad \theta \in [\delta, \varepsilon], \quad (\nu_0 = \delta_0 G_0 G_1^{-1}) \quad (1.2)$$

в случае задачи 1б

$$\varphi(R, \theta) = 0, \quad \theta \in [0, \pi]; \quad \varphi(r, 0) = 0, \quad r \in [a_0, b_0]; \quad \varphi(r, \pi) = 0, \quad r \in [a_1, b_1] \quad (1.3)$$

$$\left[ \varphi - \frac{\nu_0}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right]_{\theta=0} = 0, \quad r \in [a_0, b_0]; \quad \left[ \varphi + \frac{\nu_0}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right]_{\theta=\pi} = 0, \quad r \in [a_1, b_1]$$

Займемся решением задачи 1а. Введем функцию  $\omega(\theta) = \varphi(R, \theta)$ . Тогда из (1.1) следует, что  $\omega(\theta) = 0$  при  $0 \leq \theta < \delta$  и  $\varepsilon < \theta \leq \pi$ .

Применяя конечное синус-преобразование

$$\varphi_k(r) = \int_0^\pi \varphi(r, \theta) \sin k\theta d\theta, \quad \varphi(r, \theta) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(r) \sin k\theta \quad (1.4)$$

приходим к одномерной краевой задаче

$$\left( r^2 \frac{d^2}{dr^2} + r \frac{d}{dr} - k^2 \right) \varphi_k(r) = 2k^{-1} [(-1)^k - 1] r^2 \quad (0 < r \leq R) \quad (1.5)$$

$$\varphi_k(r) = \omega_k \left( \omega_k = \int_0^\pi \omega(\tau) \sin k\tau d\tau \right)$$

Используя функцию Грина

$$G_k(r, t) = -\frac{1}{2kt} \left[ e^{-k|\ln r/t|} - \left( \frac{rt}{R^2} \right)^k \right]$$

решение краевой задачи (1.5) найдем в виде

$$\varphi_k(r) = \left( \frac{r}{R} \right)^k \omega_k + \frac{2[1 - (-1)^k]}{k(k^2 - 4)} \left[ r^2 - R^2 \left( \frac{r}{R} \right)^k \right]$$

Возвращаясь к оригиналу  $\varphi(r, \theta)$  с помощью второй формулы из (1.4) и суммируя получающиеся при этом ряды, имеем

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta) &= \frac{2}{\pi} \int_{\delta}^{\varepsilon} \sum_{k=1}^{\infty} \omega(\tau) \sin k\tau \sin k\theta \left(\frac{r}{R}\right)^k d\tau + g(r, \theta) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\varepsilon} \omega(\tau) \left[ \frac{\operatorname{sh} \ln R/r}{\operatorname{ch} \ln R/r - \cos(\tau - \theta)} - \frac{\operatorname{sh} \ln R/r}{\operatorname{ch} \ln R/r - \cos(\tau + \theta)} \right] d\tau + g(r, \theta) \\ g(r, \theta) &= 8/\pi \sum_{k=1,3,\dots} \frac{\sin k\theta}{k(k^2 - 4)} \left[ r^2 - R^2 \left(\frac{r}{R}\right)^k \right] \end{aligned} \quad (1.6)$$

Реализуя условие (1.2), приходим к следующему интегро-дифференциальному уравнению:

$$\begin{aligned} \omega(\theta) - \frac{\mu_0}{2\pi R} \int_{\delta}^{\varepsilon} \omega'(\tau) \left[ \operatorname{ctg} \frac{\tau - \theta}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\tau + \theta}{2} \right] d\tau &= f(\theta) \quad (\delta \leq \theta \leq \varepsilon) \\ f(\theta) &= \frac{8R\mu_0}{\pi} \sum_{k=1,3,\dots} \frac{\sin k\theta}{k(k+2)} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Решение уравнения (1.7) ищем в классе функций, имеющих интегрируемую особенность. Анализируя поведение функции  $\omega'(\tau)$  при  $\tau \rightarrow \delta + 0$  и  $\tau \rightarrow \varepsilon - 0$ , получаем, что  $\omega'(\tau) = O([\tau - \delta]^{-1/2})$ ,  $\tau \rightarrow \delta + 0$  и  $\omega'(\tau) = O([\varepsilon - \tau]^{-1/2})$ ,  $\tau \rightarrow \varepsilon - 0$ . Тогда ясно, что  $\omega(\tau) = O([\tau - \delta]^{1/2})$ ,  $\tau \rightarrow \delta + 0$  и  $\omega(\tau) = O([\varepsilon - \tau]^{1/2})$ ,  $\tau \rightarrow \varepsilon - 0$ . Кроме того,  $\omega(\delta - 0) = \omega(\varepsilon + 0) = 0$ . Таким образом, функция  $\omega(\tau)$  непрерывна в точках  $\tau = \delta$  и  $\tau = \varepsilon$  и равна в них нулю. Учитывая это, для решения уравнения (1.7) вводим функцию  $\psi$

$$\omega(\theta) = \int_{\delta}^{\varepsilon} \psi \left( \frac{t - \mu}{\nu} \right) dt = \frac{1}{2} \int_{\delta}^{\varepsilon} \operatorname{sgn}(\theta - t) \psi \left( \frac{t - \mu}{\nu} \right) dt \quad \left( \mu = \frac{\varepsilon + \delta}{2}, \nu = \frac{\varepsilon - \delta}{2} \right) \quad (1.8)$$

и после несложных преобразований запишем уравнение (1.7) в виде

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \psi(y) \left[ \frac{1}{y-x} + k_0(y, x) \right] dy &= f_0(x) R^2 \quad (|x| \leq 1) \\ k_0(y, x) &= \frac{\nu}{2} \left[ \frac{\pi R}{\mu_0} \operatorname{sgn}(y-x) + p \left( \frac{\nu}{2} [y-x] \right) - \operatorname{ctg} \left( \frac{\nu}{2} [y+x] + \mu \right) \right] \\ p(x) &= \begin{cases} \operatorname{ctg} x - 1/x \\ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} B_n}{(2n)!} x^{2n-1}, \quad |x| < \varepsilon_0 \end{cases} \end{aligned}$$

$f_0(x) = -\pi R^{-1}/\mu_0 \cdot f(\nu x + \mu)$ ,  $0 < \varepsilon_0 < \pi$ ,  $B_n$  — числа Бернулли.

Разыскивая функцию  $\psi(y)$  в виде ряда по многочленам Чебышева 1-го рода

$$\psi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n \frac{T_n(y)}{\sqrt{1-y^2}} R^2 \quad (1.9)$$

(так как  $\omega(\varepsilon) = 0$ , то  $\Psi_n = 0$ ) и следуя методу ортогональных многочленов, приходим к бесконечной алгебраической системе относительно коэффициентов  $\Psi_n$

$$\Psi_{m+1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \Psi_n = h_m \quad (1.10)$$

$$a_{mn} = \frac{2}{\pi^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 k_0(y, x) \frac{T_n(y)}{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-x^2} U_m(x) dx dy$$

$$h_m = \frac{2}{\pi^2} \int_{-1}^1 f_0(x) \sqrt{1-x^2} U_m(x) dx$$

( $U_m(x)$  — многочлены Чебышева 2-го рода).

Коэффициенты  $a_{mn}$ ,  $h_m$  легко вычисляются, если воспользоваться квадратурными формулами типа Гаусса

$$a_{mn} \approx \frac{2}{l(l+1)} \sum_{j=1}^l \cos ny_j \sum_{i=1}^l \sin x_i \sin(m+1)x_i k_0(\cos y_j, \cos x_i) \quad (1.11)$$

$$h_m \approx \frac{2}{\pi(l+1)} \sum_{i=1}^l \sin x_i \sin(m+1)x_i f_0(\cos x_i)$$

где  $y_j = (2j-1)\pi/2l$ ,  $x_i = i\pi/(l+1)$ ,  $l$  — число узлов квадратурной формулы.

Квазирегулярность системы (1.10) можно показать, используя приемы работ [4, 8].

Для нахождения жесткости при кручении по формуле

$$C = 2G \int_0^{\pi} \int_0^R \varphi(r, \theta) r dr d\theta \quad (1.12)$$

определим функцию  $\varphi$ , используя (1.9) и (1.8):

$$\omega(vx + \mu) = -v \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Psi_n}{n} \sqrt{1-x^2} U_{n-1}(x)$$

подставляя которую в первое выражение из (1.6), по формуле (1.12) (интегралы по  $r$  и  $\theta$  вычисляются точно, а для вычисления интеграла по  $x$  используются квадратурные формулы типа Гаусса) получаем для жесткости следующее выражение:

$$\frac{C}{G_1 R^4} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} - \frac{8v^2}{l+1} \sum_{k=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Psi_n}{n} \sum_{i=1}^l \sin x_i \sin nx_i \times$$

$$\times \sin k(v \cos x_i + \mu)$$

Перейдем к решению задачи 16. Вводим функции  $\chi_0(r) = \varphi(r, 0)$  и  $\chi_1(r) = \varphi(r, \pi)$ . Из (1.3) имеем  $\chi_0(r) = 0$ ,  $r \in [a_0, b_0]$  и  $\chi_1(r) = 0$ ,  $r \in [a_1, b_1]$ . Следуя схеме, изложенной при решении задачи 1а, получаем для определения введенных функций  $\chi_0, \chi_1$  систему двух интегро-дифференциальных уравнений

$$\chi_i(r) - \frac{\mu_0}{\pi} \left\{ \int_{a_i}^{b_i} \chi'_i(t) \left[ \frac{1}{t-r} - \frac{R^2}{r(rt-R^2)} \right] dt + \right. \\ \left. + \int_{a_{1-i}}^{b_{1-i}} \chi'_{1-i}(t) \left[ \frac{1}{t+r} - \frac{R^2}{r(rt+R^2)} \right] dt = h(r) \quad (a_i \leq r \leq b_i, i=0, 1) \right.$$

$$h(r) = -8\mu_0 R / \pi \sum_{k=1,3,\dots} \frac{1}{k^2-4} (r/R)^{k-1}$$

Как и при рассмотрении задачи 1а, получаем, что функции  $\chi_i(r)$  ( $i=0, 1$ ) в точках  $r = a_i$  и  $r = b_i$  непрерывны и  $\chi_i(a_i) = \chi_i(b_i) = 0$ . В частных случаях, когда  $a_0 = a_1 > 0$ ,  $b_0 = b_1$  или  $a_1 = b_1 = 0$  (либо  $a_0 = b_0 = 0$ ), получаем относительно функции  $\chi(r) = \chi_0(r) = \chi_1(r)$  одно интегро-дифференциальное уравнение, которое решается так же, как и в случае задачи 1а. Если же  $a_0 = a_1 = 0$ ,  $b_0 = b_1 = b$ , то для определения  $\chi(r)$  имеем уравнение

$$\chi(r) - \frac{\mu_0}{\pi} \int_0^b \chi'(t) \left[ \frac{1}{t-r} + \frac{1}{t+r} - \frac{2tR^2}{t^2r^2 - R^4} \right] dt = h(r) \quad (0 \leq r \leq b) \quad (1.13)$$

которое в силу того, что ядро имеет в нуле неподвижную особенность, решается иначе.

Учитывая, что  $\chi(b) = 0$  и обозначая  $\chi(0) = A$ , вводим функцию

$$\chi(r) = A + \int_0^r \psi \left( \frac{t^2}{b^2} \right) dt = \frac{A}{2} + \frac{1}{2} \int_0^b \operatorname{sgn}(r-t) \psi \left( \frac{t^2}{b^2} \right) dt \quad (1.14)$$

После замены переменных  $r^2 = b^2 \rho$ ,  $t^2 = b^2 \tau$  из (1.13) приходим к следующему интегральному уравнению:

$$\int_0^1 \psi(\tau) \left[ \frac{1}{\tau-\rho} + \frac{\mu \operatorname{sgn}(\tau-\rho)}{\sqrt{\tau}} - \frac{c}{\tau\rho - c^2} \right] d\tau = R[h_0(\rho) + 2\mu A^*] \quad (0 \leq \rho \leq 1)$$

Здесь

$$\mu = \frac{\pi b}{4\mu_0}, \quad c = \left( \frac{R}{b} \right)^2, \quad A^* = \frac{A}{Rb}, \quad h_0(\rho) = 8 \sum_{k=1,3,\dots} \frac{1}{k^2-4} \left( \frac{\rho}{c} \right)^{(k-1)/2}$$

Анализ интегралов типа Коши показывает, что  $\psi(\tau) = O(\tau^{1/2})$ ,  $\tau \rightarrow +0$  и  $\psi(\tau) = O([1-\tau]^{-1/2})$ ,  $\tau \rightarrow 1-0$ . Поэтому ищем функцию  $\psi(\tau)$  в виде разложения

$$\psi(\tau) = R \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n q_n^{1/2, -1/2}(\tau) \quad (1.15)$$

$$q_n^{s, \beta}(\tau) = \tau^s (1-\tau)^\beta P_n^{(s, \beta)}(1-2\tau) \quad (1.16)$$

$P_n^{(s, \beta)}(x)$  — многочлены Якоби.

Полагая  $\Psi_n = \Psi_n^0 + 2\mu A^* \Psi_n^1$  ( $n = 0, 1, \dots$ ), для определения коэффициентов  $\Psi_n^0, \Psi_n^1$  получаем бесконечные системы

$$\Psi'_m + \sum_{n=0}^{\infty} (s_{mn} + a_{mn}) \Psi'_n = h'_m \quad (m = 0, 1, \dots; i = 0, 1) \quad (1.17)$$

$$s_{mn} = \frac{\mu}{\pi \rho_m} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\operatorname{sgn}(\tau - \rho)}{|\tau - \rho|} q_n^{1/2, -1/2}(\tau) q_m^{-1/2, 1/2}(\rho) d\tau d\rho \quad (1.18)$$

$$a_{mn} = -\frac{c}{\pi \rho_m} \int_0^1 \int_0^1 \frac{q_n^{1/2, -1/2}(\tau) q_m^{-1/2, 1/2}(\rho)}{\tau\rho - c^2} d\tau d\rho$$

$$h_m^0 = \frac{1}{\pi \rho_m} \int_0^1 h_0(\rho) q_m^{-1/2, 1/2}(\rho) d\rho, \quad h_m^1 = \frac{\delta_{m0}}{\pi}, \quad \rho_m = \frac{1}{2} \left[ \frac{\Gamma(m+1/2)}{m!} \right]^2$$

Из условия  $\chi(b) = 0$  находим  $A^*$

$$A^* = -\frac{\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \Psi_n^0}{1 + 2\mu \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \Psi_n^1}, \quad \lambda_n = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{n! (2n+1)}$$

Интегралы в (1.18) вычисляются с помощью метода, изложенного в [3]

$$s_{mn} = \frac{2\mu\lambda_n}{\pi} \left[ \frac{(-1)^{n+m+1} (2n+1)}{\pi c_{l,m} (n+m+3/2)(n+m+1/2)(n-m+1/2)(n-m-1/2)} - \delta_{m0} \right]$$

$$a_{mn} = \frac{(-1)^{n+m+1} (2n+1) \lambda_n}{\pi c_{l,m}} \times$$

$$\times \sum_{j=\max\{m, n\}}^{\infty} \frac{\Gamma(j+3/2)\Gamma(j+1/2)(j!)^2 c^{-2j}}{(j-n)!(j-m)!(j+n+1)!(j+m+1)!}$$

$$h_m^0 = \frac{4(-1)^m}{\pi^{3/2} \lambda_m} \sum_{j=m}^{\infty} \frac{\Gamma(j-1/2)j! c^{-j}}{(2j+3)(j-m)!(j+m+1)!}$$

Устанавливая, что для  $m = 1, 2, \dots$

$$\sigma_m = \sum_{n=0}^{\infty} |s_{mn}| \leq \frac{\mu}{\pi^2 \lambda_m (m^2 - 1/4)^2}, \quad \sigma_m < \sigma_0 \leq \frac{\mu}{\pi^2} [16 + \pi^2]$$

$$\alpha_m = \sum_{n=0}^{\infty} |a_{mn}| \leq \frac{3\sqrt{\pi} \Gamma(m + 3/2)}{8m(m+1)! c^2}, \quad \alpha_m < \alpha_0 \leq \frac{3\pi}{8c^2}$$

получаем квазирегулярность систем (1.17), а при выполнении условия

$$\mu \left(1 + \frac{16}{\pi^2}\right) + \frac{3\pi}{8c^2} < 1$$

их регулярность.

Используя спектральное соотношение

$$\int_0^1 \operatorname{sgn}(\tau - \rho) \frac{P_n^{1/2, -1/2}(1 - 2\tau)}{\sqrt{1 - \tau}} d\tau = \frac{2\sqrt{1 - \rho}}{n + 1/2} P_n^{-1/2, 1/2}(1 - 2\rho) - 2\delta_n$$

$$(0 \leq \rho \leq 1)$$

при подстановке разложения (1.15) в (1.14), получаем выражение для функции  $\chi$

$$\chi(b\sqrt{\rho}) = -Rb \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Psi_n}{2n + 1} \sqrt{1 - \rho} P_n^{-1/2, 1/2}(1 - 2\rho)$$

с помощью которого находим жесткость при кручении

$$\begin{aligned} \frac{C}{G_1 R^4} &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(1/2 + n)}{n!} \times \\ &\times \Psi_n \sum_{i=n}^{\infty} \frac{\Gamma(i - 1/2) i! c^{-i-1}}{(i - n)! (i + n + 1)! (2i + 3)} \end{aligned}$$

В результате численной реализации (значения величин, для которых проведена численная реализация, вынесены на фигурах) показано, что жесткость стержня достигает максимума, если подкрепление расположить в месте, где максимальны касательные напряжения в основном материале, то есть в центре прямолинейной грани (фиг. 2). Менее эффективно подкрепление дугового участка боковой поверхности, причем для длины подкрепления  $l > R$  подкрепление боковой поверхности вообще неэффективно (фиг. 2). Также установлено, что в случае подкрепления стержней как прямолинейной грани, так и боковой поверхности подкреплениями небольших длин  $l \leq R/3$  изменения жесткости стержней находятся в пределах 10% (фиг. 1).

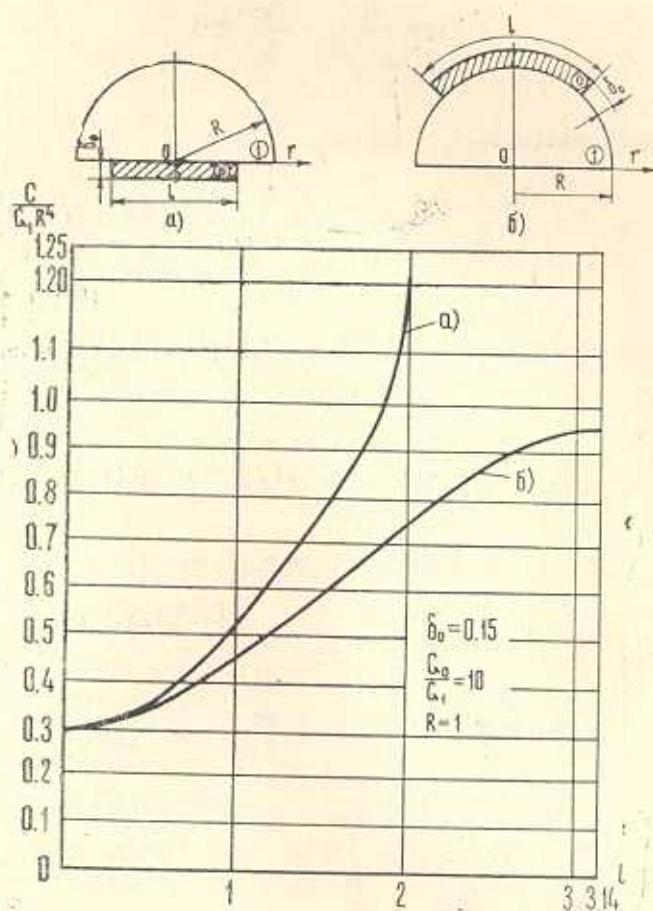
§ 2. Рассмотрим задачу 2 в предположении, что на участках  $(a_j \leq r \leq b_j, z = c_j, j = 1, 2, \dots, k)$  имеется  $k$  — кольцевых трещин

(фиг. 3). Задача эквивалентна определению функции  $u = u(r, z)$  (перемещение в тангенциальном направлении), удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (0 \leq r \leq R, -\infty < z < \infty) \quad (2.1)$$

краевому условию

$$\left[ \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right]_{r=R} = 0 \quad (-\infty < z < \infty) \quad (2.2)$$



Фиг. 2.

и  $2k$  условиям на трещинах

$$\frac{\partial u}{\partial z}(r, c_j) = -\frac{2Mr}{\pi GR^2} \quad (a_j \leq r \leq b_j) \quad (2.3)$$

$$u(r, c_j - 0) - u(r, c_j + 0) = \gamma_j(r) \quad (0 \leq r \leq R) \quad (2.4)$$

$$\gamma_j(r) = 0, \quad r \in (a_j, b_j) \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

( $\tau_{r\theta} = G(\partial u/\partial r - u/r)$ ,  $\tau_{\theta z} = G \partial u/\partial z$ ,  $G$  — модуль сдвига).



Применяя к (2.1), (2.2) по схеме работы [7] преобразование Фурье

$$u_\lambda(r) = \int_{-\infty}^{\infty} u(r, z) e^{i\lambda z} dz, \quad u(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_\lambda(r) e^{-i\lambda z} d\lambda \quad (2.5)$$

учитывая условия (2.4), приходим к одномерной краевой задаче

$$\frac{d^2 u_\lambda(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_\lambda(r)}{dr} - \frac{1}{r^2} u_\lambda(r) - \lambda^2 u_\lambda(r) = i\lambda \sum_{n=1}^k \gamma_n(r) e^{i\lambda c_n}$$

$$\left. \frac{du_\lambda(r)}{dr} \right|_{r=R} = \left. \frac{u_\lambda(r)}{r} \right|_{r=R} \quad (0 \leq r \leq R)$$

решая которую с помощью функции Грина

$$G_\lambda(r, \xi) = - \int_0^\infty \frac{t \xi}{\lambda^2 + t^2} J_1(tr) J_1(t\xi) dt - \frac{K_2(\lambda R)}{I_2(\lambda R)} \xi I_1(\lambda \xi) I_1(\lambda r)$$

( $J_n(z)$  — функции Бесселя,  $I_n(z)$  и  $K_n(z)$  — модифицированные функции Бесселя), переходя к функции  $u(r, z)$  и реализуя условия (2.3), получаем окончательно следующую систему интегральных уравнений:

$$\sum_{n=1}^k \frac{d}{dr} \int_{a_j}^{b_j} \xi \gamma_n(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} k_{n,j}(r, \xi) d\xi =$$

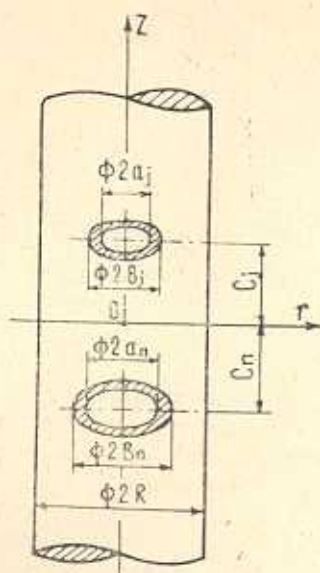
$$= f(r) \quad (a_j \leq r \leq b_j, j = 1, 2, \dots, k)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r \partial \xi} k_{n,j}(r, \xi) = \int_0^\infty \lambda^2 J_1(\lambda \xi) \times$$

$$\times J_1(\lambda r) e^{-\lambda |c_n - c_j|} d\lambda -$$

$$- \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{K_2(\lambda R)}{I_2(\lambda R)} I_1(\lambda \xi) I_1(\lambda r) \lambda^2 \cos \lambda (c_n - c_j) d\lambda$$

$$f(r) = -4Mr(\pi GR^4)^{-1}$$



Фиг. 3.

В случае одной монетообразной трещины ( $k = 1, a_1 = 0, b_1 = b, c_1 = 0, \gamma_1 = \gamma$ ) имеем интегральное уравнение

$$\frac{d}{dr} \int_0^b \xi \gamma(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} [W_{00}^{(0)}(r, \xi) + R(r, \xi)] d\xi = f(r) \quad (0 \leq r \leq b) \quad (2.6)$$

$W_{\mu\lambda}^{(1)}(r, \xi)$  — разрывный интеграл Вебера-Сониана

$$W_{\mu,\lambda}^{(1)}(r, \xi) = \int_0^{\infty} t^{\mu} J_{\mu}(tr) J_{\lambda}(t\xi) dt$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r \partial \xi} R(r, \xi) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{K_2(iR)}{I_2(iR)} I_1(i\xi) I_1(ir) i^2 dt$$

В случае двух трещин радиуса  $b$ , расположенных на расстоянии  $2c$  друг от друга ( $k=2$ ,  $a_1=a_2=0$ ,  $b_1=b_2=b$ ,  $c_1=c$ ,  $c_2=-c$ ,  $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ ) получаем уравнение

$$\frac{d}{dr} \int_0^b \xi \lambda(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} [W_{00}^{(0)}(r, \xi) + R^*(r, \xi)] d\xi = f(r) \quad (0 \leq r \leq b)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r \partial \xi} R^*(r, \xi) = \int_0^{\infty} \lambda^2 J_1(\lambda \xi) J_1(\lambda r) e^{-2\lambda c} d\lambda -$$

$$- \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{K_2(iR)}{I_2(iR)} I_0(\lambda \xi) I_1(\lambda r) i^2 \cos^2 \lambda c d\lambda$$
(2.7)

Согласно спектральному соотношению

$$\frac{d}{dy} \int_0^1 \gamma^2 \sqrt{1-\gamma^2} P_n^{1,1/2}(1-2\gamma^2) \frac{\partial}{\partial \gamma} W_{00}^{(0)}(y, \gamma) d\gamma =$$

$$= \pi(n+1)(2n+3) \left[ \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \right]^2 y P_n^{1,1/2}(1-2y^2)$$
(2.8)

решение уравнений (2.6), (2.7) ищем в виде

$$\lambda(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n \frac{\xi}{b} \sqrt{b^2 - \xi^2} P_n^{1,1/2} \left( 1 - 2 \frac{\xi^2}{b^2} \right)$$
(2.9)

Соотношение (2.8) устанавливается следующим образом. Интегрируя по частям левую часть равенства

$$\int_0^1 W_{00}^{(0)}(y, \gamma) \frac{\gamma P_{2n}(\sqrt{1-\gamma^2})}{\sqrt{1-\gamma^2}} d\gamma = \frac{\pi}{4} \left[ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 P_{2n}(\sqrt{1-y^2})$$

( $P_n(z)$  — многочлены Лежандра), учитывая значение интеграла

$$\int_0^y \frac{\gamma P_{2n}(\sqrt{1-\gamma^2})}{\sqrt{1-\gamma^2}} d\gamma = \frac{y^2 \sqrt{1-y^2}}{2n} P_{2n-1}^{1,1/2}(1-2y^2)$$

получаем соотношение

$$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial \eta} W_{00}^{(0)}(y, \eta) \eta^2 \sqrt{1-\eta^2} P_{n-1}^{1,1/2}(1-2\eta^2) d\eta =$$

$$= -\frac{\pi n}{2} \left[ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 P_{2n}(\sqrt{1-y^2})$$

дифференцируя обе части которого с учетом

$$\frac{d}{dy} P_{2n}(\sqrt{1-y^2}) = -(2n+1) y P_{n-1}^{1,1/2}(1-2y^2)$$

приходим к (2.8).

Подставляя (2.9) последовательно в уравнения (2.6) и (2.7), следуя методу ортогональных многочленов, приходим к бесконечной алгебраической системе, имеющей вид в первом случае

$$\lambda_m X_m + \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}^{(0)} X_n = f_m \quad (m = 0, 1, \dots)$$

и во втором

$$\lambda_m X_m + \sum_{n=0}^{\infty} (a_{mn}^{(2)} + b_{mn}) X_n = f_m \quad (m = 0, 1, \dots)$$

$$\lambda_m = \frac{2\pi(m+1)^2}{4m+5} \left[ \frac{(2m+1)!!}{(2m+2)!!} \right]^2, \quad f_m = -\frac{8Ma\delta_{m0}}{15\pi R^4 G}$$

$$a_{mn}^{(j)} = \frac{(2n+1)(2m+1)(2n-1)!!(2m-1)!!}{(-1)^{m+n-1} m! n! 2^{m+n}} \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \frac{I_{2n+5/2}(ib) I_{2m+5/2}(ib) K_2(iR)}{I_2(iR)} \cos^j icd \lambda$$

$$b_{mn} = \frac{\sqrt{\pi} (2n-1)!! (2m-1)!! (2m+1) (2n+1)}{2^{m+n+2} m! n!} \times$$

$$\times \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k (m+n+k+2)! \rho^{m+n+k+5/2}}{k! \Gamma(2n+k+7/2) \Gamma(1/2-n+m-k)} \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m+n+k+j+5/2) \Gamma(1/2-n+m-k+j)}{j! \Gamma(2m+j+7/2) \rho^{-j}}, \quad \rho = \frac{1}{1+4(c/b)^2}$$

Для этих систем можно доказать квазирегулярность [4, 8].

Наибольший интерес представляет коэффициент интенсивности напряжений

$$K_{III} = \sqrt{2} \lim_{r \rightarrow b+0} \sqrt{r-b} \tau_{\theta z}(r, 0) \quad (2.10)$$

который определим для случая одной трещины (он вычисляется аналогично, когда имеется  $k \geq 2$  трещины). Запишем выражение для  $\tau_{\theta z}$  при  $z=0$

$$\tau_{\theta z} = \frac{G}{2} \left\{ \frac{d}{dr} \int_0^b \xi \chi(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} [W_{00}^{(0)}(r, \xi) + R(r, \xi)] d\xi - f(r) \right\} \quad (2.11)$$

которое при  $r \rightarrow b+0$  можно представить в виде

$$\tau_{\theta z} = \frac{G}{2} \frac{d}{dr} \int_0^b \xi \chi(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} W_{00}^{(0)}(r, \xi) d\xi + \Omega_0(r) \quad (2.12)$$

где  $\Omega_i(r)$  ( $i=0, 1, \dots, 4$ ) ограничены при  $r \rightarrow b+0$ . Учитывая, что для  $W_{00}^{(0)}(r, \xi)$  при  $\xi \rightarrow r \neq 0$  справедливо следующее представление:

$$W_{00}^{(0)}(r, \xi) = \frac{1}{\pi \sqrt{r\xi}} \ln |\xi - r| + \Phi_0(r, \xi)$$

( $\Phi_0(r, \xi)$  ограничена при  $\xi \rightarrow r \neq 0$ ), из (2.12) имеем при  $r \rightarrow b+0$

$$\tau_{\theta z} = \frac{G}{2\pi} \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \int_0^b \xi \chi(\xi) \frac{d\xi}{\xi - r} + \Omega_1(r)$$

откуда с учетом (2.9) получаем при  $r \rightarrow b+0$

$$\tau_{\theta z} = \frac{G}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} X_n \frac{d}{dr} \frac{1}{r} s_n(r) + \Omega_2(r) \quad (2.13)$$

где

$$s_n(b \sqrt{t}) = b^2 \int_0^1 \frac{q_n^{2, \beta}(\tau) d\tau}{\tau - t}$$

( $q_n^{2, \beta}(\tau)$  определяются формулой (1.16)).

Принимая во внимание представление, получающееся из формулы 15.3 (9) из [2] при  $t \rightarrow 1+0$

$$\int_0^1 \frac{q_n^{2, \beta}(\tau) d\tau}{\tau - t} = \frac{\pi}{\sin \pi \beta} t^n (t-1)^{\beta} P_{n-3}^{2, \beta}(1-2t) + \Phi_1(t)$$

( $\Phi_1(t)$  ограничена при  $t \rightarrow 1+0$ ), имеем при  $r \rightarrow b+0$

$$\frac{d}{dr} \frac{1}{r} s_n(r) = \frac{1}{\sqrt{r-b}} \frac{(-1)^n \Gamma(n+3/2)}{n!} \sqrt{2\pi b} + \Omega_2(r)$$

Подставляя последнее выражение в (2.13), получаем, что при  $r \rightarrow b+0$  при  $\tau_{\theta z}(r, 0)$  имеет место представление

$$\tau_{\theta z} = G \sqrt{\frac{b}{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(n+3/2)}{n!} X_n \frac{1}{\sqrt{r-b}} + \Omega_4(r)$$

откуда, учитывая (2.10), находим

$$K_{III} = G \sqrt{\frac{b}{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(n+3/2)}{n!} X_n$$

Для одной трещины при  $b \leq 0,6 R$  получаем следующее приближенное выражение для коэффициента интенсивности напряжений  $\tau_{\theta z}$ , которое согласуется с результатом работы [9]

$$K_{III} \sim \frac{8}{3} \pi^{-2} M b^{3/2} R^{-4}$$

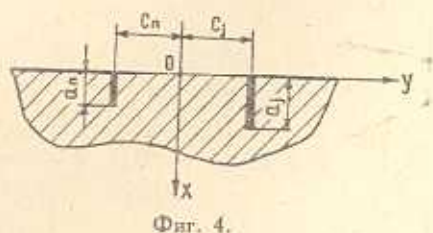
В случае двух трещин радиуса  $b$ , расположенных на расстоянии  $2c$  друг от друга, обнаружено, что при  $\lambda = b/c = 10$ ,  $K_{III}^{(1)}/K_{III}^{(2)} = 1.32$  ( $K_{III}^{(1)}$ ,  $K_{III}^{(2)}$  — коэффициенты интенсивности напряжений для одной из двух трещин соответственно), то есть наблюдается эффект понижения коэффициента интенсивности напряжений при сближении трещин. Этот факт для трещин продольного сдвига был впервые отмечен Смитом [10], а затем для трещин нормального разрыва в работе [5].

§ 3. Задача 2 при  $b_j = R$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ), когда кольцевые трещины неглубокие ( $a_j/R \geq 0.85$ ), эквивалентна антиплоской задаче теории упругости для ослабленной  $k$ -полосовыми трещинами ( $0 \leq x < a_j$ ,  $y = c_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ ) полуплоскости ( $0 \leq x < \infty$ ,  $-\infty < y < \infty$ ), к берегам трещин которой приложена сдвигающая нагрузка, равномерно распределенная вдоль оси  $z$  (фиг. 4). В такой постановке для случая одной трещины задача рассмотрена в [6]. Здесь же иным способом решается более общая (для  $k$ -трещин) задача, которая сводится к следующей краевой задаче:

$$\Delta W = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) W = 0 \quad (3.1)$$

$$(0 \leq x < \infty, -\infty < y < \infty)$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (-\infty < y < \infty) \quad (3.2)$$



( $\tau_{xz} = G(\partial W/\partial x)$ ,  $\tau_{yz} = G(\partial W/\partial y)$ ,  $G$  — модуль сдвига) с выполнением условий на трещинах

$$\frac{\partial W}{\partial y} \Big|_{y=c_j} = -\frac{2M}{\pi G R^2} \quad (0 \leq x \leq a_j) \quad (3.3)$$

$$W(x, c_j - 0) - W(x, c_j + 0) = \chi_j(x) \quad (3.4)$$

$$(\chi_j(x) = 0, x \geq a_j, j = 1, 2, \dots, k)$$

Применяя интегральное преобразование (2.5) по схеме [7] к (3.1), (3.2) и учитывая условия (3.4), обозначая при этом

$$W_\lambda(x) = \int_{-\infty}^{\infty} W(x, y) e^{i\lambda y} dy$$

приходим к краевой задаче

$$\frac{d^2 W_\lambda(x)}{dx^2} - \lambda^2 W_\lambda(x) = i\lambda \sum_{n=1}^k l_n(x) e^{i\lambda c_n}$$

$$\left. \frac{dW_\lambda(x)}{dx} \right|_{x=0} = 0, \quad W_\lambda(x)|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow 0$$

решая которую с помощью функции Грина

$$G_\lambda(x, \eta) = -\frac{1}{2|\lambda|} [e^{-|\lambda|(x-\eta)} + e^{-|\lambda|(x+\eta)}]$$

так же, как и в задаче 2, получаем следующую систему интегральных уравнений:

$$\sum_{n=1}^k \int_0^{a_n} \chi'_n(\eta) [l_{n,j}(\eta-x) + l_{n,j}(\eta+x)] d\eta = f_0 \quad (0 \leq x \leq a_j)$$

$$l_{n,j}(y) = \frac{y}{y^2 + (c_n - c_j)^2} \quad (1 \leq j, n \leq k), \quad f_0 = \frac{4M}{GK^3}$$

(производные функций  $\chi_n(\eta)$  появились за счет интегрирования по частям).

В случае двух одинаковых трещин ( $a_1 = a_2 = a$ ), расположенных на расстоянии  $2c$  друг от друга ( $c_1 = c, c_2 = -c$ ), имеем уравнение ( $\chi_1 = \chi_2 = \chi$ )

$$\int_{-a}^a \chi'(\eta) \left[ \frac{1}{\eta-x} + \frac{\eta-x}{(\eta-x)^2 + 4c^2} \right] d\eta = f_0 \quad (0 \leq x \leq a) \quad (3.5)$$

Здесь функция  $\chi'(\eta)$  нечетным образом продолжена на отрицательные значения аргумента. Вводя функцию  $\psi(\eta/a) = \chi'(\eta)$ , получаем уравнение ( $\rho = c/a$ )

$$\int_{-1}^1 \psi(\tau) \left[ \frac{1}{\tau-t} + \frac{\tau-t}{(\tau-t)^2 + 4\rho^2} \right] d\tau = f_0 \quad (|t| \leq 1)$$

решение которого с учетом того, что  $\psi(\tau) = -\psi(-\tau)$ , ищется в виде

$$\psi(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n \frac{T_{2n+1}(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}$$

Для определения  $\Psi_n$  приходим к квазирегулярной бесконечной системе (аналогичной (1.10))

$$\Psi_n + \sum_{m=0}^{\infty} a_{mn} \Psi_m = h_m \quad m = 0, 1, \dots$$

$$a_{mn} = \frac{2}{\pi^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{T_{2m-1}(\tau) \sqrt{1-t^2} U_{2n}(t) (\tau-t)}{(1-\tau^2)^2 + 4\rho^2} d\tau dt$$

$$h_m = 2f_0 \delta_{m0} / \pi^2$$

Для  $a_{mn}$  получаются формулы, аналогичные (1.11).

Коэффициент интенсивности напряжений  $\tau_{y_2}$  определяется по схеме, изложенной при решении задачи 2, только вместо формулы (2.11) следует воспользоваться выражением

$$\tau_{y_2}(x, c) = -\frac{G}{2\pi} \left\{ \int_{-a}^a \gamma'(\eta) \left[ \frac{1}{\eta-x} + \frac{\eta-x}{(\eta-x)^2 + 4c^2} \right] d\eta - f_0 \right\}$$

и окончательно имеем

$$K_{III} = \frac{G}{2} \sqrt{a} \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n$$

Таблица 1

$\lambda = a/c$	0.50	1.0	2.0	3.0
$K_{III}^{(1)}/K_{III}^{(2)}$	1.03	1.10	1.24	1.35

Как и для внутренних трещин, рассмотрен случай сближения двух трещин ( $c \rightarrow 0$ ). Результаты вычислений сведены в таблицу, из которой видно, что при сближении трещин коэффициент интенсивности напряжений также уменьшается, причем взаимное влияние трещин друг на друга проявляется в большей степени, когда трещины выходят на границу, по сравнению с внутренними дискообразными трещинами.

В заключение авторы приносят глубокую благодарность Н. Х. Арутюняну за постановку задач.

Одесский государственный университет  
им. И. И. Мечникова

Одесский политехнический институт

Поступила 10 X 1980

ՅօՒ. Ա. ԱՆՏՊՈՎ, Ա. Յ. ԳԱՇՉԵՆԿՈՎ, Գ. Յա. ՊՈՊՈՎ

ՀԱՔԵՐԻ ԵՎ ԲԱՐԱԿ ԱՄՐԱՅՈՒՄՆԵՐԻ ԱՌԿԱՅՈՒԹՅԱՆ ԳԵՊԷՌՈՒՄ  
ՉՈՂԵՐԻ ՈՐՈՐՄԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ ֆ ո ֆ ո Վ

Սըլխատանքը նվիրված է բարակ ծածկույթներով ուժեղացված կիսապլոթ լայնական կտրվածքով առաձգական ձողերի և լայնական օղակաձև ճաթեր ունեցող զրանային լիստոների սրբաման խնդիրներին:

Ուժեղացված ձողերի ուղղման խնդրի համար ստացվել են ուղղման կոշտության համար տարակցություններ՝ կախված ամրացման երկաթությունից և դիրքից, իսկ ճաքերով գլանային լիսեռների ուղղման խնդրի համար որոշվել են լարումների ինտենսիվության գործակիցները կախված ճաքերի քանակից և դիրքից:

Բերված խնդիրների համար տրվում են թվային օրինակներ:

## ON SOME PROBLEMS OF ROD TWISTING AT THE PRESENCE OF CRACKS AND THIN PROPS

J. A. ANTIPOV, A. F. DASCHENKO, G. J. POPOV

### S u m m a r y

This paper deals with the problems of twisting elastic rods with semi-circular cross-sections strengthened with thin reinforced coverings and circular cylindrical shafts with transversal annular cracks. For problems with reinforcement, rigidity relationships are given; twisting depending on the position and length of reinforcement and problems concerning crack relationships of tension coefficients at the edges of cracks depending on the position and quantity of cracks are indicated.

A numerical solution is given for all problems discussed in the paper.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. А. Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963, 686 с.
2. Бейтман Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. т. 2, М.: «Наука», 1970, 328 с.
3. Марицев О. И. Метод вычисления интегралов от специальных функций. Минск: «Наука и техника», 1978, 311 с.
4. Морарь Г. А., Попов Г. Я. К контактной задаче для полуплоскости с упругим конечным креплением.— ПММ, 1970, т. 34, в. 3, с. 412—421.
5. Пенасюк В. В., Саврух М. П., Дацышин А. П. Распределение напряжений около трещины в пластинках и оболочках. Киев: Изд-во «Наукова думка», 1976, 443 с.
6. Партон В. Э., Морозов Е. М. Механика упруго-пластического разрушения. М.: Физматгиз, 1974, 416 с.
7. Попов Г. Я. Об одном способе решения задач механики для области с разрезами и тонкими включениями.— ПММ, 1978, т. 42, в. 1, с. 122—135.
8. Попов Г. Я. О методе ортогональных многочленов в контактных задачах теории упругости.— ПММ, 1969, т. 33, в. 3, с. 518—531.
9. Сид Дж., Эмбли Дж. Мгновенное приложение крутящего момента к дискообразной трещине.— Прикл. механика, изд-во «Мир», 1972, № 2, с. 76—81.
10. Smith E. The extension of two parallel non-coplanar cracks by an applied stress.— Int. J. Eng. Sci., 1971, 9, 7, с. 631—638.