ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXV, № 2, 1982 Механика

А. В. БЕЛОКОНЬ, Е. П. МАЛИКОВ

МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО ЦИЛИНДРА

Осесимметричная деформация трансверсально-изотропного цилиндра конечной длины при заданных на всей поверхности напряжениях изучалась в работе [1], где поставленная краевая задача известным способом [2] сводилась к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. В настоящей статье метод интегральных уравнений, предложенный в работе [3] для изотропного тела, обобщен на краевые задачи для трансверсально-изотропного цилиндра с произвольными граничными условиями. Получающиеся здесь системы интегральных уравнений решаются методом Бубнова-Галеркина с учетом особенности решения рассматриваемой краевой задачи. Излагается способ определения этой особенности из систем интегральных уравнений. Приведенные численные результаты для конкретной краевой задачи об изгибе жестко заделанного по боковой поверхности цилиндра иллюстрируют эффективность предлагаемого метода.

§ 1. Рассмотрим прямой круговой цилиндр высотой $2h$ и радиусом a из трансверсально-изотропного материала. Примем ось симметрии цилиндра за ось Z цилиндрической системы координат, а начало координат поместим в центре цилиндра. Уравнения обобщенного закона Гука имеют вид:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{11} = c_{11}\varepsilon_{11} + c_{12}\varepsilon_{22} + c_{13}\varepsilon_{33}, \quad \sigma_{13} = 2c_{44}\varepsilon_{13}\\
&\sigma_{22} = c_{12}\varepsilon_{11} + c_{11}\varepsilon_{22} + c_{13}\varepsilon_{33} \qquad (1.1)\\
&\sigma_{33} = c_{13}\varepsilon_{11} + c_{13}\varepsilon_{22} + c_{33}\varepsilon_{33}
\end{aligned}$$

где индексы 1, 2, 3 соответствуют цилиндрическим координатам r, Θ, Z.

В дальнейшем будем использовать следующие безразмерные величины:

$$\rho = r/a, \quad \zeta = Z/a, \quad \zeta_0 = h/a$$

$$a_{ij} = c_{ij}/c_{11}, \quad v_i = u_i/a, \quad \tau_{ij} = \sigma_{ij}/c_{11}$$

Используя формулы (1.1) и уравнения равновесия сплошного тела, обычным образом получим систему дифференциальных уравнений в перемещениях. Ее общее решение будем отыскивать через две функции $f_1(\rho, \zeta)$ и $f_2(\rho, \zeta)$, которые введем так:

$$v_1 = \partial f_1/\partial\rho, \quad v_3 = \partial f_2/\partial\zeta \qquad (1.2)$$

В этом случае $f_i(\rho, \zeta)$ определяются из системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\partial/\partial\rho\,[\Delta_0 f_1 + a_{44}\partial^2 f_1/\partial\zeta^2 + (a_{13} + a_{44})\,\partial^2 f_2/\partial\zeta^2] = 0 \\ &\partial/\partial\zeta\,[a_{44}\Delta_0 f_2 + (a_{13} + a_{44})\,\Delta_0 f_1 + a_{33}\partial^2 f_2/\partial\zeta^2] = 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

где $\Delta_0 = \partial^2/\partial\rho^2 + 1/\rho\,\partial/\partial\rho$.

Здесь нужно отметить, что при решении задачи можно было бы воспользоваться известными представлениями общего решения системы дифференциальных уравнений статики либо через одну функцию, удовлетворяющую уравнению четвертого порядка [7], либо через две функции, удовлетворяющие уравнениям второго порядка [10]. Авторами использовались представления (1.2) лишь по той причине, что они оказались удобными и при решении динамических задач [5].

По существу, подход к построению общего решения, используемый в данной работе, тесно смыкается с методом суперпозиции, берущим свое начало с идеи, высказанной еще Ламе в лекциях по теории упругости, и получившим свое дальнейшее развитие в работах Б. Л. Абрамяна [2], А. А. Баблояна [1], Г. М. Валова [8], В. Т. Гринченко [9] и др.

Здесь дадим несколько иную трактовку этого подхода. Основой для дальнейших рассуждений служит следующая л е м м а:

Пусть функция $\varphi(\rho, \zeta)$ такова, что в области $W = \{0 \leqslant \rho \leqslant 1; -\zeta_0 \leqslant \zeta \leqslant \zeta_0\}$ она может быть разложена в двойной ряд по полным ортогональным системам функций $P_{1k}(\rho)$ и $P_{2k}(\zeta)$. Тогда в этой области функция $\varphi(\rho, \zeta)$ представима, и причем единственным образом, в виде

$$\varphi(\rho, \zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} l_{1k}(\zeta)\,P_{1k}(\rho) + \sum_{k=0}^{\infty} l_{2k}(\rho)\,P_{2k}(\zeta) \tag{1.4}$$

где произвольно заданы либо функции $l_{1k}(\zeta)$, либо $l_{2k}(\rho)$.

На доказательстве леммы, вследствие его простоты, останавливаться не будем.

Сформулированная лемма позволяет искать решение системы (1.3) в виде

$$\begin{aligned} f_1(\rho, \zeta) &= \sum_{k=1}^{\infty} l_{1k}(\zeta)\,J_0(\nu_k\rho) + \sum_{k=1}^{\infty} l_{2k}(\rho)\cos\alpha_k(\zeta - \zeta_0) + l_{10}(\zeta) + l_{20}(\rho) \\ f_2(\rho, \zeta) &= \sum_{k=1}^{\infty} m_{1k}(\zeta)\,J_0(\nu_k\rho) + \sum_{k=1}^{\infty} m_{2k}(\rho)\cos\alpha_k(\zeta - \zeta_0) + m_{10}(\zeta) + m_{20}(\rho) \end{aligned} \tag{1.5}$$

где функции l_{ik}, m_{ik} — пока произвольные; ν_k таковы, что $J_1(\nu_k) = 0$; α_k для случая антисимметричного деформирования цилиндра имеют вид: $\alpha_k = \pi(2k - 1)/(2\zeta_0)$.

Подставляя теперь функции $f_1(\rho, \zeta)$ и $f_2(\rho, \zeta)$ в виде (1.5) в уравнения системы (1.3), получим

$$-\sum_{k=1}^{\infty}[a_{44}l_{1k}''(\zeta)-\nu_k^2 l_{1k}(\zeta)+(a_{13}+a_{44})m_{1k}'(\zeta)]\nu_k J_1(\nu_k\rho)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\partial/\partial\rho[\Delta_0 l_{2k}(\rho)-a_{44}\alpha_k^2 l_{2k}(\rho)-(a_{13}+a_{44})\alpha_k^2 m_{2k}(\rho)]\cos\alpha_k(\zeta-\zeta_0)+ \quad (1.6)$$

$$+\Delta_0 l_{20}'(\rho)=0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\partial/\partial\zeta[a_{33}m_{1k}''(\zeta)-a_{44}\nu_k^2 m_{1k}(\zeta)-(a_{13}+a_{44})\nu_k^2 l_{1k}(\zeta)]J_0(\nu_k\rho)-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}[a_{44}\Delta_0 m_{2k}(\rho)-a_{33}\alpha_k^2 m_{2k}(\rho)+ \quad (1.7)$$

$$+(a_{13}+a_{44})\Delta_0 l_{2k}(\rho)]\alpha_k\sin\alpha_k(\zeta-\zeta_0)+a_{33}m_{10}'''(\zeta)=0$$

Равенства (1.6), (1.7) можно рассматривать как разложения нуля в ряды вида (1.4).

Воспользовавшись имеющимся произволом, выберем функции $l_{2k}(\rho)$ и $m_{1k}(\zeta)$ так, чтобы они удовлетворяли дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned}
&\Delta_0 l_{2k}(\rho)-a_{44}\alpha_k^2 l_{2k}(\rho)-(a_{13}+a_{44})\alpha_k^2 m_{2k}(\rho)=0\\
&\Delta_0 l_{20}'(\rho)=0\\
&a_{33}m_{1k}''(\zeta)-a_{44}\nu_k^2 m_{1k}(\zeta)-(a_{13}+a_{44})\nu_k^2 l_{1k}(\zeta)=0\\
&m_{10}'''(\zeta)=0
\end{aligned} \quad (1.8)$$

Тогда, по доказанной лемме

$$\begin{aligned}
&a_{44}l_{1k}''(\zeta)-\nu_k^2 l_{1k}(\zeta)+(a_{13}+a_{44})m_{1k}'(\zeta)=0\\
&a_{44}\Delta_0 m_{2k}(\rho)-a_{33}\alpha_k^2 m_{2k}(\rho)+(a_{13}+a_{44})\Delta_0 l_{2k}(\rho)=0
\end{aligned} \quad (1.9)$$

Кроме того, такой выбор функций $l_{2k}(\rho)$ и $m_{1k}(\zeta)$ однозначно определяет функции $l_{1k}(\zeta)$ и $m_{2k}(\rho)$ в представлении (1.5) по заданным $f_1(\rho,\zeta)$ и $f_2(\rho,\zeta)$, которые уже не являются произвольными, а должны удовлетворять уравнениям системы (1.3).

Решая полученные системы (1.8)—(1.9), нетрудно найти $f_1(\rho,\zeta)$ и $f_2(\rho,\zeta)$, а по ним, используя формулы (1.2), следующие представления для компонент вектора смещений:

$$\begin{aligned}
v_1(\rho,\zeta)=&-\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}A_{jk}\,\mathrm{sh}(\delta_{jk}\zeta)\,\nu_k J_1(\nu_k\rho)+\\
&+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}B_{jk}\beta_{jk}I_1(\beta_{jk}\rho)\cos\alpha_k(\zeta-\zeta_0)\\
v_3(\rho,\zeta)=&\Big[\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}(a_{33}-a_{44}\xi_j^2)/\xi_j^2 A_{jk}\delta_{jk}\,\mathrm{ch}(\delta_{jk}\zeta)\,J_0(\nu_k\rho)-\\
&-\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}(\xi_j^2-a_{44})B_{jk}I_0(\beta_{jk}\rho)\,\alpha_k\sin\alpha_k(\zeta-\zeta_0)\Big]\Big/(a_{13}+a_{44})+C
\end{aligned} \quad (1.10)$$

где A_{jk}, B_{jk}, C — произвольные постоянные.

$$\xi_{1,2}=\sqrt{(-a_{13}^2-2a_{13}a_{44}+a_{33}) \pm \sqrt{(-a_{13}^2-2a_{13}a_{44}+a_{33})^2-4a_{33}a_{44}^2}}\Big/\sqrt{2a_{44}} \tag{1.11}$$

$$\delta_{1k}=\nu_k/\xi_2, \quad \delta_{2k}=\nu_k/\xi_1, \quad \beta_{jk}=\xi_j\alpha_k$$

Отметим, что построенное таким образом общее решение (1.10) системы дифференциальных уравнений равновесия обладает необходимым функциональным произволом для удовлетворения любых граничных условий как в смещениях, так и в наряжениях на граничных поверхностях цилиндра.

§ 2. Имея ввиду то обстоятельство, что в дальнейшем при решении задачи будет использоваться метод, предложенный в работе [3], введем в рассмотрение вспомогательную задачу

$$\begin{aligned} \tau_{13}(\rho, \zeta_0) &= \varphi_1(\rho), \quad v_3(\rho, \zeta_0) = \varphi_2(\rho) \\ \tau_{13}(1, \zeta) &= \varphi_3(\zeta), \quad v_1(1, \zeta) = \varphi_4(\zeta) \end{aligned} \tag{2.1}$$

где, в силу свойств симметрии решаемой задачи (антисимметричная деформация), функции $\varphi_3(\zeta)$ и $\varphi_4(\zeta)$ должны удовлетворять соотношениям:

$$\varphi_3(-\zeta)=\varphi_3(\zeta), \quad \varphi_4(-\zeta)=-\varphi_4(\zeta)$$

Решение задачи (2.1) нетрудно получить в замкнутой форме, при этом произвольные постоянные из (1.10) будут иметь вид:

$$\begin{aligned} A_{jk} &= \frac{(-1)^{j-1}}{(\xi_2^2-\xi_1^2)\,\delta_{jk}\operatorname{ch}(\delta_{jk}\xi_0)\,J_0(\nu_k)}\left[\frac{\xi_j^2-a_{44}}{a_{44}\nu_k}\varphi_{1k}+(\xi_j^2+a_{13})\,\varphi_{2k}\right] \\ B_{jk} &= \frac{(-1)^{j-1}(a_{13}+a_{44})}{a_{44}(\xi_2^2-\xi_1^2)\,\beta_{jk}I_1(\beta_{jk})}\left[\frac{1}{\alpha_k}\varphi_{3k}+\frac{a_{33}-a_{13}^2}{\xi_j^2+a_{13}}\varphi_{4k}\right], \quad C=\varphi_{20} \end{aligned} \tag{2.2}$$

где

$$\varphi_{jk}=\frac{2}{J_0(\nu_k)}\int_0^1 \rho\varphi_1(\rho)\,J_1(\nu_k\rho)\,d\rho$$

$$\varphi_{20}=2\int_0^1 \rho\varphi_2(\rho)\,d\rho, \qquad \varphi_{2k}=\frac{2}{J_0(\nu_k)}\int_0^1 \rho\varphi_2(\rho)\,J_0(\nu_k\rho)\,d\rho$$

$$\varphi_{3k}=\frac{2}{\zeta_0}\int_0^{\zeta_0}\varphi_3(\zeta)\sin\alpha_k(\zeta-\zeta_0)\,d\zeta, \qquad \varphi_{4k}=\frac{2}{\zeta_0}\int_0^{\zeta_0}\varphi_4(\zeta)\cos\alpha_k(\zeta-\zeta_0)\,d\zeta$$

Подставляя теперь найденные значения постоянных в выражения для перемещений и напряжений, получим следующие, необходимые для дальнейшего решения задачи, формулы:

$$v_1(\rho, \zeta_0)=M_{11}(\rho, \varphi_1(\rho))+M_{12}(\rho, \varphi_2(\rho))+M_{13}(\rho, \varphi_3(\zeta))+M_{14}(\rho, \varphi_4(\zeta)) \tag{2.3}$$

$$v_3(1, \zeta)=M_{21}(\zeta, \varphi_1(\rho))+M_{22}(\zeta, \varphi_2(\rho))+M_{23}(\zeta, \varphi_3(\zeta))+M_{24}(\zeta, \varphi_4(\zeta)) \tag{2.4}$$

$$\tau_{11}(1, \zeta) = M_{31}(\zeta, \varphi_1(\rho)) + M_{32}(\zeta, \varphi_2(\rho)) + M_{33}(\zeta, \varphi_3(\zeta)) + M_{34}(\zeta, \varphi_4(\zeta)) \quad (2.5)$$

$$\tau_{33}(\rho, \zeta_0) = M_{41}(\rho, \varphi_1(\rho)) + M_{42}(\rho, \varphi_2(\rho)) + M_{43}(\rho, \varphi_3(\zeta)) + M_{44}(\rho, \varphi_4(\zeta)) \quad (2.6)$$

где, в частности, оператор $M_{11}(\rho, \ldots)$ имеет вид:

$$M_{11}(\rho, \ldots) = \frac{2}{a_{44}(\xi_2^2 - \xi_1^2)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(\nu_k \rho)}{\nu_k J_0^2(\nu_k)} [\xi_1 (\xi_2^2 - a_{44}) \operatorname{th}(\delta_{2k}\zeta_0) -$$

$$- \xi_2 (\xi_1^2 - a_{44}) \operatorname{th}(\delta_{1k}\zeta_0)] \int_0^1 \rho \ldots J_1(\nu_k \rho)\, d\rho$$

остальные операторы в силу громоздкости не приведены, но могут быть легко получены из формул (1.1), (1.10) и (2.2).

Соотношения (2.3)—(2.6) позволяют свести любую краевую задачу для цилиндра в случае антисимметричного деформирования к системе интегральных уравнений.

Проиллюстрируем это утверждение на примере следующих задач.

Задача 1. На всей поверхности цилиндра заданы напряжения:

$$\begin{aligned} &\tau_{13}(\rho, \zeta_0) = \varphi_1(\rho), \quad \tau_{13}(1, \zeta) = \varphi_3(\zeta) \\ &\tau_{11}(1, \zeta) = \sigma_1(\zeta), \quad \tau_{33}(\rho, \zeta_0) = \sigma_3(\rho) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Решение задачи в этом случае сводится к определению двух неизвестных функций $\varphi_2(\rho)$ и $\varphi_4(\zeta)$ из системы интегральных уравнений вида (2.5), (2.6).

Задача 2. На торцах цилиндра заданы напряжения, на боковой поверхности — перемещения:

$$\begin{aligned} &\tau_{13}(\rho, \zeta_0) = \varphi_1(\rho), \quad v_1(1, \zeta) = \varphi_4(\zeta) \\ &\tau_{33}(\rho, \zeta_0) = \sigma(\rho), \quad v_3(1, \zeta) = u(\zeta) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Аналогично предыдущей, эта задача сводится к отысканию функций $\varphi_2(\rho)$ и $\varphi_3(\zeta)$ из системы вида (2.4), (2.6).

Задача 3. Боковая поверхность цилиндра жестко защемлена, а на торцах заданы условия контактного типа:

$$\begin{aligned} &v_1(1, \zeta) = v_3(1, \zeta) = 0, \quad 0 \leqslant \zeta \leqslant \zeta_0 \\ &\tau_{33}(\rho, \zeta_0) = \tau_{13}(\rho, \zeta_0) = 0, \quad \rho_0 < \rho \leqslant 1 \\ &v_1(\rho, \zeta_0) = g_1(\rho), \quad v_3(\rho, \zeta_0) = g_2(\rho), \quad 0 \leqslant \rho \leqslant \rho_0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Задача может быть сведена к системе теперь уже трех интегральных уравнений вида (2.3), (2.4), (2.6), где неизвестными будут являться

$$\varphi_1(\rho), \quad 0 \leqslant \rho \leqslant \rho_0; \quad \varphi_2(\rho), \quad \rho_0 < \rho \leqslant 1; \quad \varphi_3(\zeta), \quad 0 \leqslant \zeta \leqslant \zeta_0$$

Очевидно, что список задач может быть продолжен. Однако, и приведенных здесь достаточно для понимания существа предлагаемого метода.

§ 3. Доказательства теорем существования и единственности решения получающихся систем интегральных уравнений можно провести так же, как это сделано, например, в работах [3, 4, 6]. Здесь они не приводятся.

Основное внимание в настоящей работе уделяется методам построения приближенного решения систем интегральных уравнений. Хорошо известно, что эффективность приближенных методов существенно зависит от того, насколько выбранное приближение правильно описывает свойства искомого решения задачи. Поэтому, в первую очередь, займемся выяснением характера поведения решения вблизи ребра цилиндра, а также на линии смены граничных условий в контактной задаче.

Поведение решения в окрестности особых линий можно выяснить двумя способами. Первый способ связан с изучением ядер интегральных операторов, второй способ, изложением которого мы займемся, основан на предположении о поведении решения в окрестности этих линий.

Пусть в задаче 1 искомые функции в окрестности ребра цилиндра ведут себя следующим образом:

$$\varphi_2(\rho) = A(1-\rho^2)^{\beta}, \quad \varphi_4(\zeta) = B\zeta(\zeta_0^2-\zeta^2)^{\gamma} \tag{3.1}$$

Подставляя формулы (3.1) в систему интегральных уравнений, соответствующую рассматриваемой задаче, без учета поведения заданных граничных функций, получим, что $\beta = \gamma$ определяется из уравнения

$$\operatorname{ch}(\delta\beta) = 1 + \frac{(\xi_1-\xi_2)^2}{2\xi_1\xi_2}\sin^2\frac{\pi\beta}{2}, \qquad \delta = \ln\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right) \tag{3.2}$$

а постоянные A и B связаны соотношением

$$(\xi_2-\xi_1)\sin\frac{\pi\beta}{2}A + (\xi_2^{\beta}-\xi_1^{\beta})\zeta_0^{\beta+1}B = 0 \tag{3.3}$$

Проводя аналогичное исследование системы интегральных уравнений в задаче 2, получим, что искомые функции в окрестности ребра цилиндра ведут себя следующим образом:

$$\varphi_2(\rho) = C(1-\rho^2)^{\alpha}, \quad \varphi_3(\zeta) = D(\zeta_0^2-\zeta^2)^{\alpha-1} \tag{3.4}$$

где постоянные C и D связаны между собой

$$\frac{(\xi_2^2+a_{13})\xi_2^{-\alpha}-(\xi_1^2+a_{13})\xi_1^{-\alpha}}{\xi_2-\xi_1}\alpha C + \frac{a_{44}+\xi_1\xi_2}{2a_{44}\xi_1\xi_2}\sin\frac{\pi\alpha}{2}\zeta_0^{\alpha-1}D = 0 \tag{3.5}$$

а α является корнем уравнения [5, 6]:

$$\operatorname{ch}(\delta\alpha) = Q_1 + Q_2\cos^2\frac{\pi\alpha}{2} \tag{3.6}$$

где

$$Q_1 = \frac{a_{13}^2+2a_{13}a_{44}+a_{33}}{2a_{33}(a_{13}+a_{44})}\xi_1\xi_2, \qquad Q_2 = \frac{(a_{44}\xi_1\xi_2+a_{33})(\xi_1-\xi_2)^2}{2a_{33}(a_{13}+a_{44})}$$

В задаче 3 поведение решения в окрестности ребра такое же, как и в задаче 2, а на границе контактной области характер особенности определяется из уравнения

$$\cos 2\pi\alpha = -\frac{2a_{44}(\sqrt{a_{33}} - a_{12}) + (\sqrt{a_{33}} + a_{12})(a_{44} + \sqrt{a_{33}})}{(\sqrt{a_{33}} + a_{12})(a_{44} + \sqrt{a_{33}})} \qquad (3.7)$$

Перейдем теперь к изложению методов решения получающихся систем интегральных уравнений. Причем, все дальнейшие рассуждения будем иллюстрировать, изучая рассмотренную выше задачу 2.

Очевидно, что полученная в этой задаче система интегральных уравнений (2.4), (2.6) может быть сведена к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Такой подход к этим задачам естествен и, как показали исследования Б. Л. Абрамяна и В. Т. Гринченко, достаточно эффективен. Особо здесь следует отметить метод В. Т. Гринченко [9], который позволяет учитывать в решении характер напряженного состояния цилиндра вблизи ребра, что, в конечном итоге, в отличие от метода простой редукции, позволяет найти весь набор неизвестных бесконечной системы по решению всего лишь конечной.

Вместе с тем, как показали численные расчеты [5, 6], весьма эффективным при решении подобных задач является метод Бубнова-Галеркина, к описанию которого мы переходим.

Будем отыскивать функции $\varphi_2(\rho)$ и $\varphi_3(\zeta)$ в виде

$$\varphi_2(\rho) = C_0 + \sum_{k=1}^{N} C_k \frac{J_0(\nu_k\rho)}{J_0(\nu_k)} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^{S} \frac{C_{N+j}}{\nu_k^{\alpha_j+1}} + \sum_{j=1}^{T} \frac{C_{N+S+j}}{\nu_k^{j+2}} \right] \frac{J_0(\nu_k\rho)}{J_0(\nu_k)}$$

$$\varphi_3(\zeta) = \sum_{k=1}^{M} D_k \sin\alpha_k(\zeta - \zeta_0) + \sum_{k=M+1}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^{S} \frac{D_{M+j}}{(\alpha_k\zeta_0)^{\alpha_j}} + \right. \qquad (3.8)$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{T} \frac{D_{M+S+j}}{(\alpha_k\zeta_0)^{j+1}} \right] \sin\alpha_k(\zeta - \zeta_0)$$

где C_j, D_j — неизвестные постоянные, α_1 — вещественный корень, α_j ($j = 2, 3, \ldots, S$) — комплексные корни уравнения (3.6).

Если сравнить формулы (3.8) с соответствующими разложениями функций $\varphi_2(\rho)$ и $\varphi_3(\zeta)$ в ряды Фурье-Дини, то станет очевидной идея предлагаемого метода, основанного, в конечном счете, на аппроксимации не самих функций, а коэффициентов их разложений. Числа N и M есть соответственно номера выхода на асимптотику этих коэффициентов, а выражения, записанные в квадратных скобках в (3.4), являются их асимптотическими формулами. Причем, первые слагаемые в квадратных скобках ответственны за учет особенности решения вблизи ребра цилиндра, вторые слагаемые — за учет поведения правых частей рассматриваемой системы интегральных уравнений.

Подставляя теперь функции $\varphi_2(\rho)$ и $\varphi_3(\zeta)$ в виде (3.8) в эту систему и используя ортогональность координатных функций $J_0(\nu_k\rho)$ и

$\sin\alpha_k(\zeta-\zeta_0)$, получим конечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных C_j и D_j.

Здесь нужно также отметить, что если в формулах (3.8) устремить N и M к бесконечности, то предлагаемый подход совпадет с методом решения подобных задач, берущим начало в работах Б. Л. Абрамяна. Если же в формулах (3.8) положить $S=1$, $T=0$, то мы придем к методу, развитому В. Т. Гринченко.

Другой подход к решению рассматриваемой системы основан на ее сведении к одному интегральному уравнению относительно функции $\varphi_3(\zeta)$:

$$L(\zeta,\ \varphi_3(\zeta))=F(\zeta) \tag{3.9}$$

где

$$L(\zeta,\ldots)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n_{1k}}\left[n_2\frac{\operatorname{ch}(\delta_{2k}\zeta)}{\operatorname{ch}(\delta_{2k}\zeta_0)}+n_3\frac{\operatorname{ch}(\delta_{1k}\zeta)}{\operatorname{ch}(\delta_{1k}\zeta_0)}\right]\times$$

$$\times\left[n_2\int_0^{\zeta_0}\ldots\frac{\operatorname{ch}(\delta_{2k}\zeta)}{\operatorname{ch}(\delta_{2k}\zeta_0)}d\zeta+n_3\int_0^{\zeta_0}\ldots\frac{\operatorname{ch}(\delta_{1k}\zeta)}{\operatorname{ch}(\delta_{1k}\zeta_0)}d\zeta\right]+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}n_{4k}\sin\alpha_k(\zeta-\zeta_0)\int_0^{\zeta_0}\ldots\sin\alpha_k(\zeta-\zeta_0)\,d\zeta$$

$$n_{1k}=\frac{a_{33}-a_{13}^2}{2(\xi_2^2-\xi_1^2)}\left[\xi_2\operatorname{th}(\delta_{1k}\zeta_0)-\xi_1\operatorname{th}(\delta_{2k}\zeta_0)\right]\nu_k$$

$$n_2=(\xi_1^2+a_{13})/(\xi_2^2-\xi_1^2),\qquad n_3=(\xi_2^2+a_{13})/(\xi_1^2-\xi_2^2)$$

$$n_{4k}=\frac{2}{a_{44}(\xi_2^2-\xi_1^2)\,\zeta_0\alpha_k}\left[\frac{\xi_2^2-a_{44}}{\xi_2}\,\frac{I_0(\beta_{2k})}{I_1(\beta_{2k})}-\frac{\xi_1^2-a_{44}}{\xi_1}\,\frac{I_0(\beta_{1k})}{I_1(\beta_{1k})}\right]$$

а $F(\zeta)$ выражается через известные функции $u(\zeta)$, $\sigma(\rho)$, $\varphi_1(\rho)$, $\varphi_4(\zeta)$.

Полученное уравнение (3.9) решалось методом Бубнова-Галеркина, в котором неизвестная функция $\varphi_3(\zeta)$ отыскивалась в виде

$$\varphi_3(\zeta)=\sum_{j=1}^{N}A_j(\zeta_0^2-\zeta^2)^{\alpha_1+j-2} \tag{3.10}$$

где A_j — неизвестные постоянные, α_1 — вещественный корень уравнения (3.6).

При таком подходе к решению задачи также получаем конечную систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных A_j, порядок которой намного меньше порядка систем, решаемых в предыдущем случае. Однако, здесь приходится суммировать ряды с коэффициентами, содержащими бесселевы функции с нецелым индексом, что связано с определенными вычислительными трудностями.

§ 4. Предложенные выше методы решения были реализованы на ЭВМ БЭСМ-6 для конкретной краевой задачи изгиба жестко заделанного по боковой поверхности цилиндра равномерно распределенной по торцам нагрузкой. Граничные условия задачи имеют вид (2.8), где

$$\varphi_1(\rho) = \varphi_4(\zeta) = u(\zeta) = 0, \quad \sigma(\rho) = P$$

Расчеты проводились для трансверсально-изотропного материала со следующими значениями упругих постоянных:

$$c_{11} = 1.1 \cdot 10^{11}\ \text{н/м}^2, \quad c_{12} = 0.675 \cdot 10^{11}\ \text{н/м}^2, \quad c_{13} = 0.7 \cdot 10^{11}\ \text{н/м}^2$$

$$c_{33} = 1.5 \cdot 10^{11}\ \text{н/м}^2, \quad c_{44} = 0.22 \cdot 10^{11}\ \text{н/м}^2$$

При таком наборе числа ξ_1 и ξ_2 из (1.11) вещественны

$$\xi_1 = 1.756, \quad \xi_2 = 0.665$$

а корни характеристического уравнения (3.6) имеют вид:

$$\alpha_1 = 0.682$$

$$\alpha_2 = 1.636 \pm i\,0.270, \quad \alpha_3 = 3.548 \pm i\,1.369$$

остальные $\alpha_k = \sigma_k \pm i\tau_k$ ($k = 4, 5, \ldots$) находятся с точностью до 0.1 % по асимптотической формуле [5].

Численные результаты показали, что оба метода являются эффективными для расчета напряженно-деформированного состояния цилиндра в области изменения параметра ζ_0 от 0,1 до 5,0. О качестве получаемых решений можно судить по точности удовлетворения граничных условий. Так, в обоих подходах граничные условия для осевого смещения удовлетворяются с точностью до 0.2% от его значения в центре цилиндра. При этом, в первом случае (3.8) принималось $N \leqslant 5$, $M \leqslant 5$, $S = 2$, $T = 1$ и решались системы до 16 порядка, а в случае (3.10)—$N \leqslant 3$ и решались системы 2—3 порядка.

Таблица 1

	$\zeta_0=0.1$	$\zeta_0=0.3$	$\zeta_0=1.0$	$\zeta_0=2.0$	$\zeta_0=5.0$
u_2/P	80.781	7.212	1.273	0.400	0,019
σ_{11}/P	—22.176	—2.429	—0.026	0.261	0.223
σ_{13}/P	— 1.272	—0.677	—0.506	—0.420	—0.285
σ_{33}/P	0.992	0.906	0.709	0.542	0.316

В таблице приведены значения осевого смещения, вычисленные в центре цилиндра, и значения компонент тензора напряжений, вычисленные при $\rho = 0{,}9$ и $\zeta = 0{,}9\,\zeta_0$, для различных ζ_0.

Ростовский государственный
университет

Поступила 25 XI 1980

Ա. Վ. ԲԵԼՈԿՈՆ, Ե. Պ. ՄԱԼԻԿՈՎ

ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄԵԹՈԴԸ ՏՐԱՆՍՎԵՐՍԱԼ ԻԶՈՏՐՈՊ ԳԼԱՆԻ ԱՌԱՆՑՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՅԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ

Ամփոփում

Հոդվածում մշակված է մեթոդ, ըստ որի վերջավոր չափեր ունեցող մարմինների համար առաձգականության տեսության եզրային խնդիրները հանգեցվում են ինտեգրալ հավասարումների համակարգերի լուծմանը։ Ստացված ինտեգրալ հավասարումների համակարգերի ուսումնասիրությունը թույլատրում է կառուցել նրանց լուծելու արդյունավետ ալգորիթմներ, որոնք հիմնվում են Բուբնով-Գալյորկինի մեթոդի կիրառման վրա ու հաշվի են առնում դիտարկվող եզրային խնդրի լուծման եզակիությունը։

THE METHOD OF INTEGRAL EQUATIONS IN AXISYMMETRIC DEFORMATION OF TRANSVERSELY ISOTROPIC CYLINDER PROBLEMS

A. W. BELOKON, E. P. MALIKOV

Summary

The method of solving problems of theory of elasticity for bodies of finite dimensions which take into account the description of boundary problems with the help of systems of integral equations is presented in this paper. The investigation of the systems of integral equations helps to build effective algorithmes to solve these equations; the algorithmes are founded on the Bubnov-Galerkin method while peculiarities of the boundary problem are taken into account.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баблоян А. А.* К задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра конечной длины из трансверсально-изотропного материала.— Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, 1961, т. 14, № 4.
2. *Абрамян Б. Л.* К задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра.— Докл. АН АрмССР, 1954, т. 19, № 1.
3. *Белоконь А. В.* Об одном методе решения задач теории упругости для тел конечных размеров.— Докл. АН СССР, 1977, т. 233, № 1.
4. *Белоконь А. В.* Применение вариационных методов к решению контактных задач.— Изв. СКНЦ ВШ, сер. естеств. наук, 1973, № 4.
5. *Белоконь А. В., Маликов Е. П.* Динамическая смешанная задача для конечного трансверсально-изотропного цилиндра.— Тезисы докладов Всесоюзной конференции по смешанным задачам механики деформируемого тела. Ростов н/Д, 1977.
6. *Белоконь А. В., Маликов Е. П.* Смешанная задача теории упругости для конечного трансверсально-изотропного цилиндра.— Тезисы докладов Всесоюзной конференции по теории упругости. Ереван, 1979.
7. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977.
8. *Валов Г. М.* Об осесимметричной деформации сплошного кругового цилиндра конечной длины.— ПММ, 1962, т. 26, № 4.
9. *Гринченко В. Т.* Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. Киев: Наукова думка, 1978.
10. *Elliott H. A.* Three-dimensional stress distributions in hexagonal aeolotropic crystals. Proc. of the Cambridge philos. soc., 1948, 44, part 4.