

А. М. СИМОНЯН

О ВЕРОЯТНОСТНОМ РАСЧЕТЕ СТАТИЧЕСКИ-НЕОПРЕДЕЛИ-  
МЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ ИЗ НЕЛИНЕЙНО-  
ДЕФОРМИРУЕМОГО МАТЕРИАЛА

Как известно, напряжения, возникающие в стержнях статически-неопределимых систем, зависят от деформативных характеристик этих стержней. Как правило, параметры, определяющие связь между деформациями и напряжениями, принимаются достоверными и приравниваются усредненным из достаточно большого количества соответствующих экспериментов. Однако, у элементов реальных конструкций параметры, определяющие деформационные свойства, не будут тождественно равны их усредненным экспериментальным значениям, причем расхождения эти будут тем больше, чем больше разброс экспериментальных данных, несмотря на то, что эти усредненные данные являются наиболее вероятными значениями рассматриваемых параметров. Этот вопрос приобретает особое значение в условиях ползучести, когда разброс деформационных кривых значителен.

В настоящей работе рассматривается вероятностный расчет статически-неопределимых стержневых систем, целью которого является определение вероятности того, что напряжения в стержнях систем заключены в произвольно заданных пределах. В терминологии [1] задача сведена к определению вероятностных свойств выходных параметров на основе вероятностных свойств стохастической системы. Определяются аналитические выражения для функций распределения выходных параметров без каких-либо ограничений в отношении изменчивости случайных величин, определяющих деформационные свойства материала.

1. *Постановка задачи.* Задаются функции распределений параметров, определяющих деформационные свойства стержней некоторой статически-неопределимой системы, и ищутся функции плотностей распределений напряжений, возникающих в этих стержнях.

В качестве плотностей распределения основного параметра ползучести здесь рассматриваются исследованные в работе [2] нормальный закон

$$f(x) = 1/\sqrt{2\pi\tilde{D}} \exp\left[-(x - \tilde{m})^2/2\tilde{D}\right] \quad (1.1)$$

где  $x$  — коэффициент при функционале ползучести,  $\tilde{m}$  — среднее арифметическое его значение,  $\tilde{D}$  — выборочная дисперсия,

III тип распределения Пирсона

$$f(x) = \begin{cases} a^{\gamma} x^{\gamma-1} \exp(-ax) / \Gamma(\gamma), & 0 < x < \infty, \gamma > 1 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

где  $\alpha = \frac{\bar{m}}{\bar{D}}$ ,  $\gamma = \frac{\bar{m}^2}{\bar{D}}$ ,  $\Gamma$  — гамма-функция,

а также распределение

$$f(x) = \begin{cases} (bx^n + cx^k) \exp(-a^2 x^2), & 0 \leq x < \infty, b \geq 0, c \geq 0, n > 0, k > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

где

$$\alpha = \frac{(k-n)\bar{m}}{4(\bar{D} + \bar{m}^2)A(k, n)} +$$

$$+ \sqrt{\frac{(k-n)^2 \bar{m}^2}{16A^2(k, n)(\bar{D} + \bar{m}^2)^2} + \frac{k+1}{2(\bar{D} + \bar{m}^2)} - \frac{(k-n)\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)}{2A(k, n)(\bar{m}^2 + \bar{D})\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}}$$

$$b = \frac{4a^{n+3}}{(k-n)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \left( \frac{k+1}{2a^2} - \bar{D} - \bar{m}^2 \right)$$

$$c = \frac{2a^{k+1}}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} - ba^{k-n} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}; \quad A(k, n) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} - \frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

$$B(k, n) = (k+1) \frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} - (n+1) \frac{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}$$

$k$  и  $n$  — коэффициенты, подлежащие подбору при удовлетворении ряду условий [2]. Положим, что соотношения между деформациями и напряжениями в элементе  $i$  системы могут быть записаны согласно какой-либо из нижеприведенных теорий:

$$\varepsilon_i = x_i \sigma_i^n f(t) \quad (\text{теория старения [3]})$$

$$\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial t} = x_i \sigma_i^n f(t) \quad (\text{теория течения [3]})$$

$$\varepsilon_i^{1/p} = x_i^{1/p} \left[ \sigma_i(t) + \int_0^t K(t, \xi) \sigma_i(\xi) d\xi \right] \quad (\text{теория наследственности [4]})$$

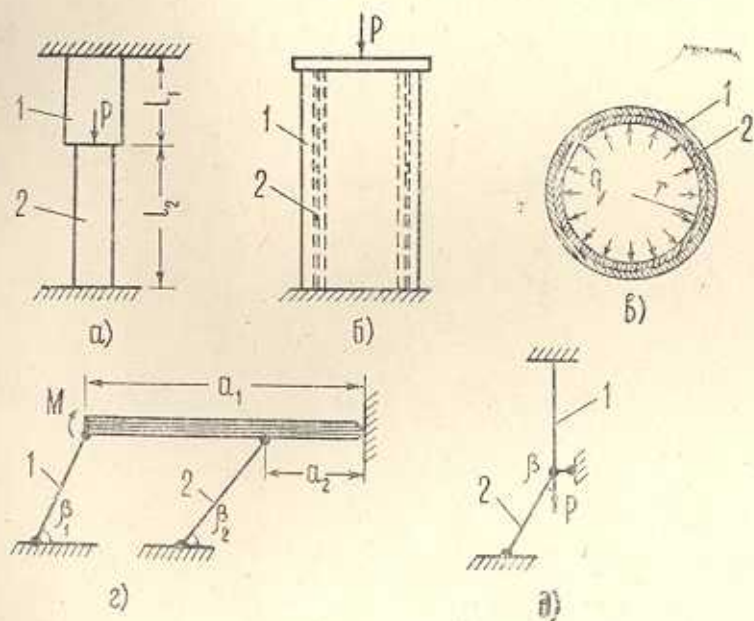
$$\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial t} = x_i^* \sigma_i^{\nu} \varepsilon_i^{1-\nu} \quad (\text{гипотеза уравнения состояния [4]})$$

$$\varepsilon_i = x_i \int_0^t \sigma_i^{\nu-2\nu}(\tau) \left[ \int_0^{\tau} \sigma_i^{\nu}(\xi) d\xi \right]^2 d\tau \quad (\text{вариант теории разупрочнения [5]).}$$

(1.4)

2. Двухстержневые статически-неопределимые системы. Рассмотрим задачи а—д, показанные на фиг. 1. Уравнения совместности и статики запишутся так:

$$\varepsilon_2 = \xi \varepsilon_1 \quad (2.1)$$



Фиг. 1.

$$\sigma_2 = P - \eta \sigma_1 \quad (2.2)$$

где значения  $\xi$ ,  $\eta$  и  $P$ , соответственно рассмотренным задачам, можно взять из табл. 1 (индексы приняты соответственно номерам стержней).

Таблица 1

Задачи	а	б	в	г	д
$\xi$	$-l_1/l_2$	1	1	$\frac{a_2 l_1 \sin \beta_2}{a_1 l_2 \sin \beta_1}$	$\frac{l_1 \cos \beta}{l_2}$
$P$	$-P/F_2$	$-P/F_2$	$qr/\sigma_2$	$\frac{M}{a_2 F_2 \sin \beta_2}$	$\frac{P}{F_2 \cos \beta}$
$\eta$	$-F_1/F_2$	$F_1/F_2$	$\delta_1/\delta_2$	$\frac{F_1 a_1 \sin \beta_1}{F_2 a_2 \sin \beta_2}$	$\frac{F_1}{F_2 \cos \beta}$



Решая уравнения (2.1) и (2.2), согласно любой из теорий (1.4), получим

$$x_1 = P\xi^{-1/p} [(x_1/x_2)^{1/p} + \eta\xi^{-1/p}]^{-1} \quad (2.3)$$

Здесь и впоследствии для отрицательных значений аргумента степенная функция продолжается нечетно:  $x^n \equiv |x|^n \text{sign } x$ .

Рассмотрим распределение  $y$ , определяемого равенством

$$y = [(x_1/x_2)^{1/p} + \theta]^{-1} \quad (2.4)$$

в зависимости от распределения  $x_1$  и  $x_2$ . Для этого достаточно зафиксировать некоторое значение  $y$  и определить область изменения  $x_1$  и  $x_2$ , в которой значения  $y$ , согласно (2.4), меньше фиксированного, а затем в этой области осуществить интегрирование плотности распределения  $f(x_1, x_2)$ . При этом для функции распределения  $G(y)$  согласно [6], (с. 146), получим

$$G(y) = \int_{-\infty}^0 dx_2 \left[ \int_{-\infty}^{\chi(x_2)} f(x_1, x_2) dx_1 + \int_{-\zeta(x_2)}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_1 \right] + \int_0^{\infty} dx_2 \int_{\chi(x_2)}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_1, \quad y > 0 \quad (2.5)$$

$$G(y) = \int_{-\infty}^0 dx_2 \int_{-\zeta(x_2)}^{-\gamma(x_2)} f(x_1, x_2) dx_1 + \int_0^{\infty} dx_2 \int_{-\zeta(x_2)}^{-\gamma(x_2)} f(x_1, x_2) dx_1, \quad y < 0 \quad (2.6)$$

где  $\zeta(x_2) = x_2 \theta^p$ ,  $\chi(x_2) = x_2 \left| \frac{1}{y} - \theta \right|^p$ .

Для плотности распределения  $g(y) = dG(y)/dy$  получим из (2.5) и (2.6)

$$g(y) = \frac{p}{y^2} \left| \frac{1}{y} - \theta \right|^{p-1} \int_{-\infty}^{\infty} |x_2| f \left[ x_2 \left( \frac{1}{y} - \theta \right)^p, x_2 \right] dx_2 \quad (2.7)$$

Отметим, что, вследствие независимости деформационных свойств стержней друг от друга,

$$f(x_1, x_2) = f(x_1) f(x_2) \quad (2.8)$$

Принимая, что для распределения параметров  $x_1$  и  $x_2$  имеет место нормальный закон (1.1), после ряда выкладок получим

$$g(y) = \frac{p \left| \frac{1}{y} - \theta \right|^{p-1}}{2\pi y^2 \sqrt{D_1 D_2}} \frac{\exp \left[ \Omega(y) - \frac{m_1^2}{2D_1} - \frac{m_2^2}{2D_2} \right]}{\frac{1}{2D_1} \left| \frac{1}{y} - \theta \right|^{2p} + \frac{1}{2D_2}} \times \\ \times \left[ \exp[-\Omega(y)] + \sqrt{\pi \Omega(y)} \operatorname{erf} \sqrt{\Omega(y)} \right], \quad -\infty < y < \infty \quad (2.9)$$

$$\text{где } Q(y) = \frac{1}{4} \left[ \frac{m_1}{D_1} \left( \frac{1}{y} - \theta \right)^\rho + \frac{m_2}{D_2} \right]^2 \left[ \frac{1}{2D_1} \left| \frac{1}{y} - \theta \right|^{2\rho} + \frac{1}{2D_2} \right]^{-1}$$

а индексы при  $m$  и  $D$  соответствуют номеру стержня.

Плотности распределения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  соответственно запишутся так:

$$\varphi_1(\sigma_1) = \xi^{1/\rho} g(\xi^{1/\rho} \sigma_1 / P) / P \quad (2.10)$$

$$\varphi_2(\sigma_2) = \frac{1}{\gamma P} \xi^{1/\rho} g\left(\frac{P - \sigma_2}{\gamma P} \xi^{1/\rho}\right) \quad (2.11)$$

Для определения вероятности  $p$  нахождения  $\sigma_i$  в произвольно заданных пределах, например  $\sigma_i' \leq \sigma_i \leq \sigma_i''$ , достаточно проинтегрировать (2.10) или (2.11) в этих пределах

$$p(\sigma_i' \leq \sigma_i \leq \sigma_i'') = \int_{\sigma_i'}^{\sigma_i''} \varphi_i(\sigma_i) d\sigma_i \quad (2.12)$$

При использовании более точного для описания ползучести [2] распределения (1.3) после ряда выкладок получим

$$g(y) = \frac{\rho}{y^2} \left( \frac{1}{y} - \theta \right)^{\rho-1} \left\{ b_1 \left( \frac{1}{y} - \theta \right)^{\rho n_1} [T(y, n_1, n_2) b_1 + c_2 T(y, n_1, k_2)] + \right. \\ \left. + c_1 \left( \frac{1}{y} - \theta \right)^{\rho k_1} [b_2 T(y, n_2, k_1) + c_2 T(y, k_1, k_2)] \right\}, \quad 0 < y < \frac{1}{\theta} \quad (2.13)$$

$$g(y) = 0, \quad y < 0 \text{ и } y > \frac{1}{\theta}$$

где

$$T(y, n, k) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n+k+2}{2}\right) \left[ a_2^2 + a_1^2 \left( \frac{1}{y} - \theta \right)^{2\rho} \right]^{-\frac{n+k+2}{2}}$$

Менее громоздким оказывается выражение  $g(y)$  при использовании для  $x_1$  и  $x_2$  распределений Пирсона III типа (1.2)

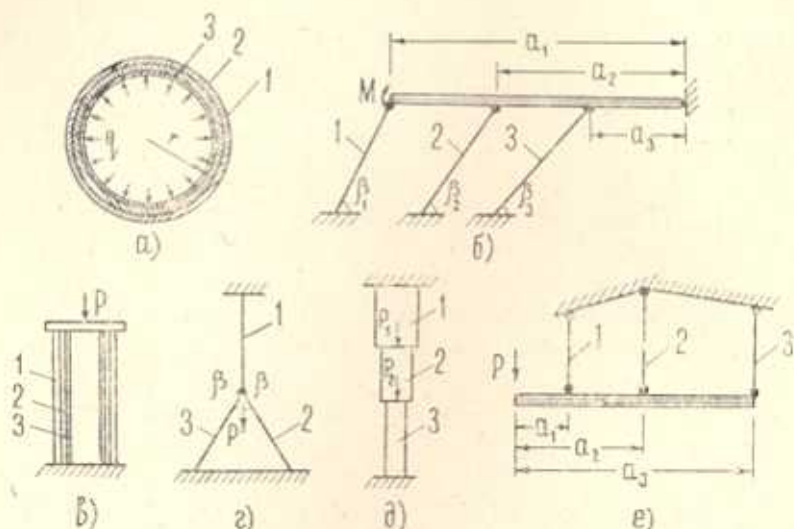
$$g(y) = \frac{\Gamma(\gamma_1 + \gamma_2)}{\Gamma(\gamma_1) \Gamma(\gamma_2)} \rho y^{-2} a_1^{\gamma_1} a_2^{\gamma_2} (1/y - \theta)^{\rho(\gamma_1-1)} \left[ a_1 \left( \frac{1}{y} - \theta \right)^\rho + a_2 \right]^{-\gamma_1-\gamma_2} \\ 0 < y < \frac{1}{\rho} \quad (2.14)$$

$$g(y) = 0, \quad y < 0 \text{ и } y > \frac{1}{\rho}$$

Отметим, что использование нормального закона распределения (1.1) для параметра ползучести  $x$  вряд ли приемлемо, так как для  $x$  имеют смысл лишь положительные значения, с другой стороны, в этом случае выражение  $g(y)$  (формула (2.9)) менее удобно для применения, чем формулы

(2.13) и (2.14). Это усложнение усугубляется при рассмотрении более сложных задач, вследствие чего ниже будут рассматриваться лишь распределения (1.2) и (1.3).

3. *Трехстержневые статически-неопределимые системы.* Рассматривая задачи а—е, показанные на фиг. 2, разделим их на три группы. Для задач а, б и в, входящих в первую группу, решение уравнений статики и совместности деформаций дает



Фиг. 2.

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= P_1 \left[ 1 + \theta_1 \left( \frac{x_1}{x_2} \right)^{1/p} + \lambda_1 \left( \frac{x_1}{x_2} \right)^{1/p} \right]^{-1} \\ \sigma_2 &= P_2 \left[ 1 + \theta_2 \left( \frac{x_2}{x_1} \right)^{1/p} + \lambda_2 \left( \frac{x_2}{x_1} \right)^{1/p} \right]^{-1} \\ \sigma_3 &= P_3 \left[ 1 + \theta_3 \left( \frac{x_2}{x_1} \right)^{1/p} + \lambda_3 \left( \frac{x_2}{x_1} \right)^{1/p} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $\theta_2 = \theta_1^{-1}$ ,  $\lambda_2 = \lambda_1 \theta_1^{-1}$ ,  $\theta_3 = \lambda_1^{-1}$ ,  $\lambda_3 = \theta_1 \lambda_1^{-1}$ , причем для задачи а

$$\theta_1 = \delta_2 / \delta_1, \quad \lambda_1 = \delta_3 / \delta_1, \quad P_1 = qr / \delta_1, \quad P_2 = qr / \delta_2, \quad P_3 = qr / \delta_3$$

для задачи б

$$\theta_1 = \frac{F_2 a_2 \sin \beta_2}{F_1 a_1 \sin \beta_1} \left( \frac{l_1 a_2 \sin \beta_2}{l_2 a_1 \sin \beta_1} \right)^{1/m}, \quad \lambda_1 = \frac{F_2 a_3 \sin \beta_3}{F_1 a_1 \sin \beta_1} \left( \frac{l_1 a_3 \sin \beta_3}{l_3 a_1 \sin \beta_1} \right)^{1/m}$$

$$P_i = \frac{M}{F_i a_i \sin \beta_i}, \quad i = 1, 2, 3$$

для задачи в

$$\theta_1 = F_2 / F_1, \quad \lambda_1 = F_3 / F_1, \quad P_1 = -P / F_1, \quad P_2 = -P / F_2, \quad P_3 = -P / F_3$$



Положим

$$y = [1 + \theta_1 (x_1/x_2)^{1/p} + \lambda_1 (x_1/x_2)^{1/p}]^{-1} \quad (3.2)$$

Аналогично процедурам п. 2, а также учитывая  $x_i > 0$ , что соответствует (1.2) и (1.3), получим

$$G(y) = \int_{r_1(y)}^{\infty} g_{12}(x) dx \int_0^{\infty} g_{13}(x) dx + \int_0^{r_2(y)} g_{12}(x) dx \int_{r_1(y)}^{\infty} g_{13}(x) dx, \quad 0 < y < 1 \quad (3.3)$$

где  $r_1(y) = (1/y - 1)^p \theta_1^{-p}$ ,  $r_2(y) = (1/y - 1 - \theta_1 x^{1/p}) \theta_2^{-1}$ , а через  $g_{ij}(x_{ij})$  обозначена плотность распределения  $x_{ij} = x_i/x_j$ , которая определяется так:

$$g_{ij}(x_{ij}) = \frac{dG_{ij}(x_{ij})}{dx_{ij}} = \frac{d}{dx_{ij}} \left[ \int_0^{\infty} f(x_j) dx_j \int_0^{x_j x_{ij}} f(x_i) dx_i \right] \quad (3.4)$$

Для распределения Пирсона III рода (1.2) из соотношения (3.4) получим

$$g_{ij}(x_{ij}) = \frac{\Gamma(\gamma_i + \gamma_j - 1)}{\Gamma(\gamma_i)\Gamma(\gamma_j)} a_i^{\gamma_i} a_j^{\gamma_j} x_{ij}^{\gamma_i - 1} (a_j + a_i x_{ij})^{1 - \gamma_i - \gamma_j} \quad (3.5)$$

Отсюда для  $g(y)$  находим выражение

$$g(y) = \frac{\rho a_1^2 \rho_1 a_2^2 \rho_2 a_3^2 \Gamma(\gamma_1 + \gamma_2 - 1) \Gamma(\gamma_1 + \gamma_3 - 1)}{(\theta_1 \theta_2)^{\rho \rho_1} \Gamma^2(\gamma_1) \Gamma(\gamma_2) \Gamma(\gamma_3) y^2} \left( \frac{1-y}{y} \right)^{2\rho\rho_1 - 1} \times \\ \times \int_0^1 \left[ a_2 + a_1 \left( \frac{1}{y} - 1 \right)^p \xi \theta_1^{-p} \right]^{1 - \gamma_1 - \gamma_2} \left[ a_3 + a_1 \left( \frac{1}{y} - \theta \right)^p (1 - \xi^{1/p})^p \theta_2^{-p} \right]^{1 - \gamma_1 - \gamma_3} \times \\ \times (1 - \xi^{1/p})^{\rho \rho_1 - 1} \xi^{\gamma_1 - 1} d\xi, \quad 0 < y < 1 \quad (3.6) \\ g(y) = 0, \quad y < 0, \quad y > 1$$

Аналогично п. 2 здесь имеем

$$\varphi_1(\sigma_1) = 1/P g(\sigma_1/P) \quad (3.7) \\ p(\sigma_1' \leq \sigma_1 \leq \sigma_1') = \int_{\sigma_1'}^{\sigma_1} \varphi_1(\sigma_1) d\sigma_1$$

Для вероятностного расчета  $\sigma_2$  достаточно в формулах (3.6) и (3.7) поменять местами индексы 1 и 2, для расчета же  $\sigma_3$  — индексы 1 и 3.

Если распределение (1.2) для основного параметра ползучести  $x$  неудовлетворительно для описания разброса экспериментальных данных,

представляется целесообразным использование распределения (1.3), в котором путем выбора показателей  $k$  и  $n$  возможно приближение к экспериментальным данным. Для нижеследующих аналитических выражений распределение (1.3) в применении к  $i$ -му стержню удобнее записать в виде

$$f_i(x_i) = \sum_{j=1,2} b_{ij} x_i^{n_{ij}} \exp(-a_i^2 x_i^2), \quad i=1, 2, 3, \quad 0 < x < \infty \quad (3.8)$$

После ряда выкладок получим

$$\begin{aligned} g(y) &= \frac{\rho(1/y-1)^{2\rho-1}}{4\theta_1^{\rho} \theta_2^{\rho} y^2} \sum_{i,j,k,l} b_{1i} b_{1j} b_{2k} b_{3l} \theta_1^{-\rho n_{1i}} \theta_2^{-\rho n_{1j}} \times \\ &\times \Gamma\left(\frac{n_{1i} + n_{2k} + 1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n_{1j} + n_{2l} + 1}{2}\right) (1/y-1)^{\rho(n_{1i} + n_{1j})} \times \\ &\times \int_0^1 [a_2^2 + a_1^2 (1/y-1)^{2\rho} \theta_1^{-2\rho} \xi^2]^{-\frac{n_{1i} + n_{2k} + 1}{2}} \times \\ &\times [a_3^2 + a_1^2 (1/y-1)^{2\rho} \theta_2^{-2\rho} (1-\xi)^{2\rho}]^{-\frac{n_{1j} + n_{2l} + 1}{2}} \times \\ &\times \xi^{n_{1i}} (1-\xi)^{\rho n_{1j} + \rho - 1} d\xi, \quad 0 < y < 1 \quad (3.9) \\ g(y) &= 0, \quad y < 0, \quad y > 1 \end{aligned}$$

где суммирование производится по всем комбинациям  $i, j, k, l$ , принимающим значения 1 и 2, то есть в данном случае складываются из 16 членов. Использование (3.9) для вероятностного расчета  $\sigma_1, \sigma_2$  и  $\sigma_3$  совершенно аналогично вышеописанному использованию (3.6).

Рассмотрим теперь задачу 2 (фиг. 2). Напряжения в стержнях определяются формулами

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{P}{F_1} \left[ 1 + \frac{2F_2 \cos \beta}{F_1} \left( \frac{2l_1 \cos \beta}{l_2} \right)^{1/\rho} \left( \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3 F_2^{\rho}}{x_1 F_1^{\rho}} \right)^{-1/\rho} \right]^{-1} \\ \sigma_2 &= \frac{F_1 \sigma_1 - P}{2F_2 \cos \beta}, \quad \sigma_3 = \frac{F_2 \sigma_2}{F_3} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Положим

$$y = [1 + \omega (x_{21} + x_{31})^{-1/\rho}]^{-1} \quad (3.11)$$

где  $x_{ij} = x_i/x_j$ .

Функция распределения  $G(y)$  для (3.11) в предположении  $x_i > 0$ , что соответствует (1.2) и (3.8), запишется так:

$$G(y) = \int_0^{\eta_2(y)} g_{21}(x) dx \int_0^{\eta_3(y)} g_{31}(x) dx \quad 0 < y < 1 \quad (3.12)$$

где



$$q_1(y) = \left(\frac{\omega y}{1-y}\right)^{\rho}, \quad q_2(y) = \frac{1}{\alpha} \left[ \left(\frac{\theta y}{1-y}\right)^{\rho} - \omega \right]$$

а  $g_{21}(z)$  и  $g_{31}(z)$  — плотности распределения  $x_{21}$  и  $x_{31}$ . После ряда выкладок для плотности распределения  $g(y) = dG(y)/dy$  соответственно III типу распределения Пирсона (1.2) получим следующее выражение:

$$g(y) = \rho \omega^{\gamma_1 + \gamma_2} \alpha^{-\gamma_1} a_1^{2\gamma_1} a_2^{\gamma_2} \frac{\Gamma(\gamma_1 + \gamma_2 - 1) \Gamma(\gamma_1 + \gamma_2 - 1)}{\Gamma^2(\gamma_1) \Gamma(\gamma_2) \Gamma(\gamma_3) y^2} \left(\frac{y}{1-y}\right)^{\rho(\gamma_1 + \gamma_2) + 1} \times$$

$$\times \int_0^1 \left[ a_1 + a_2 \xi \left(\frac{\omega y}{1-y}\right)^{\rho} \right]^{1 - \gamma_1 - \gamma_2} \left[ a_1 + \frac{a_3}{\alpha} \left(\frac{\omega y}{1-y}\right)^{\rho} (1 - \xi) \right]^{1 - \gamma_1 - \gamma_2} \times$$

$$\times \xi^{\gamma_1 - 1} (1 - \xi)^{\gamma_2 - 1} d\xi, \quad 0 < y < 1 \quad (3.13)$$

$$g(y) = 0, \quad y < 0, \quad y > 1$$

соответственно же распределению (3.8) или, что то же, (1.3) будем иметь

$$g(y) = \frac{\rho}{4} \sum_{i,j,k,l}^{1,2} \alpha^{-n_{1j}} b_{1i} b_{1j} b_{2k} b_{3l} (1-y)^{\rho(n_{1i} + n_{1j}) - 1} y^{\rho(n_{2k} + n_{3l} + 2) - 1} \times$$

$$\times \Gamma\left(\frac{n_{1i} + n_{2k} + 1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n_{1j} + n_{3l} + 1}{2}\right) \omega^{\rho(n_{2k} + n_{3l} + 2)} \times$$

$$\times \int_0^1 \left[ a_1^2 (1-y)^{2\rho} + a_2^2 \omega^{2\rho} y^{2\rho} \xi^{2\rho} \right]^{\frac{n_{1i} + n_{2k} + 1}{2}} \times$$

$$\times \left[ a_1^2 \alpha^2 (1-y)^{2\rho} + a_3^2 \omega^{2\rho} y^{2\rho} (1-\xi)^{2\rho} \right]^{\frac{n_{1j} + n_{3l} + 1}{2}} \xi^{n_{2k}} (1-\xi)^{n_{3l}} d\xi, \quad (3.14)$$

$$0 < y < 1$$

$$g(y) = 0, \quad y < 0, \quad y > 1$$

Принимая  $\alpha = (F_2/F_1)^{\rho}$ ,  $\omega = 2F_2/F_1 (\cos \beta)^{1+1/\rho} (2l_j/l_1)^{1/\rho}$ , при сравнении (3.10) и (3.11) получим

$$\varphi_1(\tau_1) = \frac{F_1}{P} g\left(\frac{F_1 \sigma_1}{P}\right)$$

$$\varphi_2(\sigma_2) = \frac{2F_2 \cos \beta}{P} g\left(1 + \frac{2}{P} F_2 \sigma_2 \cos \beta\right) \quad (3.15)$$

$$\varphi_3(\tau_3) = \frac{2F_3 \cos \beta}{P} g\left(1 + \frac{2}{P} F_3 \sigma_3 \cos \beta\right)$$

Рассмотрим теперь задачи  $g$  и  $e$  (фиг. 2). Для определения напряжения  $\sigma$ , получим уравнение

$$A(\sigma_1) \equiv \sigma_1^p - s_1(1 - b\sigma_1)^p x_2/x_1 - s_2(1 - c\sigma_1)^p x_3/x_1 = 0 \quad (3.16)$$

где для задачи д

$$s_1 = \frac{l_2}{l_1} \left( \frac{P_1}{P_2} \right)^m, \quad s_2 = \frac{l_3}{l_1} \left( \frac{P_1 + P_2}{F} \right)^m, \quad b = \frac{F_1}{P_1}, \quad c = \frac{F_1}{P_1 + P_2}$$

для задачи с

$$s_1 = \frac{(a_3 - a_1) a_3^m l_2}{(a_2 - a_2)^{1+m} l_1} \left( \frac{P}{F_2} \right)^m, \quad s_2 = \frac{(a_3 - a_1) a_2^m l_3}{(a_2 - a_1) (a_2 - a_2)^m l_1} \left( \frac{P}{F_3} \right)^m$$

$$b = (1 - a_1/a_3) F_1/P, \quad c = (1 - a_1/a_2) F_1/P$$

Функция распределения  $G(\sigma_1)$ , согласно (3.16), при условии  $x_i \geq 0$  определится так:

$$G(\sigma_1) = \int_0^{v_1(\sigma_1)} g_{21}(x) dx \int_0^{v_2(\sigma_1, x)} g_{31}(x) dx, \quad 0 < \sigma_1 < \frac{1}{b}$$

$$G(\sigma_1) = \int_0^{\frac{1}{c}} g_{21}(x) dx \int_0^{v_2(\sigma_1, x)} g_{31}(x) dx, \quad \frac{1}{b} < \sigma_1 < \frac{1}{c} \quad (3.17)$$

где

$$v_1(x) = \frac{1}{\Omega_1} \left( \frac{x}{1 - bx} \right)^p, \quad v_2(x, y) = \frac{x^p - \Omega_1(1 - bx)^p y}{\Omega_2(1 - cx)^p}$$

В применении к распределению Пирсона (1.2) отсюда получим нижеследующие выражения для  $\varphi_1(\sigma_1)$  — плотности распределения  $\sigma_1$

$$\varphi_1(\sigma_1) = \frac{\rho a_1^{\gamma_1} a_2^{\gamma_2} a_3^{\gamma_3} \Gamma(\gamma_1 + \gamma_2 - 1) \Gamma(\gamma_1 + \gamma_3 - 1) \sigma_1^{\rho(\gamma_2 + \gamma_3 - 1)}}{\Omega_1^{\gamma_1} \Omega_2^{\gamma_2} \Gamma^2(\gamma_1) \Gamma(\gamma_2) \Gamma(\gamma_3) (1 - b\sigma_1)^{\rho\gamma_1} (1 - c\sigma_1)^{\rho\gamma_3 + 1}} \times$$

$$\times \int_0^1 \left\{ \left[ a_1 + a_2 \frac{\sigma_1^p \xi}{\Omega_1(1 - b\sigma_1)^p} \right]^{1 - \gamma_1 - \gamma_2} \left[ a_1 + a_3 \frac{\sigma_1^p (1 - \xi)}{\Omega_2(1 - c\sigma_1)^p} \right]^{1 - \gamma_1 - \gamma_3} \times \right. \quad (3.18)$$

$$\left. \times \xi^{\gamma_1 - 1} (1 - \xi)^{\gamma_2 - 1} \sigma_1^{\rho - 1} \left[ 1 + (b - c) \frac{\sigma_1^p \xi}{1 - b\sigma_1} \right] \right\} d\xi, \quad 0 < \sigma_1 < \frac{1}{b}$$

$$\varphi_1(\sigma_1) = \frac{\rho a_1^{\gamma_1} a_2^{\gamma_2} a_3^{\gamma_3} \Gamma(\gamma_1 + \gamma_2 - 1) \Gamma(\gamma_1 + \gamma_3 - 1) \sigma_1^{\rho(\gamma_2 + \gamma_3 - 1)}}{\Omega_2^{\gamma_2} \Omega_1^{\gamma_1} \Gamma^2(\gamma_1) \Gamma(\gamma_2) \Gamma(\gamma_3) (1 - c\sigma_1)^{\rho\gamma_2 + 1} (b\sigma_1 - 1)^{\rho\gamma_1}} \times$$

$$\times \int_0^1 \left\{ \frac{\xi^{\gamma_1 - 1} (1 + \xi)^{\gamma_2 - 1} \left[ \sigma_1^{\rho - 1} + (b - c) \frac{\sigma_1^p \xi}{b\sigma_1 - 1} \right]}{\left[ a_1 + \frac{a_2 \sigma_1^p}{\Omega_1(b\sigma_1 - 1)^p} \xi \right]^{\gamma_1 + \gamma_2 - 1} \left[ a_1 + a_3 \frac{\sigma_1^p (1 + \xi)}{\Omega_2(1 - c\sigma_1)^p} \right]^{\gamma_1 + \gamma_3 - 1}} \right\} d\xi +$$

$$+ \frac{\xi^{2n-3}(1+\xi)^{n-1} \left[ (b-c) \frac{\sigma_1^\rho}{b\sigma_1-1} + \xi \sigma_1^{\rho-1} \right]}{Q} d\xi \quad \frac{1}{b} < \sigma_1 < \frac{1}{c} \quad (3.19)$$

$$Q = \left[ \frac{a_2 \sigma_1^\rho}{\Omega_1 (\sigma_1 b - 1)^\rho} + a_1 \xi \right]^{n_1+n-1} \left\{ \frac{a_3 \sigma_1^\rho}{\Omega_2 (1-c\sigma_1)^\rho} + \right. \\ \left. + \xi \left[ a_1 + \frac{a_3 \sigma_1^\rho}{\Omega_2 (1-c\sigma_1)^\rho} \right] \right\}^{n_1+n-1} \\ \varphi_1(\sigma_1) = 0 \quad \text{при } \sigma_1 < 0, \quad \sigma_1 > \frac{1}{c}$$

В применении же к распределению (1.3), получим

$$\varphi_1(\sigma_1) = \frac{\rho}{4} \sum_{j, k, l}^{1, 2} b_{1j} b_{2k} b_{1l} b_{3l} \Gamma\left(\frac{n_{1j} + n_{2k} + 1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n_{1j} + n_{3l} + 1}{2}\right) \times \\ \times \Omega_1^{n_{1j}} \Omega_2^{n_{1j}} (1-c\sigma_1)^{\rho n_{1j}-1} (1-b\sigma_1)^{\rho n_{1j}-1} \sigma_1^{\rho(n_{2k} + n_{3l} + 1)} \times \\ \times \int_0^1 \frac{[1-b\sigma_1 + \xi(b-c)\sigma_1]^{\rho n_{2k}} (1-\xi)^{\rho n_{3l}} d\xi}{Q_1} \quad 0 \leq \sigma_1 \leq \frac{1}{b} \quad (3.20)$$

$$Q_1 = [a_1^2 \Omega_1^2 (1-b\sigma_1)^{2\rho} + a_2^2 \xi^2 \sigma_1^{2\rho}]^{\frac{n_{1j} + n_{2k} + 1}{2}} [a_1^2 \Omega_2^2 (1-c\sigma_1)^{2\rho} + \\ + a_3^2 \sigma_1^{2\rho} (1-\xi)^2]^{\frac{n_{1j} + n_{3l} + 1}{2}}$$

$$\varphi_1(\sigma_1) = \frac{\rho}{4} \sum_{j, k, l}^{1, 2} b_{1j} b_{2k} b_{1l} b_{3l} \Gamma\left(\frac{n_{1j} + n_{2k} + 1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n_{1j} + n_{3l} + 1}{2}\right) \times \\ \times \Omega_1^{n_{1j}} \Omega_2^{n_{1j}} (1-c\sigma_1)^{\rho n_{1j}-1} (b\sigma_1-1)^{\rho n_{1j}-1} \sigma_1^{\rho(n_{2k} + n_{3l} + 1)} \times \\ \times \int_0^1 \frac{[b\sigma_1-1 + \xi(b-c)\sigma_1]^{\rho n_{2k}} (1+\xi)^{\rho n_{3l}} d\xi}{Q_2} \quad \frac{1}{b} \leq \sigma_1 \leq \frac{1}{c} \quad (3.21)$$

$$Q_2 = [a_1^2 \Omega_1^2 (b\sigma_1-1)^{2\rho} + a_2^2 \xi^2 \sigma_1^{2\rho}]^{\frac{n_{1j} + n_{2k} + 1}{2}} [a_1^2 \Omega_2^2 (1-c\sigma_1)^{2\rho} + \\ + a_3^2 \sigma_1^{2\rho} (1+\xi)^2]^{\frac{n_{1j} + n_{3l} + 1}{2}}$$

$$\varphi(\sigma_1) = 0 \quad \text{при } \sigma_1 < 0, \quad \sigma_1 > 1/c$$



Плотности распределения  $\sigma_2$  и  $\sigma_1$  определяются по формулам

$$\begin{aligned}\varphi_2(\sigma_2) &= d_2 \varphi_1 \left( \frac{1}{b} - d_2 \sigma_2 \right) \\ \varphi_3(\sigma_3) &= d_3 \varphi_1 \left( \frac{1}{c} + d_3 \sigma_3 \right)\end{aligned}\quad (3.22)$$

где для задачи *g*

$$d_2 = \frac{F_2(a_3 - a_2)}{F_1(a_2 - a_1)}, \quad d_3 = \frac{F_2(a_3 - a_2)}{F_1(a_2 - a_1)}$$

а для задачи *e*

$$d_2 = -\frac{F_2}{F_1}, \quad d_3 = \frac{F_2}{F_1}$$

4. *Расчет на прочность.* Положим, что прочностные характеристики стержней являются достоверными. В этом случае задача сводится к определению вероятности  $p_i$  выполнения условия

$$-[\sigma_i] \leq \sigma_i \leq [\sigma_i], \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.1)$$

где  $[\sigma_i]$  — значение допускаемого напряжения для стержня  $i$ . Принимая  $\sigma_i^- = -[\sigma_i]$  и  $\sigma_i^+ = [\sigma_i]$ , искомую вероятность можно определить соответственно по формуле (2.12). Если прочностные характеристики рассматривать не как достоверные, а с учетом разброса их экспериментальных данных, то, обозначая функцию распределения  $[\sigma_i]$  через  $f_i([\sigma_i])$ , запишем формулу определения вероятности  $p_i$ , с которой удовлетворяется условие прочности (4.1):

$$\begin{aligned}p_i([\sigma_i] \geq |\sigma_i|) &= \int_0^{[\sigma_i]} \varphi(\sigma_i) \int_{\sigma_i^-}^{[\sigma_i]} f([\sigma_i]) d[\sigma_i] d\sigma_i + \\ &+ \int_{-[\sigma_i]}^0 \varphi(\sigma_i) \int_{-[\sigma_i]}^{\sigma_i} f([\sigma_i]) d[\sigma_i] d\sigma_i\end{aligned}\quad (4.2)$$

5. *Численный пример.* Рассмотрим двухслойную трубу под действием внутреннего давления (фиг. 1, задача *в*), принимая, что оба слоя трубы имеют одну и ту же толщину ( $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ ) и изготовлены из материала, разброс механических свойств которого можно описать распределением Пирсона. Плотности распределения напряжений в слоях 1 и 2 можно определить согласно формулам (2.10), (2.11) и (2.14).

В зависимости от разброса  $D_i/m_i^2$  показателя  $x_i$  механических свойств, определяемых уравнениями (1.4), в табл. 2 даны вероятности того, что напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  не превосходят  $\sigma$ , для которого слева таблицы даны значения  $\sigma \delta / q r$ .

Значения вероятности  $p(\varepsilon_i < \tau)$

$\sigma_i/qr$	$\frac{D_1}{m_1} = -\frac{D_2}{m_2} = 0.1$	$\frac{D_1}{m_1} = \frac{D_2}{m_2} = 0.2$	$\frac{D_1}{m_1} = \frac{D_2}{m_2} = 0.3$	$\frac{D_1}{m_1} = \frac{1}{3};$	$\frac{D_2}{m_2} = 0.2$
				для $\varepsilon_1$	для $\varepsilon_2$
0.1	0	0.0009	0.0086	0.0015	0.0071
0.2	0.0007	0.0197	0.0579	0.0264	0.0517
0.3	0.0285	0.0988	0.1631	0.1024	0.1559
0.4	0.1497	0.2665	0.3174	0.2720	0.3208
0.5	0.5	0.5	0.5	0.4753	0.5247
0.6	0.8503	0.7335	0.6826	0.6792	0.7280
0.7	0.9715	0.9012	0.8369	0.8441	0.8976
0.8	0.9993	0.9803	0.9421	0.9483	0.9736
0.9	1.0000	0.9991	0.9914	0.9929	0.9985

Отметим, что согласно достоверным значениям параметров  $x_6$ , как это делается в обычных расчетах без вероятностей, мы имели бы

$$p\left(\varepsilon_i < 0.5 \frac{qr}{\delta}\right) = 0 \text{ и } p\left(\varepsilon_i > 0.5 \frac{qr}{\delta}\right) = 1, \quad i = 1, 2.$$

СКТБ Института механики  
АН Армянской ССР

Поступила 4 XI 1980

Ա. Մ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ

ՍՈՂՔԻ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐՈՒՄ ՍՏԱՏԻՍՏԻԿՈՐԵՆ-ԱՆՈՐՈՇ ՉՈՂԱՅԻՆ  
ՍԻՍՏԵՄՆԵՐԻ ՉԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՉԱՇՎԱՐԿԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Ինչպես հայանի է նյութերի սողքի վերաբերյալ փորձարարական տվյալները ունեն բավականին մեծ ցրվածություն և սովորական հաշվարկները, որոնք հիմնված են տվյալ միջինացված, արժեքների վրա հուսալի չեն հանդիսանում: Այս աշխատանքում որոշվում են տարբեր տեսակի երկու և երեք ստատիկորեն-անորոշ ձողային սիստեմներում լարումների բաշխման խտությունները՝ հիմնված ձողերի մեխանիկական բնութագրերի ստատիստիկական ցուցանիշների վրա: Կիրառված ձևը հնարավորություն է տալիս որոշել լարումները գտնելու հավանականությունը ձողերում ցանկացած տված սահմաններում՝ ինտեգրելով լարումների բաշխման խտությունը այդ սահմաններում:

Որպես ֆունկցիաներ ղեֆորմացիոն բնութագրերի բաշխման համար դիտարկված են նորմալ բաշխման օրինքը, Պիրսոնի բաշխման 3-րդ տիպը, ինչպես նաև բաշխման մի նոր տեսակ, որը փորձարարական հիմնավորում է ստացել մի շարք նյութերի համար:

Որպես օրինակ է բնարկված սողքի վիճակում գտնվող երկշերտ խողովակի ամրության հավանականային հաշվարկը ներքին ճնշման պայմաններում:



# ON PROBABILITY CALCULATION OF PIVOTED STATICALLY-INDEFINITE SYSTEMS TAKING ACCOUNT CREEP

A. M. SIMONIAN

## S u m m a r y

Experimental properties of creep of materials have considerable distribution and therefore the usual calculation based on the average data of these properties are not hopeful. The distribution densities of stresses in different double and triple-pivoted statically-indefinite systems on the basis of statistical data of mechanical properties of pivots are defined in this work. It becomes possible to determine the probability of finding the stresses in any pivot in the arbitrary given limits by the integration of the stress distribution densities in these limits. As a distribution function of strain properties the normal distribution, Pearson type III distribution and a new type of distribution are considered each having experimental confirmation for some materials.

As an example the probability calculation of two-layer cylinders under internal pressure is considered.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В. Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах конструкций. М.: Стройиздат, 1971. 255 с.
2. Симонян А. М. К вопросу о выборе функции распределения при высокотемпературной ползучести металлов.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1978, т. 31, № 2, с. 55—66.
3. Качанов Л. М. Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960, 450 с.
4. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.—Л.: Гостехтеориздат, 1952, 323 с.
5. Симонян А. М. Исследование ползучести стали X18H10T при больших деформациях. Проблемы прочности, 1975, № 6, с. 63—66.
6. Гисденко Б. В. Курс теории вероятностей. М.: Физматгиз, 1961, 406 с.