

А. Н. ТЕР-МКРТИЧЯН

ДИСТОРСИИ В ОРТОТРОПНОМ ТЕЛЕ

§ 1. Дисторсии в анизотропном твердом теле изучались в [1], [2].

Авторы, рассматривавшие прямолинейную дислокацию, одну из осей координат принимали параллельной дислокационной линии [1].

В настоящей работе такого ограничения не делается, рассматривается ортотропная среда; в качестве осей координат принимаются главные оси ортотропной анизотропии.

Берется общее решение дифференциальных уравнений в перемещениях для ортотропной среды с помощью трех произвольных функций [3].

В качестве упомянутых определяющих функций принимаются многозначные функции. При этом могут быть рассмотрены два варианта многозначных перемещений, которые дают два типа прямолинейной дисторсии.

§ 2. I тип многозначных перемещений

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{M_1^{(j)}}{c_1^{(j)}} \ln(y^2 + z_j^2) \\ u_2 &= -\frac{M_1^{(j)}}{c_2^{(j)}} \ln(y^2 + z_j^2) \\ u_3 &= 2 M_1^{(j)} \operatorname{arctg} \frac{z_j}{y} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь суммирование по значку $j = 1, 2, 3$

$$y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \quad z_j = \bar{\alpha}_3^{(j)} x_3,$$

x_1, x_2, x_3 — декартовы оси координат, совпадающие с главными осями ортотропной анизотропии; α_1, α_2 — совершенно произвольные параметры, определяющие положение дислокационной линии в главной плоскости $Ox_1 x_2$ ортотропной анизотропии; $\bar{\alpha}_3^{(j)}$ — модули величин мнимых корней бикубического уравнения для ортотропной среды; $M_1^{(j)}$ — постоянные величины, связанные между собой двумя уравнениями, которые получаются из равенства нулю погонной поверхностной силы вдоль дислокационной линии.

$$\begin{aligned} \bar{c}_1^{(j)} &= \bar{\alpha}_3^{(j)} \times \\ &\times \frac{(A_{32} + A_{55})(A_{21} + A_{44}) \alpha_1 \alpha_2^2 - (A_{31} + A_{66}) \alpha_1 (A_{22} \alpha_2^2 - A_{55} (\bar{\alpha}_3^{(j)})^2 + A_{44} \alpha_1^2)}{(A_{22} \alpha_2^2 - A_{55} (\bar{\alpha}_3^{(j)})^2 + A_{44} \alpha_1^2) (-A_{33} (\bar{\alpha}_3^{(j)})^2 + A_{66} \alpha_1^2 + A_{55} \alpha_2^2) + (A_{23} + A_{55}) \alpha_2^2 (\bar{\alpha}_3^{(j)})^2} \\ \bar{c}_2^{(j)} &= \bar{\alpha}_3^{(j)} \times \\ &\times \frac{(A_{13} + A_{66})(A_{12} + A_{44}) \alpha_1^2 \alpha_2 - (A_{22} + A_{55}) \alpha_2 (A_{11} \alpha_1^2 + A_{44} \alpha_2^2 - A_{66} (\bar{\alpha}_3^{(j)})^2)}{(A_{11} \alpha_1^2 + A_{44} \alpha_2^2 - A_{66} (\bar{\alpha}_3^{(j)})^2) (-A_{33} (\bar{\alpha}_3^{(j)})^2 + A_{66} \alpha_1^2 + A_{55} \alpha_2^2) + (A_{13} + A_{66}) \alpha_1^2 (\bar{\alpha}_3^{(j)})^2} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь и дальше обозначено: $A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{12}, A_{23}, A_{31}, A_{44}, A_{55}, A_{66}$ — упругие постоянные ортотропного материала.

Формулы для перемещений после выражений $M_1^{(2)}$ и $M_1^{(3)}$ через $M_1^{(1)}$ приобретают следующий вид:

$$u_1 = -M_1^{(1)} \left[\frac{1}{c_1^{(1)}} \ln(y^2 + z_1^2) - \frac{1}{c_1^{(2)}} \frac{\Gamma_1 D_3 - D_1 \Gamma_3}{\Gamma_2 D_3 - D_2 \Gamma_3} \ln(y^2 + z_2^2) - \frac{1}{c_1^{(3)}} \frac{\Gamma_2 D_1 - D_2 \Gamma_1}{\Gamma_2 D_3 - D_2 \Gamma_3} \ln(y^2 + z_3^2) \right] \quad (2.3)$$

$$u_2 = -M_1^{(1)} \left[\frac{1}{c_2^{(1)}} \ln(y^2 + z_1^2) - \frac{1}{c_2^{(2)}} \frac{\Gamma_1 D_3 - D_1 \Gamma_3}{\Gamma_2 D_3 - D_2 \Gamma_3} \ln(y^2 + z_2^2) - \frac{1}{c_2^{(3)}} \frac{\Gamma_2 D_1 - D_2 \Gamma_1}{\Gamma_2 D_3 - D_2 \Gamma_3} \ln(y^2 + z_3^2) \right]$$

$$u_3 = M_1^{(1)} \left[\operatorname{arctg} \frac{z_1}{y} - \frac{\Gamma_1 D_3 - D_1 \Gamma_3}{\Gamma_2 D_3 - D_2 \Gamma_3} \operatorname{arctg} \frac{z_2}{y} - \frac{\Gamma_2 D_1 - D_2 \Gamma_1}{\Gamma_2 D_3 - D_2 \Gamma_3} \operatorname{arctg} \frac{z_3}{y} \right] \quad (2.3)$$

В формулы (2.3) введены нижеследующие сокращенные обозначения:

$$\Gamma_j = \frac{1}{\alpha_3^{(j)}} \operatorname{arctg} \frac{\bar{\alpha}_3^{(j)} x}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}} \left[\alpha_1^2 \sum_1^{(j)} + \alpha_2^2 \sum_2^{(j)} + 2\alpha_1 \alpha_2 A_{44} (\alpha_2 \bar{\alpha}_3^{(j)} + \alpha_1 \bar{b}_3^{(j)}) \right] - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}{\bar{\alpha}_3^{(j)} x} [A_{55} \alpha_2 (\alpha_2 - \bar{\alpha}_3^{(j)} \bar{b}_3^{(j)}) + A_{66} \alpha_1 (\alpha_1 - \bar{\alpha}_3^{(j)} \bar{\alpha}_3^{(j)})] \quad j=1, 2, 3 \quad (2.4)$$

здесь

$$\bar{\alpha}_3^{(j)} = \bar{\alpha}_3^{(j)} \times \frac{(A_{23} + A_{55})(A_{12} + A_{44}) \alpha_1 \alpha_2^2 - (A_{31} + A_{66}) \alpha_1 (A_{22} \alpha_2^2 - A_{55} (\bar{\alpha}_3^{(j)})^2 + A_{44} \alpha_1^2)}{(\alpha_{11} \alpha_1^2 + A_{44} \alpha_2^2 - A_{66} (\bar{\alpha}_3^{(j)})^2) (A_{22} \alpha_2^2 - A_{55} (\bar{\alpha}_3^{(j)})^2 + A_{44} \alpha_1^2) - (A_{12} + A_{44})^2 \alpha_1^2 \alpha_2^2} \quad (2.5)$$

$$\bar{b}_3^{(j)} = \bar{\alpha}_3^{(j)} \times \frac{(A_{12} + A_{44})(A_{31} + A_{66}) \alpha_1^2 \alpha_2 - (A_{23} + A_{55}) \alpha_2 (A_{11} \alpha_1^2 + A_{44} \alpha_2^2 - A_{66} (\bar{\alpha}_3^{(j)})^2)}{(A_{11} \alpha_1^2 + A_{44} \alpha_2^2 - A_{66} (\bar{\alpha}_3^{(j)})^2) (A_{55} \alpha_2^2 - A_{55} (\bar{\alpha}_3^{(j)})^2 + A_{44} \alpha_1^2) - (A_{12} + A_{44})^2 \alpha_1^2 \alpha_2^2}$$

$$\sum_1^{(j)} = A_{11} \alpha_1 \bar{\alpha}_3^{(j)} + A_{12} \alpha_2 \bar{b}_3^{(j)} + A_{13} \bar{\alpha}_3^{(j)}$$

$$\sum_2^{(j)} = A_{21} \alpha_1 \bar{\alpha}_3^{(j)} + A_{22} \alpha_2 \bar{b}_3^{(j)} + A_{23} \bar{\alpha}_3^{(j)} \quad (2.6)$$

$$\sum_3^{(j)} = A_{31} \alpha_1 \bar{\alpha}_3^{(j)} + A_{32} \alpha_2 \bar{b}_3^{(j)} + A_{33} \bar{\alpha}_3^{(j)}$$

$$D_j = \frac{m_{x_i x_i}^{(j)}}{\alpha_3^{(j)}} \operatorname{arctg} \frac{\bar{\alpha}_3^{(j)} x}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}} - m_{x_i x_i}^{(j)} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}{\bar{\alpha}_3^{(j)} x} \quad (2.7)$$

$$m_{x_i x_i}^{(j)} = \alpha_1 \alpha_2 (\sum_1^{(j)} - \sum_2^{(j)}) + (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) A_{44} (\alpha_2 \bar{\alpha}_3^{(j)} + \alpha_1 \bar{b}_3^{(j)}) \quad (2.8)$$

$$m_{x_1 x_1}^{(j)} = \alpha_2 A_{66} (\alpha_1 - \bar{\alpha}_3^{(j)} \bar{\alpha}_3^{(j)}) - \alpha_1 A_{55} (\alpha_2 - \bar{\alpha}_3^{(j)} \bar{b}_3^{(j)}) \quad (2.9)$$

* — совершенно произвольная величина.

Компоненты тензора напряжений, вычисленные исходя из перемещений (2.3), будут

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 2M_1^{(1)} y \left[\frac{\sum_1^{(1)}}{\rho_1^2} - \frac{\Gamma_1 D_3 - D_1 \Gamma_3}{\Gamma_2 D_3 - D_2 \Gamma_3} \frac{\sum_1^{(2)}}{\rho_2^2} - \frac{\Gamma_2 D_1 - D_2 \Gamma_1}{\Gamma_2 D_3 - D_2 \Gamma_3} \frac{\sum_1^{(3)}}{\rho_3^2} \right] \\ \sigma_2 &= 2M_1^{(1)} y \left[\frac{\sum_2^{(1)}}{\rho_1^2} - \frac{\Gamma_1 D_3 - D_1 \Gamma_3}{\Gamma_2 D_3 - D_2 \Gamma_3} \frac{\sum_2^{(2)}}{\rho_2^2} - \frac{\Gamma_3 D_1 - D_3 \Gamma_1}{\Gamma_2 D_3 - D_2 \Gamma_3} \frac{\sum_2^{(3)}}{\rho_3^2} \right] \\ \sigma_3 &= 2M_1^{(1)} y \left[\frac{\sum_3^{(1)}}{\rho_1^2} - \frac{\Gamma_1 D_3 - D_1 \Gamma_3}{\Gamma_2 D_3 - D_2 \Gamma_3} \frac{\sum_3^{(2)}}{\rho_2^2} - \frac{\Gamma_3 D_1 - D_3 \Gamma_1}{\Gamma_2 D_3 - D_2 \Gamma_3} \frac{\sum_3^{(3)}}{\rho_3^2} \right] \\ \tau_{1,2} &= 2 M_1^{(1)} A_{44} y \left[\frac{1}{\rho_1^2} (\alpha_2 \bar{\alpha}_3^{(1)} + \alpha_1 \bar{b}_3^{(1)}) - \frac{1}{\rho_2^2} (\alpha_2 \bar{\alpha}_3^{(2)} + \right. \\ &\quad \left. + \alpha_1 \bar{b}_3^{(2)}) \frac{\Gamma_1 D_3 - D_1 \Gamma_3}{\Gamma_2 D_3 - D_2 \Gamma_3} - \frac{1}{\rho_3^2} (\alpha_2 \bar{\alpha}_3^{(3)} + \alpha_1 \bar{b}_3^{(3)}) \frac{\Gamma_2 D_1 - D_2 \Gamma_1}{\Gamma_2 D_3 - D_2 \Gamma_3} \right] \\ \tau_{2,3} &= -2 M_1^{(1)} A_{55} \left[\frac{z_1}{\rho_1} (\alpha_2 - \alpha_1^{(1)} \bar{b}_3^{(1)}) - \frac{z_2}{\rho_2} (\alpha_2 - \bar{\alpha}_3^{(2)} \bar{b}_3^{(2)}) \frac{\Gamma_1 D_3 - D_1 \Gamma_3}{\Gamma_2 D_3 - D_2 \Gamma_3} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{z_3}{\rho_3} (\alpha_2 - \bar{\alpha}_3^{(3)} \bar{b}_3^{(3)}) \frac{\Gamma_2 D_1 - D_2 \Gamma_1}{\Gamma_2 D_3 - D_2 \Gamma_3} \right] \quad (2.10) \\ \tau_{3,1} &= -2 M_1^{(1)} A_{66} \left[\frac{z_1}{\rho_1} (\alpha_1 - \bar{\alpha}_3^{(1)} \bar{\alpha}_3^{(1)}) - \frac{z_2}{\rho_2} (\alpha_1 - \bar{\alpha}_3^{(2)} \bar{\alpha}_3^{(2)}) \frac{\Gamma_1 D_3 - D_1 \Gamma_3}{\Gamma_2 D_3 - D_2 \Gamma_3} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{z_3}{\rho_3} (\alpha_1 - \bar{\alpha}_3^{(3)} \bar{\alpha}_3^{(3)}) \frac{\Gamma_2 D_1 - D_2 \Gamma_1}{\Gamma_2 D_3 - D_2 \Gamma_3} \right] \end{aligned}$$

Здесь обозначено:

$$\rho_1^2 = y^2 + z_1^2, \quad \rho_2^2 = y^2 + z_2^2, \quad \rho_3^2 = y^2 + z_3^2 \quad (2.11)$$

§ 3. II тип многозначных перемещений

$$\begin{aligned} u_1 &= 2 \frac{M_2^{(j)}}{c_1^{(j)}} \operatorname{arctg} \frac{z_j}{y} \\ u_2 &= 2 \frac{M_2^{(j)}}{c_2^{(j)}} \operatorname{arctg} \frac{z_j}{y} \\ u_3 &= M_2^{(j)} \ln (y^2 + z_j^2) \end{aligned} \quad (3.1)$$

В формулах (3.1) производится суммирование по значку $j = 1, 2, 3$. Условие равенства нулю погонной поверхностной силы вдоль дислокационной линии, определяемой параметрами α_1 и α_2 , дает одно уравнение, связывающее три указанные постоянные. Таким образом, две из указанных постоянных являются совершенно произвольными. В дальнейшем приняты

$M_2^{(1)}$ и $M_2^{(2)}$. Упомянутое уравнение дает выражение для постоянной $M_2^{(3)}$ в следующем виде:

$$M_2^{(3)} = -M_2^{(1)} \frac{\sum_3^{(1)} \bar{\alpha}_3^{(3)} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}{\bar{\alpha}_3^{(1)} x}}{\sum_3^{(3)} \bar{\alpha}_3^{(1)} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}{\bar{\alpha}_3^{(3)} x}} - M_2^{(2)} \frac{\sum_3^{(2)} \bar{\alpha}_3^{(3)} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}{\bar{\alpha}_3^{(2)} x}}{\sum_3^{(3)} \bar{\alpha}_3^{(2)} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}{\bar{\alpha}_3^{(3)} x}} \quad (3.2)$$

Вводим сокращенные обозначения в формулу (3.2)

$$\frac{\sum_3^{(1)} \bar{\alpha}_3^{(3)} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}{\bar{\alpha}_3^{(1)} x}}{\sum_3^{(3)} \bar{\alpha}_3^{(1)} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}{\bar{\alpha}_3^{(3)} x}} = E_1$$

$$\frac{\sum_3^{(2)} \bar{\alpha}_3^{(3)} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}{\bar{\alpha}_3^{(2)} x}}{\sum_3^{(3)} \bar{\alpha}_3^{(2)} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}{\bar{\alpha}_3^{(3)} x}} = E_2 \quad (3.3)$$

Таким образом, получается сокращенное выражение

$$M_2^{(3)} = -M_2^{(1)} E_1 - M_2^{(2)} E_2 \quad (3.4)$$

В результате получим формулы для многозначных перемещений с двумя произвольными постоянными $M_2^{(1)}$ и $M_2^{(2)}$

$$u_1 = 2 \left\{ M_2^{(1)} \left[\frac{1}{c_1^{(1)}} \operatorname{arctg} \frac{z_1}{y} - \frac{1}{c_1^{(3)}} E_1 \operatorname{arctg} \frac{z_3}{y} \right] + M_2^{(2)} \left[\frac{1}{c_1^{(2)}} \operatorname{arctg} \frac{z_2}{y} - \frac{1}{c_1^{(3)}} E_2 \operatorname{arctg} \frac{z_3}{y} \right] \right\} \quad (3.5)$$

$$u_2 = 2 \left\{ M_2^{(1)} \left[\frac{1}{c_2^{(1)}} \operatorname{arctg} \frac{z_1}{y} - \frac{1}{c_2^{(3)}} E_1 \operatorname{arctg} \frac{z_3}{y} \right] + M_2^{(2)} \left[\frac{1}{c_2^{(2)}} \operatorname{arctg} \frac{z_2}{y} - \frac{1}{c_2^{(3)}} E_2 \operatorname{arctg} \frac{z_3}{y} \right] \right\}$$

$$u_3 = M_2^{(1)} [\ln(y^2 + z_1^2) - E_1 \ln(y^2 + z_3^2)] + M_2^{(2)} [\ln(y^2 + z_2^2) - E_2 \ln(y^2 + z_3^2)]$$

Компоненты тензора напряжений, вычисленные исходя из формул для перемещений (3.5), будут иметь нижеследующий вид:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= 2 \left\{ \frac{M_2^{(1)} z_1}{\rho_1^2} \Sigma_1^{(1)} + \frac{M_2^{(2)} z_2}{\rho_2^2} \Sigma_1^{(2)} - \frac{(M_2^{(1)} E_1 + M_2^{(2)} E_2) z_3}{\rho_3^2} \Sigma_1^{(3)} \right\} \\
\sigma_2 &= 2 \left\{ \frac{M_2^{(1)} z_1}{\rho_1^2} \Sigma_2^{(1)} + \frac{M_2^{(2)} z_2}{\rho_2^2} \Sigma_2^{(2)} - \frac{(M_2^{(1)} E_1 + M_2^{(2)} E_2) z_3}{\rho_3^2} \Sigma_2^{(3)} \right\} \\
\sigma_3 &= 2 \left\{ \frac{M_2^{(1)} z_1}{\rho_1^2} \Sigma_3^{(1)} + \frac{M_2^{(2)} z_2}{\rho_2^2} \Sigma_3^{(2)} - \frac{(M_2^{(1)} E_1 + M_2^{(2)} E_2) z_3}{\rho_3^2} \Sigma_3^{(3)} \right\} \\
\tau_{12} &= 2 A_{44} \left[\frac{M_2^{(1)} z_1 (\alpha_2 \bar{a}_3^{(1)} + \alpha_1 \bar{b}_3^{(1)})}{\rho_1^2} + \frac{M_2^{(2)} z_2 (\alpha_2 \bar{a}_3^{(2)} + \alpha_1 \bar{b}_3^{(2)})}{\rho_2^2} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{(M_2^{(1)} E_1 + M_2^{(2)} E_2) (\alpha_2 \bar{a}_3^{(3)} + \alpha_1 \bar{b}_3^{(3)}) z_3}{\rho_3^2} \right] \\
\tau_{23} &= 2 A_{55} y \left[\frac{M_2^{(1)} (\alpha_2 - \bar{a}_3^{(1)} \bar{b}_3^{(1)})}{\rho_1^2} + \frac{M_2^{(2)} (\alpha_2 - \bar{a}_3^{(2)} \bar{b}_3^{(2)})}{\rho_2^2} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{(M_2^{(1)} E_1 - M_2^{(2)} E_2) (\alpha_2 - \bar{a}_3^{(3)} \bar{b}_3^{(3)})}{\rho_3^2} \right] \\
\tau_{31} &= 2 A_{66} y \left[\frac{M_2^{(1)} (\alpha_1 - \bar{a}_3^{(1)} \bar{a}_3^{(1)})}{\rho_1^2} + \frac{M_2^{(2)} (\alpha_1 - \bar{a}_3^{(2)} \bar{a}_3^{(2)})}{\rho_2^2} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{(M_2^{(1)} E_1 + M_2^{(2)} E_2) (\alpha_1 - \bar{a}_3^{(3)} \bar{a}_3^{(3)})}{\rho_3^2} \right]
\end{aligned} \tag{3.6}$$

§ 4. Краевая задача для многосвязного ортотропного тела при наличии дисторсий

Тело, подверженное дисторсии, может иметь совершенно свободную от сил поверхность. Это условие в краткой записи выражается следующим уравнением:

$$\hat{T}(\vec{u}) \cdot \vec{n} = 0 \tag{4.1}$$

Здесь $\hat{T}(\vec{u})$ — тензор напряжений, рассчитанный по вектору перемещения, имеющему в своем составе многозначные выражения; \vec{n} — единичный вектор нормали к свободной искомой поверхности тела.

В развернутом виде уравнение (4.1) эквивалентно трем нижеследующим:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 l + \tau_{12} m + \tau_{13} n &= 0 \\
\tau_{21} l + \sigma_2 m + \tau_{23} n &= 0 \\
\tau_{31} l + \tau_{32} m + \sigma_3 n &= 0
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Здесь l, m, n — направляющие косинусы нормали к свободной поверхности. Если обозначить уравнение искомой свободной поверхности в виде $F(x_1, x_2, x_3) = 0$, то направляющие косинусы нормали к этой поверхности будут пропорциональны частным производным указанной функции, то есть

$$l \sim \frac{\partial F}{\partial x_1}, \quad m \sim \frac{\partial F}{\partial x_2}, \quad n \sim \frac{\partial F}{\partial x_3}$$

Учитывая эти соотношения, уравнениям (4.2) можно придать такой вид:

$$\begin{aligned} \sigma_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \tau_{12} \frac{\partial F}{\partial x_2} + \tau_{13} \frac{\partial F}{\partial x_3} &= 0 \\ \tau_{12} \frac{\partial F}{\partial x_1} + \sigma_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + \tau_{23} \frac{\partial F}{\partial x_3} &= 0 \\ \tau_{31} \frac{\partial F}{\partial x_1} + \tau_{32} \frac{\partial F}{\partial x_2} + \sigma_3 \frac{\partial F}{\partial x_3} &= 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Так как направляющие косинусы нормали к поверхности вообще не равны нулю, то необходимо, чтобы матрица коэффициентов уравнений (4.3)

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_2 & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_3 \end{vmatrix}$$

имела бы ранг $r = 2$, а определитель ее равнялся нулю.

В этом случае система (4.2) имеет единственное фундаментальное решение.

Это фундаментальное решение может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{aligned} l &\sim \frac{\partial F}{\partial x_1} \sim \tau_{23} \tau_{12} - \tau_{13} \sigma_2 \\ m &\sim \frac{\partial F}{\partial x_2} \sim \tau_{13} \tau_{21} - \tau_{23} \sigma_1 \\ n &\sim \frac{\partial F}{\partial x_3} \sim \sigma_1 \sigma_2 - \tau_{12}^2 \end{aligned} \quad (4.4)$$

При подстановке выражений (4.4) в (4.3) или (4.2) получим тождественное $0 = 0$ выполнение первых двух уравнений, а выполнение третьего возможно лишь при условии равенства нулю приводимого ниже определителя

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_2 & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (4.5)$$

Таким образом, компоненты тензора напряжений должны быть подчинены единственному условию (4.5) и если это условие в конечном счете будет давать реальную функцию координат x_1, x_2, x_3 , то поверхность, соответствующая этой функции, и будет искомой свободной поверхностью.

Из сказанного выше намечается следующий образ действий. Необходимо взять выражения компонентов тензора напряжений, рассчитанных по

перемещениям, имеющим в своем составе многозначные выражения и подставить полученные формулы для компонентов тензора напряжений в формулу (4.5). Из последнего уравнения определится уравнение искомой свободной поверхности, если таковая существует.

Исходя из формул (2.1) и (3.1) для рассмотренных в § 2 и § 3 настоящей статьи многозначных перемещений и рассчитав по ним компоненты тензора напряжений, получим для последних следующие выражения:

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= \frac{2}{\rho^2} \Sigma_1 (M_1 y + M_2 \bar{a}_3 x_3) \\
 \sigma_2 &= \frac{2}{\rho^2} \Sigma_2 (M_1 y + M_2 \bar{a}_3 x_3) \\
 \sigma_3 &= \frac{2}{\rho^2} \Sigma_3 (M_1 y + M_2 \bar{a}_3 x_3) \\
 \tau_{12} &= \frac{2 A_{44}}{\rho^2} (\bar{a}_3 a_2 + \bar{b}_3 a_1) (M_1 y + M_2 \bar{a}_3 x_3) \\
 \tau_{23} &= -\frac{2}{\rho^2} A_{55} (a_2 - \bar{b}_3 \bar{a}_3) (M_1 \bar{a}_3 x_3 - M_2 y) \\
 \tau_{13} &= -\frac{2}{\rho^2} A_{66} (a_1 - \bar{a}_3 \bar{a}_3) (M_1 \bar{a}_3 x_3 - M_2 y)
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

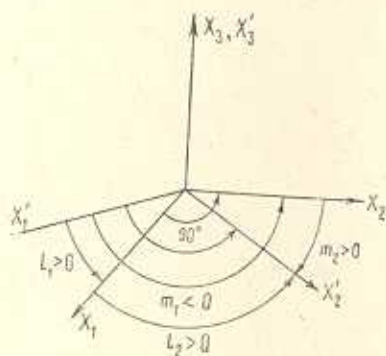
Формулы (4.6) нуждаются в следующих замечаниях: во-первых, они записаны лишь для одного какого-нибудь из трех ($j = 1, 2, 3$) корней бикубического уравнения, поэтому всюду индекс j опущен, во-вторых, $y = a_1 x_1 + a_2 x_2$, $\rho^2 = y^2 + \bar{a}_3^2 x_3^2$, в-третьих, все остальные величины определяются формулами (2.2), (2.5), (2.6) при одном каком-нибудь из трех ($j = 1, 2, 3$) рассматриваемом индексе корня бикубического уравнения.

Подставим выражения (4.6) в уравнение (4.5). Опуская все подробности, окончательно приходим к следующему алгебраическому уравнению:

$$\begin{aligned}
 & y^3 \{ M_1 M_2^2 [-A_{66} A_{55} A_{44} (a_1 - \bar{a}_3 \bar{a}_3) (a_2 - \bar{b}_3 \bar{a}_3) (\bar{a}_3 a_2 + \bar{b}_3 a_1) + A_{66}^2 (a_1 - \\
 & - \bar{a}_3 \bar{a}_3)^2 (a_1 - \bar{a}_3 \bar{a}_3) \Sigma_2 + A_{55} (a_2 - \bar{b}_3 \bar{a}_3) (a_1 - \bar{a}_3 \bar{a}_3) (\bar{a}_3 a_2 + \bar{b}_3 a_1) - \\
 & - A_{55}^2 \Sigma_1 (a_2 - \bar{b}_3 \bar{a}_3)^2] + M_1^3 [\Sigma_1 \Sigma_2 - A_{44}^2 (\bar{a}_3 a_2 + \bar{b}_3 a_1)^2] \} + \\
 & + y^2 \bar{a}_3 x_3 \{ [M_1^2 M_2 - M_2 (M_1^2 - M_2^2)] [-A_{66} A_{55} A_{44} (a_1 - \bar{a}_3 \bar{a}_3) (a_2 - \\
 & - \bar{b}_3 \bar{a}_3) (\bar{a}_3 a_2 + \bar{b}_3 a_1)] + [M_1^2 M_2 + M_2 (M_1^2 - M_2^2)] [A_{55}^2 \Sigma_1 (a_2 - \\
 & - \bar{b}_3 \bar{a}_3)^2 - A_{55} (a_2 - \bar{b}_3 \bar{a}_3) (a_1 - \bar{a}_3 \bar{a}_3) (\bar{a}_3 a_2 + \bar{b}_3 a_1)] + 3M_1^2 M_2 [\Sigma_1 \Sigma_2 - \\
 & - A_{44}^2 (\bar{a}_3 a_2 + \bar{b}_3 a_1)^2] \} + \\
 & + y (\bar{a}_3 x_3)^2 \{ [M_1 (M_1^2 - M_2^2) + M_1 M_2] [A_{66} A_{55} A_{44} (a_1 - \bar{a}_3 \bar{a}_3) (a_2 - \\
 & - \bar{b}_3 \bar{a}_3) (\bar{a}_3 a_2 + \bar{b}_3 a_1)] + [M_1 (M_1^2 - M_2^2) - M_1 M_2] [-A_{66}^2 (a_1 - \bar{a}_3 \bar{a}_3) \Sigma_2 + \\
 & + A_{55} (a_2 - \bar{b}_3 \bar{a}_3) (a_1 - \bar{a}_3 \bar{a}_3) (\bar{a}_3 a_2 + \bar{b}_3 a_1) - A_{55}^2 \Sigma_1 (a_2 - \bar{b}_3 \bar{a}_3)^2] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ 3M_1M_2^2[\Sigma_1\Sigma_2 - A_{44}^2(\bar{a}_3\bar{a}_2 + \bar{b}_3\bar{a}_1)^2] + (\bar{a}_3\bar{x}_3)^3 [M_1^2M_2[A_{00}A_{35}A_{44}(\alpha_1 - \\
 &- \bar{a}_3\bar{a}_3)(\bar{a}_3\bar{a}_2 + \bar{b}_3\bar{a}_1) - A_{00}^2(\alpha_1 - \bar{a}_3\bar{a}_3)^2\Sigma_2 + A_{35}(\alpha_2 - \bar{b}_3\bar{a}_3)(\alpha_1 - \\
 &- \bar{a}_3\bar{a}_3)(\bar{a}_3\bar{a}_2 + \bar{b}_3\bar{a}_1) - A_{35}^2\Sigma_1(\alpha_2 - \bar{b}_3\bar{a}_3)^2] + \\
 &+ M_2^3[\Sigma_1\Sigma_2 - A_{44}^2(\bar{a}_3\bar{a}_2 + \bar{b}_3\bar{a}_1)^2] = 0
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

С целью наиболее наглядного геометрического представления искомой поверхности вводим преобразование координат в следующем виде (фиг. 1):



Фиг. 1. К преобразованию осей координат

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} x_2'; \quad x_3 = x_3$$

Старые оси: x_1, x_2, x_3

Новые оси: x_1', x_2', x_3'

Формулы преобразования координат —

$$x_1 = l_1x_1' + m_1x_2' + n_1x_3'$$

$$x_2 = l_2x_1' + m_2x_2' + n_2x_3'$$

$$x_3 = l_3x_1' + m_3x_2' + n_3x_3'$$

и обратное преобразование —

$$x_1 = l_1x_1' + l_2x_2' + l_3x_3'$$

$$x_2 = m_1x_1' + m_2x_2' + m_3x_3'$$

$$x_3 = n_1x_1' + n_2x_2' + n_3x_3'$$

Таблица направляющих косинусов 4.1

По отношению к старым	Косинусы новых осей		
	x_1'	x_2'	x_3'
x_1	l_1	l_2	l_3
x_2	m_1	m_2	m_3
x_3	n_1	n_2	n_3

Используя основные зависимости между направляющими косинусами, получим их следующие выражения:

$$l_1 = + \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}, \quad l_2 = + \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

$$l_3 = 0; \quad x_1 = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} x_1' + \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} x_2'$$

$$m_1 = - \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}; \quad m_2 = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

$$m_3 = 0; \quad x_2 = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} x_1' + \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} x_2'$$

$$n_1 = 0, \quad n_2 = 0, \quad n_3 = 1; \quad x_3 = x_3' \tag{4.8}$$

С учетом указанного выше преобразования координат получим уравнение искомой поверхности в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 & x_1^{13} (a_1^2 + a_2^2)^{3/2} \{ M_1 M_2^2 [-A_{66} A_{55} A_{44} (a_1 - \bar{a}_3 \bar{a}_3) (a_2 - \bar{b}_3 \bar{a}_3) (\bar{a}_3 a_2 + \bar{b}_3 a_1) + \\
 & + A_{66}^2 (a_1 - \bar{a}_3 a_2)^2 (a_1 - \bar{a}_3 \bar{a}_3) \Sigma_2 + A_{55} (a_2 - \bar{b}_3 \bar{a}_3) (a_1 - \bar{a}_3 \bar{a}_3) (\bar{a}_3 a_2 + \bar{b}_3 a_1) - \\
 & - A_{55}^2 \Sigma_1 (a_2 - \bar{b}_3 \bar{a}_3)^2] + M_1^3 [\Sigma_1 \Sigma_2 - A_{44}^2 (\bar{a}_3 a_2 + \bar{b}_3 a_1)^2] \} + \\
 & + x_1^{12} x_3' (a_1^2 + a_2^2) \bar{a}_3 \{ [M_1^2 M_2 - M_2 (M_1^2 - M_2^2)] [-A_{66} A_{55} A_{44} (a_1 - \bar{a}_3 \bar{a}_3) (a_2 - \\
 & - \bar{b}_3 \bar{a}_3) (\bar{a}_3 a_2 + \bar{b}_3 a_1)] + [M_1^2 M_2 + M_2 (M_1^2 - M_2^2)] [A_{55}^2 \Sigma_1 (a_2 - \bar{b}_3 \bar{a}_3)^2 - \\
 & - A_{55} (a_2 - \bar{b}_3 \bar{a}_3) (a_1 - \bar{a}_3 \bar{a}_3) (\bar{a}_3 a_2 + \bar{b}_3 a_1)] + 3 M_1^2 [\Sigma_1 \Sigma_2 - A_{44} (\bar{a}_3 a_2 + \\
 & + \bar{b}_3 a_1)^2] \} + \\
 & + x_2' x_3^{12} \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \bar{a}_3^2 \{ [M_1^2 (M_1^2 - M_2^2) + M_1 M_2^2] [A_{66} A_{55} A_{44} (a_1 - \\
 & - \bar{a}_3 \bar{a}_3) (a_2 - \bar{b}_3 \bar{a}_3) (\bar{a}_3 a_2 + \bar{b}_3 a_1)] + [M_1 (M_1^2 - M_2^2) - M_1 M_2^2] [-A_{66}^2 (a_1 - \\
 & - \bar{a}_3 \bar{a}_3)^2 \Sigma_2 + A_{55} (a_2 - \bar{b}_3 \bar{a}_3) (a_1 - \bar{a}_3 \bar{a}_3) (\bar{a}_3 a_2 + \bar{b}_3 a_1) - A_{55}^2 (a_2 - \\
 & - \bar{b}_3 \bar{a}_3)^2] + 3 M_1 M_2^2 [\Sigma_1 \Sigma_2 - A_{44}^2 (\bar{a}_3 a_2 + \bar{b}_3 a_1)^2] \} + \\
 & + x_3^{13} \bar{a}_3^3 (M_1 M_2 [A_{66} A_{55} A_{44} (a_1 - \bar{a}_3 \bar{a}_3) (\bar{a}_3 a_2 + \bar{b}_3 a_1) - A_{66}^2 (a_1 - \\
 & - \bar{a}_3 \bar{a}_3)^2 \Sigma_2 + A_{55} (a_2 - \bar{b}_3 \bar{a}_3) (a_1 - \bar{a}_3 \bar{a}_3) (\bar{a}_3 a_2 + \bar{b}_3 a_1) - A_{55}^2 \Sigma_1 (a_2 - \\
 & - \bar{b}_3 \bar{a}_3)^2] + M_2^3 [\Sigma_1 \Sigma_2 - A_{44}^2 (\bar{a}_3 a_2 + \bar{b}_3 a_1)^2] \} = 0 \quad (4.9)
 \end{aligned}$$

Как видно, в уравнение (4.9) координата x_1' не входит, следовательно, это уравнение соответствует цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны оси Ox_1' . Направляющая кривая упомянутой цилиндрической поверхности будет иметь уравнение (4.9), которое представляет собой однородное уравнение третьего порядка. В сокращенной записи это уравнение будет иметь вид

$$x^{13} a_3 + x_2^{12} x_3' a_3 b_1 + x_2 x_3^{13} a_1 b_2 + x_3^{13} b_3 = 0 \quad (4.10)$$

В этой сокращенной записи постоянные коэффициенты, стоящие у переменных величин, имеют соответственно громоздкие выражения, входящие в уравнение (4.9) при тех же переменных.

Форма направляющей кривой искомой цилиндрической поверхности будет зависеть от значения постоянных уравнения (4.10). В эти постоянные входят совершенно произвольные величины a_1 , a_2 , M_1 , M_2 и, кроме того, представляется возможность выбора одного из трех корней бикубического уравнения ($j = 1, 2, 3$). Остальные постоянные величины, входящие в уравнение (4.10), зависят еще от модулей упругости ортотропного тела.

Проведем некоторый качественный анализ уравнения (4.10) с тем, чтобы составить некоторые представления о форме направляющей кривой.

Во-первых, отмечаем, что кривая будет несимметричной как относительно оси Ox_2' , так и оси Ox_3' . Для конкретности положим, что все постоянные коэффициенты имеют один и тот же знак, например, «+». Тогда

можно сразу заключить, что координаты точек рассматриваемой кривой будут иметь разные знаки.

Во-вторых, отметим, что конфигурация рассматриваемой кривой имеет ограниченные пределы как в направлении оси Ox'_2 , так и в направлении оси Ox'_3 . Чтобы убедиться в этом, найдем тангенс угла наклона текущей касательной кривой к оси Ox'_2 .

$$\frac{dx'_3}{dx'_2} = - \frac{3x_2'^2 a_3 + 2x_2' x_3' a_2 b_1 + x_3'^2 a_1 b_2^2}{x_2'^2 a_2 b_1 + 2x_2' a_1 b_2 + 3x_3'^2 b_3} \quad (4.11)$$

Ограничение кривой в направлении оси Ox'_3 определяется условием

$$\frac{dx'_3}{dx'_2} = 0, \text{ то есть } 3x_2'^2 a_3 + 2x_2' x_3' a_2 b_1 + x_3'^2 a_1 b_2 = 0 \quad (4.12)$$

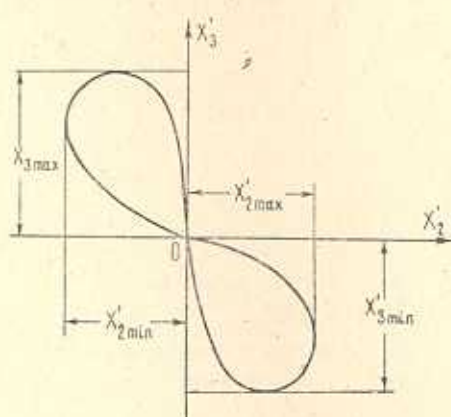
Уравнение (4.12) нужно решить совместно с уравнением (4.10). Это решение определит координаты крайних точек кривой в направлении оси Ox'_3 . Ограничение кривой в направлении оси Ox'_2 определится условием $dx'_3/dx'_2 = \infty$, то есть

$$x_2'^2 a_2 b_1 + 2x_2' x_3' a_1 b_2 + 3x_3'^2 b_3 = 0 \quad (4.13)$$

Уравнение (4.13) нужно решить совместно с уравнением (4.10), после чего найдутся координаты крайних точек кривой в направлении оси Ox'_2 .

В-третьих, отмечаем, что начало координат $x'_2 = 0, x'_3 = 0$ является одной из особых точек кривой. Остальные особые точки, которые вообще говоря, могут существовать, общими рассуждениями не могут быть определены и требуют конкретных расчетов.

После всего сказанного рассматриваемая кривая предположительно может иметь вид, изображенный на фиг. 2.



Фиг. 2. Очертание профиля сквозного канала, свободного от поверхностных сил, в ортотропной среде, подверженной дисторсии

Заключение.

На основе общего решения теории упругости для ортотропного тела в перемещениях построены два типа формул для многозначных перемещений. Эти типы многозначных перемещений использованы для рассмотрения двух типов прямолинейных дисторсий.

В заключительной части дается решение краевой задачи для многосвязного ортотропного тела. Установлено, что в безграничном ортотропном теле при наличии дисторсий возникают начальные напряжения, существует безграничная цилиндрическая поверхность, свободная от сил, даются результаты исследований упомянутой цилиндрической поверхности.

ԳԻՍՏՈՐՍԻԱՆ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ՄԱՐՄՆՈՒՄ

Ա մ փ ա փ ու մ

Դիտարկվում են օրթոտրոպ մարմնում երկու տեսակ բազմարժեք տեղափոխություններ և կապված նրանց հետ երկու տեսակ ուղղաչիժ դիստորսիաներ:

Տրվում է անսահմանափակ բազմակապ երթոտրոպ մարմնի համար եզրային խնդրի լուծումը, երբ մարմնում առկա են դիստորսիաներ և նրանց հետ կապված սկզբնական լարումներ:

DISTORTION IN ORTHOTROPIC BODIES

L. N. TER-MKRTICHIAN

S u m m a r y

Two types of multiplace translations in orthotropic body and two types of linear distortions connected with them are studied.

Solution of the boundary problem for multiple connected boundless orthotropic body is given, in case of the availability of distortion and initial tensions caused by it.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хирт Дж., Лорс И. Теория дислокаций. М., Атомиздат, 1972, стр. 305—311.
2. Kröner E. Zeitschrift für Physik. Die spannungsfunktionen der dreidimensionalen anisotropen Elastizitätstheorie, 1955, Bd. 141, S. 386—398.
3. Тер-Мкртчян Л. Н. Межвузовский сб. научных трудов, вопросы резания, надежности и долговечности дереворежущих инструментов и машин, 1979, вып. 6, стр. 95—99.