ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXV, № 1, 1982 Механика

В. Н. ДОЛИНИН

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ДЛЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ

Аппарат теории случайных функций широко используется в настоящее время для вероятностной оценки и расчета конструкций на прочность, устойчивость, безопасность и т. д. Вместе с тем оценка долговечности конструкций включает и проблему вязкоупругой ползучести.

Ниже дается попытка дать основные характеристики распределения случайного напряжения для вязкоупругой среды.

1. Примем, что изменения деформации системы происходят в случайные моменты времени T_k ($k = 1, 2, 3 \ldots$), а число изменений в единицу времени распределено по закону Пуассона. Обозначим напряжение в конструкции в момент времени t от единичного импульса отклонения деформации от некоторого среднего ее значения, возникшего в момент времени τ, через $P(t, \tau)$. Величины отклонений в различные случайные моменты времени обозначим через B_k и будем считать их независимыми одинаково распределенными случайными величинами. Тогда напряжение в конструкции в момент времени t выразится

$$\sigma(t) = \sum_k B_k P(t, T_k) \tag{1.1}$$

где B_k, T_k — независимые случайные величины, а суммирование распространяется на все числа изменения деформации, которое в предельном случае можно рассматривать как непрерывное.

Характеристическая функция $g(\lambda)$ действительной случайной величины σ есть математическое ожидание функции $e^{i\lambda\sigma}$, зависящей от параметра λ:

$$g(\lambda) = M[e^{i\lambda\sigma}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\sigma} f(\sigma)\, d\sigma$$

Знание характеристической функции $g(\lambda)$ случайной величины равносильно знанию закона распределения последней, который легко находится методом обратного преобразования Фурье.

Для случайной функции напряжения $\sigma(t)$ имеем характеристический функционал

$$g[\lambda(t)] = M\left[e^{i\int_T \lambda(t)\sigma(t)\, dt}\right]$$

Определим функцию $\lambda(t)$ как комбинацию

$$\lambda(t) = \lambda_n(t) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \delta(t - t_j)$$

где δ — функция, равная нулю всюду, кроме начала координат, равная бесконечности в начале координат, а интеграл от нее, распространенный на сколь угодно малый отрезок, содержащий начало координат, равен единице

$$\delta(x) = 0 \ (x \neq 0), \ \delta(0) = \infty, \quad \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x)\, dx = 1 \text{ при любом } \varepsilon > 0;$$

Для любой функции $\varphi(x)$

$$\int_a^b \varphi(x)\, \delta(x - x_0)\, dx = \int_a^b \varphi(x)\, \delta(x_0 - x)\, dx = \varphi(x_0)$$
$$(a < x_0 < b)$$

тогда

$$i \int_T \lambda(t)\, \sigma(t)\, dt = i \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \int_T \sigma(t)\, \delta(t - t_j)\, dt = i \sum_k B_k \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P(t_j, T_k)$$

Характеристический функционал случайной функции $\sigma(t)$ равен

$$g(\lambda_j) = M\left\{ \exp\left[i \sum_k B_k \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P(t_j, T_k) \right] \right\} \tag{1.2}$$

В реальных конструкциях $P(t, \tau) = 0$ при $(t - \tau) \to \infty$, то есть напряжение равно нулю, если его рассматривать в момент времени сколь угодно далеко отнесенный от момента действия единичной деформации; $P(t, \tau) = 0$ и при $t < \tau$.

Рассмотрим часть суммы в соотношении (1.1), соответствующей напряжению $\sigma(t)$ за конечный интервал времени наблюдения t, и обозначим ее $\sigma_T(t)$. Ее значение будет соответствовать некоторому $\sigma(t_s)$ за время наблюдения t_s такое, что $|s| < \Omega$, но может быть и сколь угодно большим. Ясно, что для любого сколь угодно большого времени T

$$\lim_{T \to \infty} M[\sigma_T(t)] = M[\sigma(t)]$$

и, следовательно,

$$\lim_{T \to \infty} M[|\sigma_T(t) - \sigma(t)|^2] = 0$$

то есть случайная $\sigma(t)$ является пределом и среднеквадратической последовательности случайных функций $\sigma_T(t)$: $\sigma(t) = l.i.m.\ \sigma_T(t)$. Это означает сходимость и по вероятности

$$\lim_{T \to \infty} P(|\sigma_T(t) - \sigma(t)| \geqslant \varepsilon) = 0$$

для всех моментов времени.

Обозначим через $\mu(s)$ математическое ожидание числа изменений деформаций, воспринимаемых системой за интервал времени $(0, t_s)$, а через m — фактическое число изменений поля деформаций за этот же промежуток времени. Тогда согласно принятому условию распределения числа изменений поля получим

$$P_m[\mu(s)] = \frac{[\mu(s)]^m e^{-\mu(s)}}{m!} \tag{1.3}$$

где $P_m[\mu(s)]$ — вероятность ровно m числа изменений.

Если известно среднее число изменений поля деформаций в единицу времени $y(t)$, то $\mu(s) = \int\limits_0^s y(t)\,dt$.

Найдем выражение характеристического функционала (1.2) при условии, что за время $|s| < \Omega$ произошло ровно m изменений поля деформаций. Обозначим

$$\lambda X_k = B_k \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P(t_j, T_k)$$

тогда

$$g_s(\lambda_j) = M\left\{\exp\left[i\lambda \sum_k X_k\right] \Big/ T_{k=m}\right\} = M\left\{\exp\left[i\lambda \sum_{k=0}^{m} X_k\right]\right\}$$

Рассмотрим случайную величину Z такую, что $Z = \sum\limits_{k=0}^{m} X_k$. Тогда характеристическая функция случайной величины Z выразится

$$g_z(\lambda) = M\{\exp[i\lambda Z]\} = \prod_{k=0}^{m} g_{x_k}(\lambda)$$

а с другой стороны,

$$g_{x_k}(\lambda) = M[e^{i\lambda X_k}]$$

поскольку B_k и T_k, а следовательно, и X_k являются независимыми.

В нашем исследовании значения B_1, T_1; B_2, T_2 и т. д. можно рассматривать как конкретные реализации случайной независимой величины

$$X\{B_1,\ T_1;\ B_2,\ T_2;\cdots B_k,\ T_k;\cdots B_m,\ T_m\}$$

Тогда

$$X = \frac{1}{\lambda} B \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P(t_j,\ T)$$

где через B и T обозначена любая из независимых случайных величин $B_1, \ldots B_m$ и $T_1, \ldots T_m$ соответственно.

Тогда

$$g_s(\lambda_j) = g_x^m(\lambda) = \left\{M\left\{\exp\left[iB\sum_{j=1}^{n}\lambda_j P(t_j,\ T)\right]\right\}\right\}^m \tag{1.4}$$

$$m = 0,\ 1,\ 2, \cdots$$

Рассмотрим функцию

$$f(t,\ s) = y(t)\ \mu^{-1}(s) \tag{1.5}$$

которая выражает отношение среднего числа изменений поля деформаций в единицу времени к среднему числу изменений за время

$$|s| < \Omega, \text{ то есть } (0,\ t_s)$$

Эта функция определяет плотность вероятности случайной величины $T\ (T_1, \dots T_m)$. Действительно, соотношение (1.5) удовлетворяет основным свойствам плотности вероятности

$$f(t,\ s) \geqslant 0, \int\limits_0^s f(t,\ s)\ dt = 1$$

здесь s можно рассматривать как параметр. Известно, что математическое ожидание условного математического ожидания, рассматриваемого как функция случайной величины условия, равно математическому ожиданию самой функции [1]. Используя это свойство математического ожидания, преобразуем подстепенное выражение в (1.4) к виду:

$$M\left\{\exp\left[iB\sum_{j=1}^{n}\lambda_j P(t_j,\ T)\right]\right\} = M\left\{M\left\{\exp\left[iB\sum_{j=1}^{n}\lambda_j P(t_j,\ T)\right] \Big/ T\right\}\right\} =$$

$$= M\left\{g_b\left[\sum_{j=1}^{n}\lambda_j P(t_j,\ T)\right]\right\} \tag{1.6}$$

в силу независимости случайных величин B и T, а характеристическая функция случайной величины B, характеризующая амплитудное значение колебаний поля деформаций

$$g_b\left[\sum_{j=1}^{n}\lambda_j P(t_j,\ T)\right]$$

вычисляется при любом фиксированном возможном значении случайной величины T.

С другой стороны, соотношение (1.6) можно рассматривать как непрерывную функцию случайного аргумента T с известной функцией плотности вероятности (1.5). Тогда

$$M\left\{g_b\left[\sum_{j=1}^{n}\lambda_j P(t_j,\ T)\right]\right\} =$$

$$= \int\limits_0^s g_b\left[\sum_{j=1}^{n}\lambda_j P(t_j,\ \tau)\right] y(\tau)\ \mu^{-1}(s)\ d\tau \tag{1.7}$$

Если в соотношении (1.2) ограничиваться суммированием по изменениям поля деформаций, происходящим за время наблюдения t_s (или $|s| < \Omega$), и еще раз воспользоваться свойством математического ожидания от условного математического ожидания, но уже относительно случайной величины B, получим

$$g_s(\lambda_j)=M\left\{M\left\{\exp\left[\,i\sum_k B_k\sum_{j=1}^{n}\lambda_j P(t_j, T_k)\,\right]\Big/\,B_{k-m}\right\}\right\}$$

При этом внутреннее значение математического ожидания есть функция случайной величины B, а стало быть, характеристический функционал для случайной функции напряжения $\sigma_s(t)$ равен

$$g_s(\lambda_j)=\sum_{m=0}^{\infty} P_m\, M\left\{\exp\left[\,i\sum_{k=0}^{m} B_k\sum_{j=1}^{n}\lambda_j P(t_j, T_k)\,\right]\Big/\,B_{k=m}\right\} \tag{1.8}$$

здесь P_m — вероятность события, что случайная величина B_k примет ровно m значений в интервале времени $(0, t_s)$, а m может принимать любые значения $0 \leqslant m < \infty$.

Поскольку каждому значению B_k случайным образом соответствует вполне определенное и единственное значение T_k, то на основании соотношений (1.3), (1.4) и (1.7) найдем n-мерную характеристическую функцию $g_s(\lambda_j)$ случайной функции $\sigma_s(t)$:

$$g_s(\lambda_j)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\mu^m(s)\,e^{-\mu(s)}}{m!}\left\{\int_0^{s}\left[g_b\sum_{j=1}^{n}\lambda_j P(t_j, \tau)\right]y(\tau)\,\mu^{-1}(s)\,d\tau\right\}^m \tag{1.9}$$

Преобразуя это соотношение и переходя к пределу при $s\to\infty$, получим n-мерную характеристическую функцию искомой случайной функции напряжения

$$g_s(\lambda_j)=\exp\left\{\int_0^{\infty}\left\{g_b\left[\sum_{j=1}^{n}\lambda_j P(t_j, \tau)\right]-1\right\}y(\tau)\,d\tau\right\} \tag{1.10}$$

Если существуют все моменты случайной величины B и они конечны, то характеристическую функцию

$$g_b\left[\sum_{j=1}^{n}\lambda_j P(t_j, \tau)\right]$$

можно дифференцировать счетное число раз по параметру, а следовательно, представить в виде сходящегося ряда Маклорена

$$g_b\left[\sum_{j=1}^{n}\lambda_j P(t_j, \tau)\right]=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{i^k\alpha_k}{k!}\left\{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j P(t_j, \tau)\right\}^k$$

где α_k — момент случайной величины B порядка k.

Тогда для характеристической функции напряжения

$$\ln g_s(\vec{\lambda})=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{i^k\alpha_k}{k!}\int_0^{\infty}\left[\sum_{j=1}^{n}\lambda_j P(t_j, \tau)\right]^k y(\tau)\,d\tau \tag{1.11}$$

для достаточно малых значений λ_j.

Рассмотрим предельный случай, когда плотность изменений поля деформаций $y(t)$ неограниченно возрастает, а величина каждого отдельного отклонения стремится к нулю, но так, что произведение $\alpha_2 \cdot y(t)$ остается неизменным, то есть интенсивность пульсаций стабилизируется около некоторой постоянной величины с математическим ожиданием α_1, также стремящимся к нулю. Тогда на основании центральной предельной теоремы закон распределения случайной функции $\sigma(t)$ будет стремиться к нормальному закону.

Покажем, что этот же результат следует из соотношения (1.11) при тех же допущениях. Действительно, пусть плотность вероятности случайной величины B задана в виде

$$\varphi(b) = h\psi(hb); \quad \alpha_2 y(t) = G(t) \tag{1.12}$$

где h — некоторый произвольный параметр, характеризующий область изменения случайной величины. Тогда моменты случайной величины B могут быть определены

$$\alpha_r = \int_{-h}^{h} b^r \varphi(b)db = \frac{1}{h^r}\int_{-h^2}^{h^2} \xi^r \psi(\xi)\, d\xi = \frac{\gamma_r}{h^r} \tag{1.13}$$

или

$$\alpha_r y(t) = \frac{\gamma_r G(t)}{h^{r-2}\gamma_2} \quad \text{для} \quad r = 2, 3, 4, \cdots \tag{1.14}$$

При $h \to \infty$ средняя плотность $y(t)$ будет возрастать вместе и пропорционально h^2, а следовательно, все моменты случайной величины B будут стремиться при этом к нулю; плотность вероятности же (1.12) при этом будет оставаться неизменной (то есть форма кривой).

Подставляя (1.14) в соотношение (1.11) и переходя к пределу при $h \to \infty$ получим

$$\ln g_0(\vec{\lambda}) = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j \int_0^{\infty} G(t)\,P(t_i, \tau)\,P(t_j, \tau)\, d\tau \tag{1.15}$$

А это и есть характеристическая функция n-мерного случайного вектора, подчиненного нормальному закону распределения с равным нулю математическим ожиданием. Таким образом, полученное нами распределение для случайной функции напряжения $\sigma(t)$ в предельном случае переходит в нормальный закон распределения.

Найдем основные характеристики найденного распределения (1.11), то есть его математическое ожидание и корреляционную функцию. Разложение в ряд характеристической функции дает простой и удобный способ вычисления моментов случайных величин.

Поскольку в наших рассуждениях участвует совокупность 2-х случайных величин — B и T, то целесообразно их рассматривать как компоненты 2-мерного случайного вектора. Тогда в самом общем виде характеристическая функция имеет вид:

$$g(\lambda_1, \lambda_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)} f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2$$

Поскольку соотношение (1.11) получено для достаточно малых значений λ_j, целесообразно и последнее выражение представить в виде соответствующего разложения в ряд Маклорена:

$$g(\lambda_1, \lambda_2) = g(0, 0) + \frac{dg(0, 0)}{1!} + \frac{d^2 g(0, 0)}{2!} + \cdots$$

При этом $g(0, 0) = 1$ как двумерная плотность вероятности, а

$$g'_{\lambda_1}(0, 0) = i\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1 f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = i\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1 \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\, dx_2\right] dx_1 =$$

$$= i\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1 f_1(x_1)\, dx_1 = iM(X_1) = i\alpha_{10}$$

$$g'_{\lambda_2}(0, 0) = i\alpha_{01} \qquad \text{и т. д.}$$

окончательно

$$g(\lambda_1, \lambda_2) = 1 + \frac{i}{1!}(\alpha_{10}\lambda_1 + \alpha_{01}\lambda_2) +$$

$$+ \frac{i^2}{2!}(\alpha_{20}\lambda_1^2 + 2\alpha_{11}\lambda_1\lambda_2 + \alpha_{02}\lambda_2^2 + \cdots \tag{1.16}$$

где α_{rs} — смешанные моменты порядка $r + s$ случайных величин

$$\alpha_{rs} = i^{-(r+s)} \left.\frac{\partial^{r+s} g(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial\lambda_1^r\, \partial\lambda_2^s}\right|_{\lambda_1 = \lambda_2 = 0} \tag{1,17}$$

Ограничиваясь в разложении функции (1.11) как показательной в ряд первыми членами разложения и сравнивая выражения при одинаковых коэффициентах λ_j, легко найти

$$\alpha_{10} = \alpha_1 \int\limits_0^{\infty} P(t_1, \tau)\, y(\tau)\, d\tau \quad \text{и} \quad \alpha_{01} = \alpha_1 \int\limits_0^{\infty} P(t_2, \tau)\, y(\tau)\, d\tau$$

откуда следует, что α_{10} и α_{01} характеризуют математическое ожидание одной и той же случайной функции $\sigma(t)$ в различные моменты времени наблюдения t_1 и t_2.

Учитывая, что $P(t, \tau) = 0$ при $t < \tau$, найдем

$$M[\sigma(t)] = m_\sigma(t) = \alpha_1 \int\limits_0^{t} P(t, \tau)\, y(\tau)\, d\tau \tag{1.18}$$

а также

$$\alpha_{11}=\alpha_2\int\limits_0^{\min(t,\,t')} P(t,\tau)\,P(t',\tau)\,y(\tau)\,d\tau+\alpha_1\int\limits_0^{t}P(t,\tau)\,y(\tau)\,d\tau\times$$

$$\times\alpha_1\int\limits_0^{t'}P(t',\tau)\,y(\tau)\,d\tau$$

Используя известную связь между смешанным моментом второго порядка и смешанным центральным моментом, найдем корреляционную функцию

$$K_\sigma(t,t')=\alpha_2\int\limits_0^{\min(t,\,t')} P(t,\tau)\,P(t',\tau)\,y(\tau)\,d\tau \qquad (1.19)$$

2. Если известны математическое ожидание и корреляционная функция для напряжения, то может быть решена и обратная задача — найдены соответствующие характеристики поля деформаций

$$\mathrm{E}(t)=\frac{\sigma(t)}{E(t)}$$

где $E(t)$ — детерминированная функция, а

$$m_\varepsilon(t)=\frac{m_\sigma(t)}{E(t)} \qquad (2.1)$$

$$K_\varepsilon(t,t')=M\{[\mathrm{E}(t)-m_\varepsilon(t)][\mathrm{E}(t')-m_\varepsilon(t')]\}=\frac{K_\sigma(t,t')}{E(t)E(t')} \qquad (2.2)$$

с дисперсией

$$D_\varepsilon(t)=K_\varepsilon(t,t)=\frac{D_\sigma(t)}{E^2(t)}$$

Напряжение в конструкции $P(t,\tau)$, вызванное единичным импульсом деформации с учетом процесса релаксации, можно представить [2]:

$$P(t,T)=E(t)[1-Q^*(\beta;t,T)]=E(t)\left[1-\int\limits_T^t Q(\beta;t,\tau)\,d\tau\right]$$

полагая $P(t,T)$ — функцией по случайному параметру T.

В качестве примера рассмотрим случай, когда в виде ядра релаксации используется дробно-экспоненциальная функция Ю. Н. Работнова, а средняя плотность колебаний поля деформаций $y(t)$ постоянна. Тогда

$$P(t,\tau)=E(t)\left\{1-\frac{\alpha}{\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,[\beta(t-\tau)^{1-\alpha}]^{n+1}}{\Gamma[(n+1)(1-\alpha)+1]}\right\}$$

математическое ожидание для напряжения

$$m_\sigma(t) = \alpha_1 Y_0 E(t) \int_0^t \left\{1 - \frac{\varkappa}{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n [\beta (t-\tau)^{1-\alpha}]^{n+1}}{\Gamma[(n+1)(1-\alpha)+1]}\right\} d\tau =$$

$$= \alpha_1 Y_0 E(t)\, t \left\{1 + \frac{\varkappa}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n [\beta t^{1-\alpha}]^n}{\Gamma[n(1-\alpha)+2]}\right\} \qquad (2.3)$$

а корреляционная функция имеет вид

$$K_\sigma(t, t') = \alpha_2 Y_0 E(t) E(t') \left\{ \min(t, t') - \frac{\varkappa(k-\beta+\varkappa)}{k-\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-k)^{n-1} t^{n(1-\alpha)+1}}{\Gamma[n(1-\alpha)+2]} - \right.$$

$$- \frac{\varkappa(k-\beta-\varkappa)}{k-\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\beta)^{n-1} t'^{\,n(1-\alpha)+1}}{\Gamma[n(1-\alpha)+2]} + \qquad (2.4)$$

$$\left. + \frac{\varkappa(k-\beta\pm\varkappa)}{k-\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-k, \beta)^{n-1} |t'-t|^{n(1-\alpha)+1}}{\Gamma[n(1-\alpha)+2]} \right\}$$

В последнем слагаемом берется знак плюс с коэффициентом k при интегрировании по параметру t и знак минус с коэффициентом β при интегрировании по параметру t'.

Однако, выражение для корреляционной функции (2.4) не позволяет найти выражение для дисперсии напряжения, так как в этом случае $k=\beta$ и знаменатель обращается в нуль.

Рассмотрим произведение $P(t, \tau)\, P(t', \tau)$ при одном и том же значении параметра β

$$P(t, \tau)\, P(t', \tau) = E(t)\, E(t') \{1 - \varkappa \ni_\alpha^*(-\beta; \theta) - \varkappa \ni_\alpha^*(-\beta; s) +$$

$$+ \varkappa^2 \ni_\alpha^*(-\beta; s) \ni_\alpha^*(-\beta; \theta)\}$$

С другой стороны, на основании свойств произведения операторов [3]

$$\ni_\alpha^*(-\beta; s) \ni_\alpha^*(-\beta; \theta) = \int_0^s \ni_\alpha(-\beta; s-\xi) \ni_\alpha(-\beta; \xi-\theta)\, d\xi =$$

$$= \int_s^\theta \ni_\alpha(-\beta; \theta-\xi) \ni_\alpha(-\beta; \xi-s)\, d\xi$$

Тогда

$$\ni_\alpha(-\beta; \theta-\xi) \ni_\alpha(-\beta; \xi-s) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta^n (\theta-s)^{j(1-\alpha)-\alpha} (\xi-s)^{(n-j)(1-\alpha)-\alpha}}{\Gamma[(j+1)(1-\alpha)] \cdot \Gamma[(n-j+1)(1-\alpha)]}$$

и

$$\int_{s}^{\theta} \ni_{\alpha}(-\beta;\ \theta-\xi)\ \ni_{\alpha}(-\beta;\ \xi-s)\ d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\ \beta^n\ |\theta-s|^{(n+1)(1-\alpha)-\alpha}}{\Gamma\,[(n+2)(1-\alpha)]}$$

Это позволяет представить произведение $\ni_{\alpha}^{*}$-операторов для среды с постоянными реологическими характеристиками и для различных моментов времени в виде

$$\ni_{\alpha}^{*}(-\beta;\ t-\tau)\ \ni_{\alpha}^{*}(-\beta;\ t'-\tau) = \frac{J_{\alpha}^{*}(|t'-t|) - \ni_{\alpha}^{*}(-\beta;\ |t'-t|)}{\beta} \tag{2.5}$$

где J_{α}^{*} — оператор Абеля. Тогда

$$P(t,\tau)\ P(t',\tau) = E(t)\ E(t')\ [1 - \varkappa \ni_{\alpha}^{*}(-\beta;\ t-\tau) - \varkappa \ni_{\alpha}^{*}(-\beta;\ t'-\tau) +$$

$$+ \frac{\varkappa^2}{\beta} J_{\alpha}^{*}(|t'-t|) - \frac{\varkappa^2}{\beta} \ni_{\alpha}^{*}(-\beta;\ |t'-t|)] \tag{2.6}$$

или

$$P(t,\tau)\ P(t',\tau) = E(t)\ E(t') \Big\{ 1 - \varkappa \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\ \beta^n\ (t-\tau)^{(n+1)(1-\alpha)}}{\Gamma\,[(n+1)(1-\alpha)+1]} -$$

$$- \varkappa \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\ \beta^n\ (t'-\tau)^{(n+1)(1-\alpha)}}{\Gamma\,[(n+1)(1-\alpha)+1]} - \frac{\varkappa^2}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta^n\ |t'-t|^{(n+1)(1-\alpha)}}{\Gamma\,[(n+1)(1-\alpha)+1]} \Big\}$$

И далее следует

$$K_{\circ}(t,t') = \alpha_2 Y_0\ E(t)\ E(t') \Big\{ \min(t,t') - \varkappa \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\ \beta^n\ t^{(n+1)(1-\alpha)+1}}{\Gamma\,[(n+1)(1-\alpha)+2]} -$$

$$- \varkappa \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\ \beta^n\ t'^{(n+1)(1-\alpha)+1}}{\Gamma\,[(n+1)(1-\alpha)+2]} + \varkappa \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\ \beta^n |t'-t|^{(n+1)(1-\alpha)+1}}{\Gamma\,[(n+1)(1-\alpha)+2]} -$$

$$- \frac{\varkappa^2}{\beta} \min(t,t') \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\ \beta^n\ |t'-t|^{(n+1)(1-\alpha)}}{\Gamma\,[(n+1)(1-\alpha)+1]} \Big\} \tag{2.7}$$

Последнее соотношение хотя и позволяет найти выражение для дисперсии, но, в свою очередь, имеет недостаток в том смысле, что применимо только для среды с постоянными реологическими характеристиками.

Из (2.7) легко найти выражение для дисперсии

$$D(t) = \alpha_2 Y_0 E^2(t) \Big\{ t - 2\varkappa \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\ \beta^n\ t^{(n+1)(1-\alpha)+1}}{\Gamma\,[(n+1)(1-\alpha)+2]} \Big\} \tag{2.8}$$

Может быть рассмотрен и более общий случай, когда среда не обладает постоянными реологическими свойствами (к этому случаю может быть отнесена задача, приводящая к необходимости обращения интегрального оператора); тогда

$$
\begin{gathered}
\ni_{\alpha}(-\beta; s-\xi)\, \ni_{\alpha}(-k; \xi-\theta) = \\
= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^n k^j \beta^{n-j} (s-\xi)^{(n-j)(1-\alpha)-\alpha} (\xi-\theta)^{j(1-\alpha)-\alpha}}{\Gamma[(j+1)(1-\alpha)]\, \Gamma[(n-j+1)(1-\alpha)]} \\
\int_{\theta}^{s} \ni_{\alpha}(-\beta; s-\xi) \ni_{\alpha}(-k; \xi-\theta)\, d\xi = \\
= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{k}{\beta}\right)^{j} \frac{(-1)^n \beta^n |s-\theta|^{(n+1)(1-\alpha)-\alpha}}{\Gamma[(n+2)(1-\alpha)]}
\end{gathered}
\tag{2.9}
$$

Откуда следует, что произведение соответствующих такой среде $\ni_{\alpha}^{*}$-операторов не приводит снова к этому типу оператора, но позволяет найти выражения и вычислить значение как корреляционной функции, так и дисперсии случайной функции напряжения.

Ниже приводятся значения корреляционной функции, вычисленные из соотношения (2.6) для среды с характеристиками $\varkappa = 0.1976$ *мин*$^{-1/2}$ и $\beta = 0.7906$ *мин*$^{-1/2}$ (вязкоупругий полимер).

Таблица

Время t, t'	Коррел. функция $\gamma \cdot K_{\sigma}(t, t')$	Время t, t'	Коррел. функция $\gamma \cdot K_{\sigma}(t, t')$
1,1	1,2134	5,5	4,0952
1,2	1,0044	5,10	3,6279
1,5	0,95096	5,50	3,4270
1,10	0,9145	5,100	3,3879
1,50	0,8820	5,200	3,3611
1,100	0,8746	5,300	3,3493
3,3	2,7356	10,10	7,2558
3,5	2,4109	10,50	6,3943
3,10	2,3019	10,100	6,3111
3,50	2,3010	10,200	6,2558
3,100	2,1717	10,300	6,2319
3,200	2,1558	10,500	6,2082

Здесь γ — коэффициент пропорциональности.

Из приведенной таблицы видно, что хотя абсолютная величина корреляционной функции зависит от выбора начала отсчета времени, но при этом скорость изменения самой функции растет с уходом времени от начальной точки.

Если рассматривать частный случай ядра Н. Х. Арутюняна [4], которое хорошо описывает ползучесть такого материала как бетон в его старом возрасте, то в качестве $Q(\beta, t, \tau)$ следует положить

$$
Q(t, T)=\sum_{i} A_{i} e^{-\rho_{i}(t-T)} \tag{2.10}
$$

где A_i, ρ_i — некоторые параметры среды.

Находя регулярную часть $P(t, \tau)$ для данного ядра и подставляя полученное выражение в соотношения (1.18) и (1.19), легко могут быть найдены соответствующие характеристики случайного вязкоупругого поля напряжений, а из соотношений (2.1) и (2.2) — аналогичные характеристики и для поля деформаций.

Естественно, указанные выражения могут быть использованы для получения законов распределения случайных напряженно-деформированных состояний и при других видах наследственных функций.

НИИ строительной физики
Госстроя СССР

Поступила 8 I 1980

Վ. Ն. ԴՈԼԻՆԻՆ

ԱՌԱՁԳԱՄԱԾՈՒՑԻԿ ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ՀԱՄԱՐ ՊԱՏԱՀԱԿԱՆ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԲԱՇԽՄԱՆ ՕՐԵՆՔՆԵՐԻ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Տրվում է առաձգա-ժառանգական միջավայրի համար պատահական լարումների բաշխման օրենքների ուսումնասիրությունը: Դիտարկվել են սողքի և ռելաքսացիայի կորիզների մի քանի հատկությունները սկզբնական ազդեցության պատահական մոմենտի համար:

Որպես օրինակ հաշվվել են լարումների ցրման ֆունկցիայի արժեքները ժամանակի տարբեր մոմենտներում տրված ռեոլոգիական պարամետրերով միջավայրի համար:

A STUDY OF DISTRIBUTION LAWS OF RANDOM STRESSES FOR A VISCOUS-ELASTIC MEDIUM

V. N. DOLININ

S u m m a r y

The theory of random functions is widely used at present for a probabilistic assessment and analysis of structures for strength, stability and safety. For the assessment of durability of structures the theory of creep is also employed.

The main characteristics of distribution laws of the random stress for a homogeneous elastic-viscous medium such as mathematical expectance and correlation functions were found. It has been assumed that the change in the strain field per time unit is distributed according to Poisson's law and the moments of time when such a change takes place and their amplitude magnitudes are independent random values.

The obtained relationship permitted the characteristics of a random field of stresses to be ascertained for the widely encountered N. Ch. Arutiunian's and Yu. N. Rabotnov's creep and relaxation nuclei. They can also be used to determine the non-failure performance time of a tructure.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пугачев В. С.* Теория случайных функций. 1962.
2. *Александровский С. В.* Расчет бетонных и железобетонных конструкций на изменения температуры и влажности с учетом ползучести. М., Стройиздат, 1973.
3. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966.
4. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.—Л., Гостехиздат, 1952, с. 38.