

В. Н. АКОПЯН

К ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

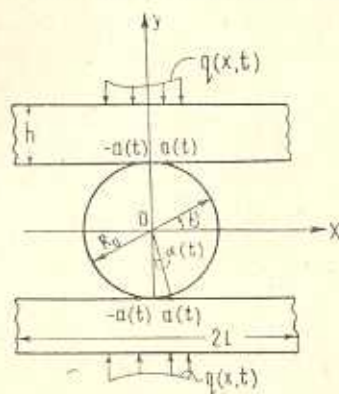
Рассматривается периодическая контактная задача о сжатии системы одинаковых вязкоупругих круговых дисков двумя одинаковыми вязкоупругими полосами. При этом предполагается, что в контактной зоне, размеры которой изменяются во времени, действуют только нормальные напряжения. При помощи аппарата полиномов Чебышева разрешающее интегральное уравнение довольно сложной структуры сводится к эквивалентной бесконечной системе интегральных уравнений Вольтерра простого типа, допускающей аналитическое исследование. Обсуждаются частные случаи вязкоупругого поведения контактирующих тел и приводятся соответствующие им численные результаты. В частности, обсуждается случай чисто упругого контакта, представляющий самостоятельный интерес.

Отметим, что контактные задачи теории линейной вязкоупругости, когда круговой в плане штамп вдавливается в вязкоупругое полупространство, исследовались в ряде работ [1—4]. Достаточно полный обзор контактных задач теории вязкоупругости содержится в [5, 11].

1. Пусть периодическая система одинаковых вязкоупругих дисков радиуса  $R_0$  периодически с периодом  $2l$  расположена между двумя одинаковыми вязкоупругими полосами толщины  $h$  и сжимается ими посредством периодической, с тем же периодом  $2l$ , системы нормальных сил интенсивности  $q(x, t)$  (фиг. 1). Предположим, что диски входят в контакт с полосами по дугам окружности  $a_1 \bar{b}_1$  ( $a_1 = -iR_0 e^{-ia(t)}$ ,  $b_1 = -iR_0 e^{ia(t)}$ ) и  $a_2 \bar{b}_2$  ( $a_2 = iR_0 e^{-ia(t)}$ ,  $b_2 = iR_0 e^{ia(t)}$ ), которым на полосах соответствует интервал  $(-a(t), a(t))$ .

Ставится задача определения контактных напряжений  $P(x, t)$  и меры сближения двух полос  $c(t)$ .

Так как имеем симметричную относительно оси  $ox$  задачу, то из условия контакта дисков с верхней и нижней полосами получаются одни и те же уравнения. Поэтому будем рассматривать контакт дисков с одной из полос, например, с нижней. Условие контакта



Фиг. 1.

применительно к одному периоду имеет вид:

$$v_1(\theta, t) + v_2(x, t) = [c(t) - f_1(x)] H(t) \quad (1.1)$$

которое справедливо в контактной зоне.

Здесь  $v_1(\theta, t)$  — вертикальные перемещения граничных точек диска этого периода, который на участках своей границы  $\left\{ -\frac{\pi}{2} - \alpha(t) \leq \theta \leq -\frac{\pi}{2} + \alpha(t), \frac{\pi}{2} - \alpha(t) \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} + \alpha(t) \right\}$ , соответствующих контактным зонам, загружен вертикальными силами  $P_1(\theta, t)$  и  $P_1^*(\theta, t)$  ( $P_1^*(\theta \pm \pi, t) = P_1(\theta, t)$ ).

Далее,  $v_2(x, t)$  — вертикальные перемещения точек внутренней кромки прямоугольника  $|0 \leq y < h, -l \leq x \leq l|$ ,  $H(t)$  — функция Хевисайда, а  $f_1(x) = R_0 - \sqrt{R_0^2 - x^2}$  — функция, описывающая форму границы диска.

На границе этого прямоугольника вследствие периодического характера задачи имеют место следующие условия:

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(\pm l, y) = \tau_{xy}(x, h) = \tau_{xy}(x, 0) = u_2(\pm l, y) = 0 \quad (-l < x < l, 0 < y < h) \\ \sigma_y(x, 0) = \begin{cases} -P_2(x, t), & -a(t) < x < a(t) \\ 0 & l > |x| > a(t) \end{cases} \\ \sigma_y(x, h) = \begin{cases} -q(x, t), & -b < x < b \\ 0 & l > |x| > b \end{cases} \end{aligned}$$

Ввиду малости размеров контактных зон по сравнению с характерными размерами тел и того, что при их сжатии дуговые и прямолинейные отрезки сливаются в единый контактный интервал, в зонах контакта примем  $R_0 \theta = x$ . На основе последнего дуговой отрезок  $\tilde{a}_1 \tilde{b}_1$  отождествляем с прямолинейным отрезком  $(-a(t), a(t))$ , то есть  $R_0 \alpha(t) = a(t)$  и  $P_1(x/R_0 - \pi/2, t) = P_2(x, t) = P(x, t)$ .

Известными способами определяя  $v_1(\theta, t)$  и  $v_2(x, t)$ , затем подставляя их в (1.1) и учитывая только что сказанное, получим следующее разрешающее интегральное уравнение:

$$\sum_{i=1}^2 \int_0^{\tau} J_i(t, \tau) \frac{\partial^n}{\partial \tau^n} \int_{-a(\tau)}^{\tau} \left\{ \ln \left| \frac{1}{2 \sin \frac{\pi(x-s)}{2l}} \right| + K_i(x, s) \right\} P(s, \tau) ds d\tau = \varphi(x, t) \quad (1.2)$$

где

$$K_1(x, s) = \ln \left| 2 \sin \frac{\pi(x-s)}{2l} \operatorname{ctg} \frac{\pi(x-s)}{2R_0} \right| - \cos(x/R_0) \cos(s/R_0)$$

$$K_2(x, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left[ \frac{\operatorname{sh} \gamma_k \operatorname{ch} \gamma_k + \gamma_k}{\operatorname{sh}^2 \gamma_k - \gamma_k^2} - 1 \right] \cos \frac{\pi k(x-s)}{l} \quad \left( \gamma_k = \frac{h\pi}{l} k \right)$$

$$\varphi(x, t) = R(x, t) + \pi [c(t) - f_1(x)] H(t)$$

$$R(x, t) = \int_0^t J_2(t, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-b}^b \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k \operatorname{ch} \gamma_k + \operatorname{sh} \gamma_k}{k(\operatorname{sh}^2 \gamma_k - \gamma_k^2)} \cos \frac{\pi k(x-s)}{l} \right] q(s, \tau) ds d\tau$$



$J_i(t, \tau)$  ( $i = 1, 2$ ) — функции ползучести соответственно диска и прямоугольника, которые обычно выражаются линейным агрегатом экспоненциальных функций [7], а  $0^-$  — момент времени, предшествующий началу контакта.

При этом неизвестная функция  $P(x, t)$  должна удовлетворять условиям равновесия и гладкого контакта

$$\int_{-a(t)}^{a(t)} P(s, t) ds = P_0(t), \quad P(\pm a(t), t) = 0 \quad (1.3)$$

где  $P_0(t)$  — равнодействующая внешних сил.

2. Перейдем к исследованию интегрального уравнения (1.2) при условиях (1.3). Рассмотрим два случая.

а) Сначала предположим, что  $a(t)$  монотонно возрастающая функция от  $t$  при  $0 < t < t_n$ . Тогда в (1.2) можно  $a(\tau)$  заменить на  $a(t)$  [6]. Далее, так как  $a(\tau) \leq a(t)$  и  $P(\pm a(\tau), \tau) = 0$  для любого фиксированного  $\tau$  из интервала  $(0, t)$ , то решение (1.2) для момента времени  $\tau$  можно разложить в ряд по многочленам Чебышева первого рода в интервале  $(-a(t), a(t))$ , то есть

$$P(x, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(\tau) \frac{\cos(\lambda x/2) T_{2n} \left[ \frac{\sin(\lambda x/2)}{\sin(\lambda a(t)/2)} \right]}{\sqrt{2[\cos(\lambda s) - \cos(\lambda a(t))]}}, \quad \left( \lambda = \frac{\pi}{l} \right) \quad (2.1)$$

Тогда из первого уравнения (1.3) сразу получим

$$X_0(t) = \frac{\lambda}{\pi} P_0(t) \quad (2.2)$$

Подставляя выражение  $P(x, \tau)$  из (2.1) в (1.2) и используя ортогональность многочленов Чебышева, приходим к следующей бесконечной системе интегральных уравнений Вольтерра:

$$\begin{aligned} & \frac{l^2}{4m} \sum_{i=1}^2 [J_i(t, t) X_m(t) - L_i(X_m(t))] + \\ & + \sum_{i=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n}^{(i)}(t) [J_i(t, t) X_n(t) - L_i(X_n(t))] = M_m(t) \end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned} A_{m,n}^{(i)}(t) = & \int_{-a(t)}^{a(t)} \frac{T_{2m} \left[ \frac{\sin(\lambda x/2)}{\sin(\lambda a(t)/2)} \right] \cos(\lambda x/2) dx}{\sqrt{2[\cos(\lambda x) - \cos(\lambda a(t))]}}, \times \\ & \times \int_{-a(t)}^{a(t)} K_i(x, s) \frac{T_{2n} \left[ \frac{\sin(\lambda s/2)}{\sin(\lambda a(t)/2)} \right] \cos(\lambda s/2) ds}{\sqrt{2[\cos(\lambda s) - \cos(\lambda a(t))]}} \end{aligned}$$

$$L_i(X_m(t)) = \int_{0^-}^t \frac{\partial J_i(t, \tau)}{\partial \tau} X_m(\tau) d\tau \quad (i = 1, 2)$$

$$M_m(t) = - \sum_{i=1}^2 [J_i(t, t) X_0(t) - L_i(X_0(t))] A_{m,0}^{(i)}(t) +$$

$$+ \int_{-\alpha(t)}^{\alpha(t)} \varphi(x, t) \frac{T_{2m} \left[ \frac{\sin(\lambda x/2)}{\sin(\lambda a(t)/2)} \right] \cos(\lambda x/2)}{\sqrt{2} [\cos(\lambda x) - \cos(\lambda a(t))]} dx$$

Отметим, что при получении (2.3) было использовано соотношение [9]

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \ln \left| \frac{1}{2 \sin \frac{(x-s)}{2}} \right| T_{2n} \left( \frac{\sin(s/2)}{\sin(\alpha/2)} \right) \frac{\cos(s/2) ds}{\sqrt{2} (\cos s - \cos \alpha)} =$$

$$= \begin{cases} \pi \ln \left( \frac{1}{\sin \alpha/2} \right), & n=0 \\ \frac{\pi}{2n} T_{2n} \left( \frac{\sin \alpha/2}{\sin \alpha/2} \right) & n=1, 2, \dots \end{cases}$$

Приведем (2.3) к каноническому виду, для чего можем записать

$$\sum_{i=1}^2 \int_{0^-}^t J_i(t, \tau) \frac{\partial X_m(\tau)}{\partial \tau} d\tau = a_m(t) \quad (2.4)$$

где

$$a_m(t) = \frac{4m}{l^2} \left\{ M_m(t) - \sum_{i=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n}^{(i)}(t) [X_n(t) J_i(t, t) - L_i(X_n(t))] \right\}$$

Пусть  $Q(t, \tau)$  есть резольвента ядра  $[J_1(t, \tau) + J_2(t, \tau)]$ , тогда после некоторых несложных преобразований получим следующую систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода:

$$X_m(t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_{m,n}^{(1)}(t) X_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{0^-}^t K_{m,n}^{(1)}(t, \tau) X_n(\tau) d\tau = N_m^{(1)}(t) \quad (2.5)$$

$$(0 < t < t_n, m = 1, 2, \dots)$$

здесь введены обозначения

$$B_{m,n}^{(1)}(t) = \frac{4m}{l^2} Q(t, t) \sum_{i=1}^2 A_{m,n}^{(i)}(t) J_i(t, t)$$

$$N_m^{(1)}(t) = \frac{4m}{l^2} \int_{0^-}^t Q(t, \tau) \frac{\partial M_m(\tau)}{\partial \tau} d\tau$$

$$K_{m,n}^{(1)}(t, \tau) = -\frac{4m}{l^2} \left\{ Q(t, t) \sum_{i=1}^2 A_{m,n}^{(i)}(t) \frac{\partial J_i(t, \tau)}{\partial \tau} + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial Q(t, \tau)}{\partial \tau} J_i(\tau, \tau) A_{m,n}^{(i)}(\tau) - \sum_{i=1}^2 \int_{0^-}^t A_{m,n}^{(i)}(\xi) \frac{\partial Q(t, \xi)}{\partial \xi} \frac{\partial J_i(\xi, \tau)}{\partial \tau} d\xi \right\}$$

Следовательно, решение поставленной задачи свелось к решению бесконечной системы интегральных уравнений Вольтерра (2.5). Эту систему на регулярность будем исследовать позднее, а теперь займемся случаем, когда  $a(t)$  уменьшается во времени.

б) Пусть  $a(t)$  в момент времени  $t_n$  достигает максимума и далее убывает до момента времени  $t_m$ . Определим  $P(x, t)$  и  $c(t)$  для промежутка  $t_n < t < t_m$ . С этой целью перепишем уравнение (1.2) в таком виде:

$$\sum_{i=1}^2 \int_{0^-}^t J_i(t, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-a(\tau)}^{a(\tau)} \ln \frac{1}{\left| 2 \sin \frac{\pi(x-s)}{2l} \right|} P(s, \tau) ds d\tau = \Psi(x, t) + \pi(v_1 + v_2) \quad (2.6)$$

$(t_n < t < t_m, -a(t) < x < a(t))$

где

$$\Psi(x, t) = \varphi(x, t) - \sum_{i=1}^2 \int_{0^-}^t J_i(t, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-a(\tau)}^{a(\tau)} K_i(x, s) P(s, \tau) ds d\tau \quad (2.7)$$

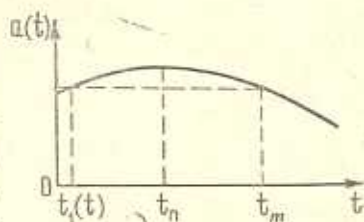
Обращая в (2.5) интегральный оператор по  $t$ , получим уравнение

$$\int_{-a(t)}^{a(t)} \ln \frac{1}{\left| 2 \sin \frac{\pi(x-s)}{2l} \right|} P(s, t) ds - \int_{0^-}^t Q(t, \tau) \frac{\partial \Psi(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau = \\ = \pi \int_{0^-}^t Q(t, \tau) \frac{\partial (v_1 + v_2)}{\partial \tau} d\tau \quad (2.8)$$

$$(t_n < t < t_m, -a(t) < x < a(t))$$

Здесь  $Q(t, \tau)$  — резольвента ядра  $[J_1(t, \tau) + J_2(t, \tau)]$ .

Введем величину  $t_1(t)$  (фиг. 2), которая представляет собой функцию  $t$ , определяемую выражением  $a(t) = a(t_1)$  ( $t_n > t_1 > 0$ ) [4, 5]. Тогда (2.8) можем записать в таком виде:



Фиг. 2.

$$\int_{-a(t)}^{a(t)} \ln \frac{1}{\left| 2 \sin \frac{\pi(x-s)}{2l} \right|} P(s, t) ds - \int_{0^-}^t Q(t, \tau) \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial \tau} d\tau = \\ = \pi \left( \int_{0^-}^{t_1} + \int_{t_1}^t \right) Q(t, \tau) \frac{\partial (v_1 + v_2)}{\partial \tau} d\tau \quad (2.9)$$



В правой части уравнения (2.9) функция  $v_1 + v_2 = [c(t) - f_1(x)]H(t)$  при  $t_1 < \tau < t$ , а при  $0 < \tau < t_1$  она определяется уравнением (2.6) согласно случаю а). Подставляя выражение  $\Psi(x, t)$  из (2.7) в (2.9), после несложных выкладок получим

$$\int_{-a(t)}^{a(t)} \ln \left| \frac{1}{2 \sin \frac{\pi(x-s)}{2l}} \right| P(s, t) ds + \sum_{i=1}^2 J_i(t, t) \int_{-a(t)}^{a(t)} K_i(x, s) P(s, t) ds +$$

$$+ \sum_{i=1}^2 \int_{0^-}^t A^{(i)}(t, \tau) d\tau \int_{-a(\tau)}^{a(\tau)} K_i(x, s) P(s, \tau) ds = \pi \left( \int_{0^-}^{t_1} + \int_{t_1}^t \right) Q(t, \tau) \frac{\partial(v_1 + v_2)}{\partial \tau} d\tau \quad (2.10)$$

где

$$A^{(i)}(t, \tau) = \int_{0^-}^{\tau} \frac{\partial Q(t, \xi)}{\partial \xi} \frac{\partial J_i(\xi, \tau)}{\partial \tau} d\xi - \left[ \frac{\partial J_i(t, \tau)}{\partial \tau} + J_i(\tau, \tau) \frac{\partial Q(t, \tau)}{\partial \tau} \right]$$

$$(i=1, 2)$$

При этом  $P(x, t)$  опять-таки удовлетворяет уравнениям (1.3). Разложим  $P(x, \tau)$  для  $t_n < \tau < t_m$  в ряд по многочленам Чебышева первого рода в интервале  $(-a(\tau), a(\tau))$ , то есть

$$P(x, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(\tau) \frac{\cos(\lambda x/2) T_{2n} \left[ \frac{\sin(\lambda x/2)}{\sin(\lambda a(\tau)/2)} \right]}{\sqrt{2} [\cos(\lambda x) - \cos(\lambda a(\tau))]} \quad (2.11)$$

Для  $X_0(t)$  сразу получаем  $X_0(t) = \frac{\lambda}{\pi} P_0(t)$ . Далее, подставляя выражение из (2.11) в (2.10) и используя ортогональность многочленов Чебышева, после некоторых выкладок приходим к следующей эквивалентной бесконечной системе интегральных уравнений Вольтерра:

$$X_m(t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_{m,n}^{(2)}(t) X_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{0^-}^t K_{m,n}^{(2)}(t, \tau) X_n(\tau) d\tau = N_m^{(2)}(t) \quad (2.12)$$

здесь

$$B_{m,n}^{(2)}(t) = \frac{4m}{l^2} \sum_{i=1}^2 A_{m,n}^{(i)}(t), \quad K_{m,n}^{(2)}(t, \tau) = \frac{4m}{l^2} \sum_{i=1}^2 A^{(i)}(t, \tau) A_{m,n}^{(i)}(t)$$

$$N_m^{(2)}(t) = \frac{4m}{l^2} \int_{-a(t)}^{a(t)} \varphi_1(x, t) \frac{T_{2m} \left[ \frac{\sin(\lambda x/2)}{\sin(\lambda a(t)/2)} \right] \cos(\lambda x/2)}{\sqrt{2} [\cos(\lambda x) - \cos(\lambda a(t))]} dx$$

$$\varphi_1(x, t) = \left( \int_{0^-}^{t_1} + \int_{t_1}^t \right) Q(t, \tau) \frac{\partial(v_1 + v_2)}{\partial \tau} d\tau -$$

$$- \sum_{i=1}^2 A_{m, a}^{(i)}(t) \left[ J_i(t, t) X_0(t) + \int_{0^-}^t A^{(i)}(t, \tau) X_0(\tau) d\tau \right]$$

3. Перейдем к исследованию бесконечных систем интегральных уравнений Вольтерра\* (2.5) и (2.12).

Сначала рассмотрим (2.5). С этой целью введем в рассмотрение вещественное пространство всех ограниченных последовательностей непрерывных функций  $m_c$ , определенных на отрезке  $[0^-, t_n]$ , то есть

$$X(t) = \{X_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \in m_c, \quad t \in [0^-, t_n]$$

если  $|X_n(t)| \leq M_n$ , при всех  $n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) и  $t$  из  $[0^-, t_n]$ . Расстояние между двумя точками пространства  $m_c$  введем формулой

$$\rho(x, y) = \sup_{0 < t < t_n} \sup_n |X_n(t) - Y_n(t)| \quad (3.1)$$

Можно доказать, что определенная таким образом метрика существует и удовлетворяет аксиомам метрики, а пространство  $m_c$  — полное.

Далее, пусть имеем оператор

$$Z = Tx + a, \quad Z = \{Z_m(t)\}_{m=1}^{\infty}, \quad a = \{a_m(t)\}_{m=1}^{\infty}$$

который действует следующим образом:

$$Z_m(t) = a_m(t) - \sum_{n=1}^{\infty} B_{m, n}^{(1)}(t) X_n(t) - \sum_{n=1}^{\infty} \int_{0^-}^t K_{m, n}^{(1)}(t, \tau) X_n(\tau) d\tau$$

и пусть

$$Y_i(t) = \{Y_n^{(i)}(t)\}_{n=1}^{\infty} \in m_c \quad (0^- < t < t_n)$$

Тогда можем записать

$$Z_m^{(i)}(t) = a_m(t) - \sum_{n=1}^{\infty} B_{m, n}^{(1)} Y_n^{(i)}(t) - \sum_{n=1}^{\infty} \int_{0^-}^t K_{m, n}^{(1)}(t, \tau) Y_n^{(i)}(\tau) d\tau \quad (i=1, 2)$$

откуда

$$\begin{aligned} |Z_m^{(1)} - Z_m^{(2)}| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} B_{m, n}^{(1)}(t) (Y_n^{(2)} - Y_n^{(1)}) + \right. \\ &+ \left. \sum_{n=1}^{\infty} \int_{0^-}^t K_{m, n}^{(1)}(t, \tau) (Y_n^{(2)} - Y_n^{(1)}) d\tau \right| \leq \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |B_{m, n}^{(1)}(t)| + \right. \\ &+ \left. \sum_{n=1}^{\infty} \int_{0^-}^t |K_{m, n}^{(1)}(t, \tau)| d\tau \right\} \rho(Y_1(t), Y_2(t)) \end{aligned}$$

\* Способ исследования этих уравнений любезно указан автору С. М. Мхитаряном.

Отсюда следует, что указанный оператор будет сжимающим оператором, если

$$\sup_{0 < t < t_n} \sup_m \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |B_{m,n}^{(1)}(t)| + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t |K_{m,n}^{(1)}(t, \tau)| d\tau \right\} < 1 \quad (3.2)$$

Последнее и является условием регулярности системы (2.5). Условие же регулярности (2.12) сводится к следующему:

$$\sup_{t_n < t < t_m} \sup_m \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |B_{m,n}^{(2)}(t)| + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t |K_{m,n}^{(2)}(t, \tau)| d\tau \right\} < 1 \quad (3.3)$$

Рассмотрим частный случай, когда для дисков принимается модель Фойхта, а полосы считаются упругими. Тогда

$$J_1(t, \tau) = \frac{1}{E_1} \left( 1 - e^{-\frac{t-\tau}{\eta}} \right), \quad J_2(t, \tau) = \frac{2(1-\nu_2^2)}{E_2} = \theta_2 = \text{const} \quad (3.4)$$

где  $E_i$  ( $i = 1, 2$ ) — модули Юнга этих материалов,  $\eta$  — время запаздывания, а  $\nu_2$  — коэффициент Пуассона.

В этом случае резольвента ядра  $[J_1(t, \tau) + J_2(t, \tau)]$  выражается формулой

$$Q(t, \tau) = \frac{1}{\theta_2} \left[ \frac{1}{\eta \tau} + \left( 1 - \frac{1}{\eta \tau} \right) e^{-\alpha(t-\tau)} \right] \quad (3.5)$$

где

$$\alpha = (1 + E_1 \theta_2) / E_1 \theta_2 \eta$$

Далее, из (3.4) и (3.5) получим

$$Q(t, t) = \frac{1}{\theta_2} = \text{const}; \quad J_1(t, t) = 0 \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial Q(t, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{\theta_2} \left( \alpha - \frac{1}{\eta} \right) e^{-\alpha(t-\tau)}, \quad \frac{\partial J_1(t, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{e^{-\frac{t-\tau}{\eta}}}{\eta E_1}$$

Применительно к разбираемому частному случаю выясним условие регулярности системы (2.5), то есть в случае, когда  $a(t)$  возрастает. Исходя из формул (3.4)—(3.6), можем записать

$$B_{m,n}^{(1)}(t) = \frac{4m}{l^2} A_{m,n}^{(2)}(t), \quad K_{m,n}^{(1)}(t, \tau) = \frac{4m}{\theta_2 E_1 \eta l^2} e^{-\frac{t-\tau}{\eta}} A_{m,n}^{(1)}(t) - \\ - \frac{(1/\eta - \alpha) 4m}{l^2} \left[ e^{-\alpha(t-\tau)} A_{m,n}^{(2)}(t) + \frac{e^{-(\alpha t - \tau/\eta)}}{\theta_2 E_1 \eta} \int_0^t A_{m,n}^{(1)}(\xi) e^{-\xi(1/\eta - \alpha)} d\xi \right] \quad (3.7)$$

С другой стороны,

$$A_{m,n}^{(i)}(t) = \frac{1}{4\pi^2 \lambda^2 m n} \overline{A_{m,n}^{(i)}(t)} \quad (i=1, 2)$$



где

$$\begin{aligned} \overline{A_{m,n}^{(i)}}(t) = & -\frac{1}{\sin^2(\lambda a(t)/2)} \int_{-a(t)}^{a(t)} \int_{-a(t)}^{a(t)} \frac{\partial^2 K_i(x,s)}{\partial x \partial s} U_{2m-1} \left[ \frac{\sin(\lambda x/2)}{\sin(\lambda a(t)/2)} \right] \times \\ & \times U_{2n-1} \left[ \frac{\sin(\lambda s/2)}{\sin(\lambda a(t)/2)} \right] \times \\ & \times \sqrt{[\cos(\lambda x) - \cos(\lambda a(t))][\cos(\lambda s) - \cos(\lambda a(t))]} dx ds. \end{aligned}$$

Легко заметить, что функция  $\overline{A_{m,n}^{(i)}}(t)$  ограничена по  $t$ .

Обозначим

$$\overline{A_{m,n}^{(i)}} = \sup_{0^- < t < t_n} |\overline{A_{m,n}^{(i)}}(t)| \quad (i=1, 2)$$

Тогда

$$\sup_{0^- < t < t_n} \sum_{n=1}^{\infty} |B_{m,n}^{(1)}(t)| < \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{A_{m,n}^{(1)}}}{n}$$

Но, так как  $\partial^2 K_i(x,s)/\partial x \partial s \in L_2(-a(t), a(t))$ , то получим [8]

$$\sup_{0^- < t < t_n} \sum_{n=1}^{\infty} |B_{m,n}^{(1)}(t)| \sim o(m^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}) \quad (0 < \varepsilon < 1/2)$$

Далее

$$\begin{aligned} \sup_{0^- < t < t_n} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{0^-}^t |K_{m,n}^{(1)}(t,\tau)| d\tau & \leq \frac{4m^2}{\pi^2} \sup_{0^- < t < t_n} \left\{ \frac{1}{\gamma \theta_2 E_1} \sum_{n=1}^{\infty} |\overline{A_{m,n}^{(1)}}(t)| e^{-\frac{t-\tau}{\gamma}} d\tau + \right. \\ & + \frac{|1/\gamma - \alpha|}{\gamma \theta_2 E_1} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{0^-}^t e^{-(\alpha t - \tau/\gamma)} d\tau \int_0^{\tau} |\overline{A_{m,n}^{(1)}}(\xi)| e^{-\xi(1/\gamma - \alpha)} d\xi + \\ & \left. + |1/\gamma - \alpha| \sum_{n=1}^{\infty} \int_{0^-}^t |\overline{A_{m,n}^{(2)}}(t)| e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau \right\} \leq \\ & \leq \frac{1}{\pi^2} \left\{ \frac{1}{\gamma \theta_2 E_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{A_{m,n}^{(1)}}}{n} \int_{0^-}^t e^{-\frac{t-\tau}{\gamma}} d\tau + |1/\gamma - \alpha| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{A_{m,n}^{(2)}}}{n} \int_{0^-}^t e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau + \right. \\ & \left. + \frac{|1/\gamma - \alpha|}{\gamma \theta_2 E_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{A_{m,n}^{(1)}}}{n} \int_{0^-}^t e^{-(\alpha t - \tau/\gamma)} d\tau \int_{0^-}^{\tau} e^{-\xi(1/\gamma - \alpha)} d\xi \right\} \leq \\ & \leq \frac{1}{\gamma^2 \theta_2 E_1} \left( 1 + \frac{2}{\theta_2 E_1} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{A_{m,n}^{(1)}}}{n} + \frac{1}{\theta_2 E_1 \pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{A_{m,n}^{(2)}}}{n} \end{aligned}$$

Отсюда при помощи аналогичных рассуждений убеждаемся в том, что

$$\sup_{0^- < t < t_n} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t |K_{m,n}^{(1)}(t, \tau)| d\tau \sim o(m^{-1/2-\epsilon})$$

следовательно,

$$\sup_{0^- < t < t_n} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |B_{m,n}^{(1)}(t)| + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t |K_{m,n}^{(1)}(t, \tau)| d\tau \right\} \sim o(m^{-1/2-\epsilon})$$

а это и означает, что система (2.5) квазивполне регулярна. Тем же методом легко доказать регулярность системы (2.12), то есть когда зона контакта уменьшается.

В другом частном случае рассмотрим чисто упругий контакт дисков с полосами. Тогда

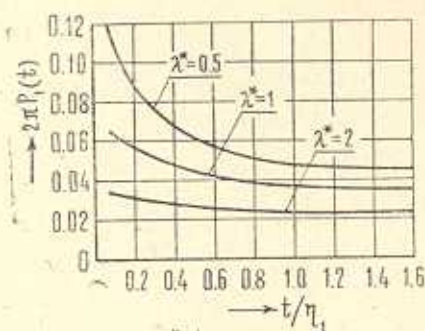
$$J_2(t, \tau) = \theta_2, \quad J_1(t, \tau) = \theta_1 = \text{const}$$

и координата времени будет входить в уравнения как фиктивный параметр, а условия регулярности в обоих случаях примут вид

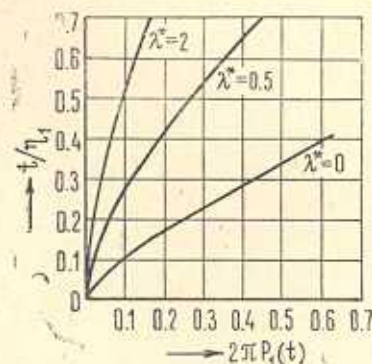
$$\sup_t \sup_m \sum_{n=1}^{\infty} |A_{m,n}^{(1)}(t) + A_{m,n}^{(2)}(t)| < 1 \quad (3.8)$$

следовательно, как и выше, система квазивполне регулярна.

Для частного случая а) приведем численный анализ. Пусть полуудли- на зоны контакта  $a(t)$  изменяется во времени по двум законам: 1)  $a(t) = 0,15 R_0$ , 2)  $a(t) = 0,5 R_0 \sin t$  ( $0 < t < \pi/4$ ). При этом пред- положим, что полосы нагружены равномерно распределенными силами интенсивности  $P(t)$ . Для упругих и геометрических характери- стик примем следующие значения  $l/h = l/R_0 = \pi$ ,  $\lambda^* = 0, 0,5, 1, 2$  ( $\lambda^* = \frac{E_2}{2 E_1 (1 - \nu_2^2)}$ ). Результаты вычислений на ЭВМ „ЕС-1022“ приведены в виде графиков (фиг. 3—6) и таблиц (1—2), где  $P_1(t) = 2 \pi P(t)/E_1$ ,  $\delta_1(t) = c(t)/R_0$ . В обоих случаях исследованы законы

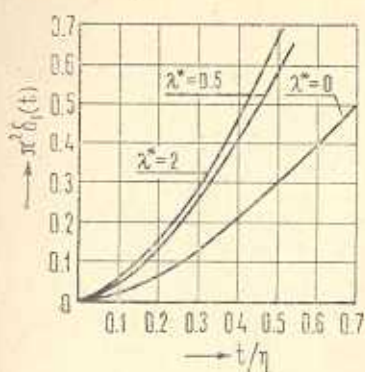


Фиг. 3.

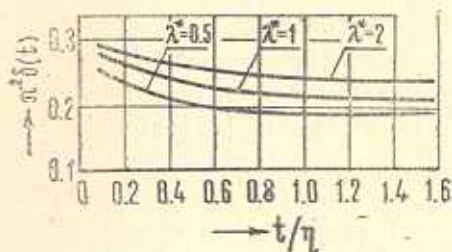


Фиг. 4.

изменения во времени интенсивности прижимающих сил  $P(t)$  (фиг. 3, 4) и меры взаимного сближения полос  $c(t)$  (фиг. 5, 6). В таблицах приведе-



Фиг. 5.



Фиг. 6.

Таблица 1

$$t_n = \pi/2n, \quad a(t) = 0,15 R_0, \quad \lambda^* = 1$$

$t$	$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_3$
$t_1$	0.003277	-0.003269	-0.000011	0.0000029
$t_2$	0.003003	-0.002997	-0.000012	0.0000052
$t_3$	0.002779	-0.002734	-0.000012	0.0000068
$t_4$	0.002594	-0.002589	-0.0000129	0.000008
$t_5$	0.002443	-0.002439	-0.000013	0.0000088
$t_6$	0.002319	-0.002315	-0.0000131	0.0000094
$t_7$	0.002217	-0.002214	-0.0000131	0.0000097
$t_8$	0.002133	-0.002130	-0.000013	0.000010
$t_9$	0.002065	-0.002062	-0.0000129	0.0000101
$t_{10}$	0.002008	-0.002006	-0.0000128	0.0000102

Таблица 2

$$t_n = \pi/2n, \quad a(t) = 0,5 R_0 \sin t, \quad \lambda^* = 1$$

$t$	$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_3$
$t_1$	0.000227	-0.000227	0	0
$t_2$	0.0008883	-0.0008883	-0.0000012	0
$t_3$	0.001943	-0.001941	-0.0000048	0.000002
$t_4$	0.003347	-0.003338	-0.000013	0.000004
$t_5$	0.005048	-0.005026	-0.000029	0.000007
$t_6$	0.006995	-0.006950	-0.000056	0.000011
$t_7$	0.009129	-0.009048	-0.000096	0.000015
$t_8$	0.011388	-0.011257	-0.000151	0.000020
$t_9$	0.013709	-0.013519	-0.000223	0.000026
$t_{10}$	0.016024	-0.015745	-0.000310	0.000031



ны коэффициенты разложения приведенных контактных напряжений, когда  $\lambda^* = 1$ . Анализ этих результатов показывает, что в случае 1) со временем и интенсивность сжимающих сил, и мера сближения постепенно уменьшаются и стремятся к определенной константе. При этом, когда жесткость системы  $\lambda^*$  увеличивается, интенсивность сжимающих сил также увеличивается, а мера сближения, наоборот, уменьшается.

В случае 2), как и следовало ожидать, интенсивность сжимающих сил и мера сближения со временем возрастают. Зависимость от жесткости системы такая же, что и в случае 1).

Отметим, что при помощи рассмотренной здесь задачи могут быть моделированы некоторые прикладные задачи родственных типов, встречающиеся в вопросах железнодорожного транспорта и машиностроения [10].

Автор выражает благодарность С. М. Мхитаряну за обсуждение работы и за ценные советы.

Институт механики АН  
Армянской ССР

Поступила 3 III 1981

Վ. Ն. ՀԱԿՈԲՅԱՆ

ԳՅԱՅԻՆ ՄԱՇՈՒՅԻԿԱՆ-ԱՌԱՋԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ  
ԳԱՐԲԵՐԱԿԱՆ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐ ՄԱՍԻՆ

Ա մ ֆ ո փ ո լ լ լ

Ուսումնասիրված է երկու միատեսակ առաձգամածուցիկ շերտերով առաձգամածուցիկ շրջանային սկավառակների սեղմման պարբերական կոնտակտային խնդիրը, երբ ժամանակի ընթացքում փոփոխվող կոնտակտային տեղամասերում գործում են միայն նորմալ լարումներ:

Խնդրի լուծումը Չեբիշևի օրթոգոնալ բազմանդամների օգտագործման օգնությամբ բերված է վոլտերայի ինտեգրալ հավասարումների համարժեք անվերջ համակարգի, որը թույլ է տալիս անալիտիկ ուսումնասիրություն: Թվային անալիզի օգնությամբ ի հայտ են բերված կարևոր մեխանիկական բնութագրիչների փոփոխման օրինաչափությունները:

## ON PERIODIC CONTACT PROBLEM OF LINEAR THEORY OF VISCOELASTICITY

V. N. HAKOBIAN

S u m m a r y

A periodic contact problem on compression of the system of identical visco-elastic circular discs with two identical visco-elastic strips is considered. It is assumed that in the contact zone, the sizes of which change in time, only normal stresses act. With the help of Chebyshev's

polynomial device solving integral equation with quite a complicated structure to equivalent infinite system of Walter's simple type integral equations permitting analytic research is reduced.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Lee E. M., Radok J. R. M. The contact problem for visco-elastic bodies. *J. Appl. Mech.*, 1960, 27, 438.
2. Hunter S. C. The Hertz problem for a rigid spherical indenter and a viscoelastic half-space. *J. Mech. phys. solids*, 1960, 8, 219.
3. Тинк. Контактные напряжения между жестким штампом и вязкоупругим полупространством. *J. Appl. Mech.*, 1966, т. 33, № 4.
4. Тинк. Контактная задача линейной теории вязкоупругости. *J. Appl. Mech.*, 1968, т. 35, № 2.
5. Белокопы А. В., Воронович И. И. Контактные задачи линейной теории вязкоупругости без учета сил трения и сцепления. *Изв. АН СССР, МТТ*, 1973, № 6.
6. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М., «Мир», 1974.
7. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966.
8. Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М. Некоторые контактные задачи для полуплоскости с частично скрепленными упругими накладками. *Изв. АН Арм.ССР, Механика*, 1972, т. 25, вып. 2.
9. Морарь Г. А., Попов Г. Я. К контактной задаче для полуплоскости с упругим конечным креплением. *ПММ*, 1970, т. 34, № 3.
10. Sternberg E., Tureltaub M. S. Compression of an elastic Roller between two rigid plates. *Механика сплошной среды и родственные проблемы*. М., «Наука» 1972.
11. Развитие теории контактных задач в СССР. М., «Наука», 1974.