ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXIV, № 6, 1981 Механика

В. А. КАРЛАШ

К ТЕОРИИ НЕСИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ТОНКИХ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН С РАЗДЕЛЕННЫМИ ЭЛЕКТРОДАМИ

Тонкие элементы из пьезокерамики в виде круглых пластин и колец находят широкое применение в электромеханических преобразователях энергии — излучателях и приемниках ультразвука, фильтрах частот, резонаторах, пьезотрансформаторах и т. п. Работа этих элементов характеризуется рядом особенностей, главной из которых является сильная связанность электрических (напряженность, индукция) и механических (напряжения, деформации, перемещения) полей. В лучших современных составах пьезокерамики превращаться из механической формы в электрическую и наоборот может до 20—50% энергии. На практике связанность полей проявляется в зависимости характеристических частот и интенсивности возбуждения колебаний на этих частотах от способа электрического нагружения, то есть от величины, формы и схемы соединения электродов.

Хорошее согласие расчетных и экспериментальных данных обеспечивает прикладная теория электроупругости, наиболее полно изложенная в работах А. Ф. Улитко и его учеников.

В тонких круглых пьезокерамических пластинах чаще всего возбуждаются электрическим полем и применяются в различных устройствах радиальные колебания, тогда как несимметричные могут проявляться как паразитные, возникающие из-за внутренних или геометрических неоднородностей. Несимметричные колебания тонких упругих или пьезоэлектрических круглых пластин изучались в работах [1—4], а пьезокерамических тонких колец — в работе [5]. В отличие от радиальных несимметричные колебания характеризуются наличием наряду с деформацией растяжения—сжатия по радиусу также деформации сдвига в плоскости пластины.

В настоящем исследовании в рамках прикладной теории электроупругости выводятся уравнения для определения резонансных частот несимметричных колебаний, а также изучается распределение внутренних динамических напряжений в круглых пьезокерамических пластинах с центральным круговым отверстием произвольного радиуса.

1. Рассмотрим тонкое пьезокерамическое кольцо с наружным радиусом R и внутренним a, покрытое на нижнем и верхнем основаниях сплошными электродами, толщиной которых можно пренебречь. После поляризации до насыщения разделим электродное покрытие с двух сторон на $2l$ кольцевых секторов, равномерно расположенных по азимуту. Соединим соседние

электроды таким образом, чтобы направление нагружающего электрического поля в них было противоположным. Напряженность электрического поля E_z в любом из секторов

$$E_z^{(l)} = \frac{4E_0 l}{\pi}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{\sin l(2t+1)\vartheta}{l((2t+1)} \qquad (1.1)$$

где $E_0 = \frac{V_0}{h}$, V_0 — разность потенциалов, h — толщина, ϑ — угловая координата, причем $h \ll R - a$ и $h \ll \pi a/l$.

Запишем векторное уравнение движения [5]

$$[r^2\nabla^2 + (k_1 r)^2]\operatorname{div}\vec{U} = d_{31}(1+\nu)r^2\nabla^2 E_z \qquad (1.2)$$

$$[r^2\nabla^2 + (k_2 r)^2]\operatorname{rot}_z\vec{U} = 0 \qquad (1.3)$$

где

$$k_1^2 = \omega^2\rho s_{11}^E(1-\nu^2),\ k_2^2 = 2\omega^2\rho s_{11}^E(1+\nu) \qquad (1.4)$$

$$\operatorname{div}\vec{U} = \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_\vartheta}{\partial\vartheta} = \varepsilon_r + \varepsilon_\vartheta \qquad (1.5)$$

$$\operatorname{rot}_z\vec{U} = \frac{\partial U_\vartheta}{\partial r} + \frac{U_\vartheta}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial U_r}{\partial\vartheta} = 2\frac{\partial U_\vartheta}{\partial r} - \varepsilon_{r\vartheta} \qquad (1.6)$$

Остальные обозначения позаимствованы из работы [5]. Поскольку пластина выбрана достаточно тонкая, так что в пределах каждого сектора напряженность электрического поля можно считать однородной по толщине, то

$$\nabla^2 E_z = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial\vartheta^2} = -\frac{4lE_0}{\pi r^2}\sum_{t=0}^{\infty} l(2t+1)\sin l(2t+1)\vartheta \qquad (1.7)$$

Подставляя это соотношение в (1.2) и представляя частное решение полученного уравнения в виде

$$\operatorname{div}\vec{U} = \sum_{t=0}^{\infty} f_t(r)\sin l(2t+1)\vartheta \qquad (1.8)$$

приходим к неоднородному уравнению Бесселя

$$r^2\frac{d^2 f_t}{dr^2} + r\frac{df_t}{dr} + [k_1^2 r^2 - l^2(2t+1)^2]f_t = -\frac{4l^2E_0 d_{31}(1+\nu)}{\pi}(2t+1) \qquad (1.9)$$

общее решение которого

$$f_t = 2a'_{l(2t+1)}J_{l(2t+1)}(k_1 r) + 2a''_{l(2t+1)}Y_{l(2t+1)}(k_1 r) - \\ - G_l l(2t+1)s_{-1,\,l(2t+1)}(k_1 r),\ \left(G_l = \frac{4E_0 l d_{31}(1+\nu)}{\pi}\right) \qquad (1.10)$$

В работах [4, 5] приведено общее решение уравнения (1.3). Обозначая $n = l(2t+1)$, имеем

$$\operatorname{div} \vec{U} = \sum_{n=l}^{\infty} [2\, a_n^{'} J_n(k_1 r) + 2\, a_n^{''} Y_n(k_1 r) - G_l\, n\, s_{-1,\, n}(k_1 r)] \sin n\vartheta \quad (1.11)$$

$$\operatorname{rot}_z \vec{U} = \sum_{n=l}^{\infty} [2\, b_n^{'} J_n(k_2 r) + 2\, b_n^{''} Y_n(k_2 r)] \cos n\vartheta \quad (1.12)$$

Произвольные постоянные $a_n^{'}$, $a_n^{''}$, $b_n^{'}$, $b_n^{''}$ определяются из условия отсутствия радиальных и сдвиговых напряжений на внутреннем и внешнем контурах кольца

$$\sigma_{r|r=a} = \sigma_{r|r=R} = \tau_{r\vartheta|r=a} = \tau_{r\vartheta|r=R} = 0 \quad (1.13)$$

Частотное уравнение для определения безразмерных резонансных частот $\varkappa_{m,n} = (k_1 R)_{m,n}$ несимметричных колебаний $((m, n))$ с любыми радиальным m и угловым n индексами получено в работе [5], в виде определителя четвертого порядка

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & -\alpha_{12} & \alpha_{13} & -\alpha_{14} \\ \alpha_{21} & -\alpha_{22} & \alpha_{23} & -\alpha_{24} \\ -\alpha_{31} & \alpha_{32} & -\alpha_{33} & \alpha_{34} \\ -\alpha_{41} & \alpha_{42} & -\alpha_{43} & \alpha_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad (1.14)$$

причем коэффиценты являются комбинациями функций Бесселя.

Корни уравнения (1.14) находились численным способом для некоторых отношений $\gamma = \dfrac{a}{R}$ при $\nu = 0.34$. Полученные значения $\varkappa_{m,n}$ в интервале $0 \leqslant \gamma \leqslant 0.9$ для случая $l = 3$ приведены в табл. 1. Нетрудно видеть, что с ростом диаметра отверстия частоты всех мод, кроме первых двух, имеют тенденцию к повышению, хотя и проходят через слабо выраженный минимум.

Экспериментальные измерения резонансных частот на пластине из пьезокерамики ЦТС-19 с наружным диаметром 50 *мм* при увеличении γ от 0 до 0.65 подтвердили предсказания таблицы.

Таблица 1

γ	Мода $((m, n))$							
	1.3	2.3	3.3	4.3	5.3	6.3	7.3	8.3
0	2.0562	3.3687	5.2084	6.3013	7.3646	9.0874	9.7453	11.0110
0.1	2.0718	3.5317	5.3698	6.2829	7.3363	9.0923	9.6737	10.9231
0.2	2.0562	3.4991	5.2050	6.2899	7.2434	9.2309	9.6559	11.2434
0.3	2.0014	3.4531	5.2443	6.2650	7.6662	9.0432	10.3182	
0.4	1.9017	3.4787	5.6912	6.0412	8.0412	9.3662	11.6162	
0.5	1.7795	3.5748	5.7998	6.5248	8.6373	10.9123		
0.6	1.6373	3.5594	5.8824	7.9574	9.9824			
0.7	1.5461	3.5594	6.8344	10.5094				
0.8	1.4492	3.4000	9.4500					
0.9	1.3687	3.2187						

2. На основе полученного общего решения (1.11) и (1.12) можно построить выражение для суммы главных механических напряжений $(\sigma_r + \sigma_\vartheta)$ в пластине. Исходя из уравнений состояния [6]

$$\begin{cases} \varepsilon_r = s_{11}^E \sigma_r + s_{12}^E \sigma_\vartheta + d_{31} E_z \\ \varepsilon_\vartheta = s_{12}^E \sigma_r + s_{11}^E \sigma_\vartheta + d_{31} E_z \end{cases} \tag{2.1}$$

имеем

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\vartheta = \operatorname{div} \vec{U} = s_{11}^E (1 - \nu)(\sigma_r + \sigma_\vartheta) + 2 d_{31} E_z \tag{2.2}$$

откуда

$$\sigma_r + \sigma_\vartheta = \frac{1}{s_{11}^E (1 - \nu)} \operatorname{div} \vec{U} - \frac{2 d_{31} E_z}{s_{11}^E (1 - \nu)} \tag{2.3}$$

Подставляя (1.1) и (1.11) в (2.3), получаем

$$\sigma_r + \sigma_\vartheta = \frac{1}{s_{11}^E (1 - \nu)} \sum_{n=l}^{\infty} \Big[2 a_n' J_n (k_1 r) + 2 a_n'' Y_n (k_1 r) - G_l \Big(\frac{2}{n (1 + \nu)} + n s_{-1,\, n} (k_1 r) \Big) \Big] \sin n\vartheta \tag{2.4}$$

Анализ соотношения (2.4) показывает, что внутренние динамические напряжения в тонкой круглой пьезокерамической пластине с центральным круговым отверстием сложным образом зависят от полного набора мод колебаний. Наряду с выбранным семейством несимметричных мод всегда могут возбуждаться и более высокие в силу правила отбора

$$n = l (2t + 1) \quad t = 0,\ 1,\ 2, \cdots \tag{2.5}$$

Действие этого правила иллюстрирует табл. 2, в которой приведены соответствующие данному числу разрезов l числа n.

Таблица 2

l	n					
1	1	3	5	7	9	11
2	2	6	10	14	18	22
3	3	9	15	21	27	
4	4	12	20	28		
5	5	15	25			

Из табл. 2 следует, что с ростом числа разрезов электродного покрытия спектр несимметричных мод, которые могут возбуждаться наряду с основным семейством, делается менее плотным. Необходимо отметить, что правило отбора (2.5) действует для любых несимметричных мод, которые возбуждаются противофазными электрическими полями в круглых пластинах, кольцах или оболочках вращения.

Вблизи резонансных частот $\varkappa_{m,n}$ постоянные $a_n^{'}$ и $a_n^{''}$ резко возрастают (стремится к нулю частотный определитель (1.14)) и вклад первых двух слагаемых в квадратных скобках соотношения (2.4) становится определяющим. Таким образом, распределение динамических напряжений в тонких пьезокерамических кольцах вблизи резонансных частот подчиняется функциям Бесселя первого и второго рода по радиусу и синусоидальному закону по азимуту. Вклад функций Ломмеля $s_{-1,n}$ следует учитывать лишь вдали от резонансных частот.

Экспериментальные исследования по изучению распределения внутренних динамических напряжений как в сплошных круглых пластинах, так и при наличии центрального отверстия проводились методом пьезотрансформаторного датчика [7]. Сперва измерялись резонансные и антирезонансные частоты тонких круглых пластин со сплошными электродами. По этим данным определялись величины ρ_{11}^{E} и ν. Затем электродное покрытие разделялось l диаметральными разрезами с обеих сторон. Вдоль биссектрисы одного из секторов и по дуге полуокружности наносились пьезотрансформаторные датчики и изучалось распределение динамических напряжений в пластине. Наконец, сверлилось центральное отверстие, диаметр его постепенно увеличивался, и исследовалось распределение напряжений в кольце. По характеру азимутального распределения измеренных потенциалов датчиков — последние пропорциональны сумме главных механических напряжений — проводилась идентификация несимметричных мод, то есть устанавливалась их принадлежность тому или иному семейству $((m, n))$. По мере увеличения диаметра отверстия интенсивность одних мод уменьшалась, других увеличивалась. Установлено, что все несимметричные моды проходят через максимумы и минимумы интенсивности.

Исследование распределения динамических напряжений в пластинах с круговым отверстием на несимметричных модах колебаний, равно как и зависимость их интенсивности от диаметра отверстия, проведено в данной работе впервые.

Институт механики
АН УССР

Поступила 24 VII 1980

Վ. Լ. ԿԱՐԼԱՇ

ԲԱԺԱՆՎԱԾ ԷԼԵԿՏՐՈԴՆԵՐՈՎ ԲԱՐԱԿ ՊՅԵԶՈԿԵՐԱՄԻԿԱԿԱՆ ԿԼՈՐ ԹԻԹԵՂՆԵՐԻ ՈՉ ՍԻՄԵՏՐԻԿ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ա մ փ ո փ ու մ

Կիրառական էլեկտրաառաձգականության տեսության շրջանակներում լուծվում է կենտրոնական կլոր անցքով բարակ կլոր պյեզոկերամիկական թիթեղների ոչ սիմետրիկ տատանումների խնդիրը, երբ նրանք ըստ հաստության պոլյարիզացված են մինչև հագեցում։

Հաշված ռեզոնանսային հաճախականությունները և տատանումների ձևերը համեմատվում են փորձնական տվյալների հետ, որոնք ստացվել են ՑՏՍ—19 պյեզոկերամիկայից պատրաստված նմուշների վրա։

ON THE THEORY OF ASYMMETRIC VIBRATIONS OF THIN PIEZOCERAMIC CIRCULAR PLATES WITH SEPARATE ELECTRODES

V. L. KARLASH

Summary

The problem is solved of asymmetric vibrations of polarized along the thickness thin circular piezoceramic plates with a central circular hole. For excitation of asymmetric vibrations the electrode covering of the plate on both sides was divided into arbitrary even number of sectors of equal size with a subsequent switching on of these sectors in the phase opposite to the source of the alternating electric field.

The frequency equation and the equation for distribution of internal dynamic stresses in the plate are introduced. Calculated resonance frequencies and vibration forms are compared with experimental data, obtained on specimens of piezoceramic CTS—19.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.—Л., ОНТИ НКТП, 1935, с. 675.
2. *Onoe M.* Contour vibrations of isotropic circular plates. J. acoust. Soc. Am., 1956 28, p. 1158—1162.
3. *Holland R.* Numerical studies of elastic-disk contour Modes lacking asual symmetry J. acoust. Soc. Am., 1965, 40, p. 1051—1057.
4. *Вовкодав И. Ф., Карлаш В. Л., Улитко А. Ф.* Анализ несимметричных колебаний тонких пьезокерамических дисков с разрезными электродами. Прикл. механика, 1979, 15, № 2, с. 78—82.
5. *Карлаш В. Л.* Исследование несимметричных колебаний поляризованных по толщине пьезокерамических колец. Прикл. механика, 1978, 14, № 12, с. 88—94.
6. *Улитко А. Ф.* К теории колебаний пьезокерамических тел. Тепловые напряжения в элементах конструкций, 1975, вып. 15, с. 90—99.
7. *Карлаш В. Л., Улитко А. Ф.* Метод исследования механических напряжений в колеблющихся пьезокерамических телах. Электричество, 1976, № 11, с. 82—83.