ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIV, № 6 Механика

А. Г. БАГДОЕВ

ПРОНИКАНИЕ ТЕЛА В СРЕДУ ПРИ НАЛИЧИИ ВИБРАЦИЙ

Рассматривается задача о проникании тонкого твердого тела вращения в упругую среду при наличии вибрационного импульса, действующего как до, так и после начала проникания. Рассмотрены две модельные задачи, в первой из которых основным является предварительное нагружение среды с помощью импульса, действующего на ее поверхности, причем во время погружения тела место приложения импульса предположено неизменным. Во второй задаче вибратор находится в вершине проникающего тела. Разумеется, под действием вибраций меняются свойства среды, однако в настоящей статье предположено, что вдали от тела среда остается упругой, хотя и упругие постоянные могут быть функциями частоты колебаний вибрационной силы. Вблизи тела среда течет или появляются трещины по главным меридиональным площадкам.

Задачи о проникании тела в жидкость рассмотрены в [1—3], внедрение сваи в грунт в статической постановке изучалось в [4], задача о проникании тонкого тела в упругую среду решена в [5], приближенный подход к задаче вибронагружения, при котором среда моделируется упругой пластинкой, предложен в [6].

§ 1. *Проникание тела в среду при вибрационной силе, действующей на границе полупространства*

Вначале изучается задача Ламба о вертикальной силе, периодической во времени, действующей на границе полупространства,

$$z=0,\ \sigma_{zz}(r, z, t) = -p(r)\,\mathrm{Re}\, e^{i\omega(t+t_1)},\ \sigma_{rz}=0 \tag{1.1}$$

где Re обозначает действительную часть, r есть радиальная координата, ось Or направлена по свободной поверхности среды, ось Oz — вертикально в глубь среды, t — время, t_1 — некоторый сдвиг по t, учитывающий момент приложения периодической силы, в момент $t=0$ начинается проникание тела. Уравнение меридиана тела выбирается в виде $r=r_k(z, t)$. Вначале определяется поле упругих перемещений от действия силы (1.1). Для определенности полагается $p(r)=\dfrac{p_0\delta(r)}{2\pi r}$, где $\delta(x)$ есть дельта-функция, p_0 — постоянное значение силы. Решение уравнений динамической теории упругости при условии (1.1) можно записать в виде [7]

$$u_r^{(0)}(r, z, t) = -\mathrm{Re}\, e^{i\omega(t+t_1)}\int\limits_0^\infty (\alpha A e^{-\nu_1 z} - \nu_2\alpha B e^{-\nu_2 z})\,\alpha J_1(\alpha r)\,d\alpha$$

$$u_z^{(0)}(r, z, t) = \mathrm{Re}\, e^{i\omega(t+t_1)} \int_0^\infty (-\nu_1 A e^{-\nu_1 z} + \alpha^2 e^{-\nu_2 z})\, \alpha J_0(\alpha r)\, d\alpha \tag{1.2}$$

где A, B находятся с помощью условий (1.1) в виде

$$A = -\frac{p_0}{2\pi\mu} \frac{2\alpha^2 - k_2^2}{R(\alpha)}, \quad B = -\frac{p_0}{\pi\mu} \frac{\nu_1}{R(\alpha)}$$

$$R(\alpha) = (2\alpha^2 - k_2^2)^2 - 4\alpha^2 \nu_1 \nu_2, \quad \nu_n = (\alpha^2 - k_n^2)^{\frac{1}{2}}, \quad k_n = \frac{\omega}{c_n}, \quad n = 1, 2 \tag{1.3}$$

c_1 и c_2 — скорости продольных и поперечных волн.

Для малых r можно получить

$$u_r^{(0)} \approx -r\varkappa, \quad \varkappa = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\, e^{i\omega(t+t_1)} \int_0^\infty (\alpha A e^{-\nu_1 z} - \nu_2 \alpha B e^{-\nu_2 z})\, \alpha^2\, d\alpha \tag{1.4}$$

В упругой области для $t \geqslant 0$ поле смещений можно представить в виде

$$u_r = u_r^{(0)} + u_r^{(1)}, \quad u_z = u_z^{(0)} + u_z^{(1)}$$

где $u_{r,z}^{(1)}$ — перемещения, удовлетворяющие нулевым начальным условиям, связанные с проникамием тела. Используя метод источников [3, 5], можно показать, что вблизи тела, то есть для малых r имеет место

$$u_r^{(1)} \approx \frac{f(z, t)}{2\pi r}, \quad u_z^{(1)} \approx 0 \tag{1.5}$$

где функция $f(z, t)$, связанная с плотностью источников, определяется из граничных условий.

Для напряжений в упругой среде имеет место

$$\sigma_{rr} = \lambda\Delta + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \lambda\Delta + 2\mu \frac{u_r}{r}$$

$$\sigma_{zz} = \lambda\Delta + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \sigma_{rz} = \mu\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right), \quad \Delta = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{1.6}$$

Вблизи тела естественно предположить наличие течения среды, которое происходит позади фронта $r = r_k \xi_0$, привязанного к вершине тела, причем при отсутствии вибраций [5] получается, что $\xi_0 = \mathrm{const}$. В области течения имеют место уравнения [5]

$$\frac{\varepsilon_{rr}}{\varepsilon_i} = \frac{\sigma_{rr} - \sigma}{2\tau_s}, \quad \frac{\varepsilon_{\theta\theta}}{\varepsilon_i} = \frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma}{2\tau_s}, \quad \frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon_i} = \frac{\sigma_{zz} - \sigma}{2\tau_s}, \quad \frac{\varepsilon_{zr}}{\varepsilon_i} = \frac{\sigma_{rz}}{\tau_s} \tag{1.7}$$

Здесь

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{v_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

где v_r, v_z — компоненты скорости, причем в основном порядке $|\varepsilon_{zz}| \ll |\varepsilon_{rr}|$ и тогда получится для интенсивности скорости деформации $\varepsilon_i = 2\frac{v_r}{r}$.

Постоянная $6\tau_s^2$ есть правая часть условия Мизеса

$$(\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta})^2+(\sigma_{rr}-\sigma_{zz})^2+(\sigma_{\theta\theta}-\sigma_{zz})^2+6\,\tau_{rz}^2=6\,\tau_s^2 \qquad (1.8)$$

Отметим, что решение $u_r^{(0)}$, $u_z^{(0)}$ получено на основании граничного условия (1.1) на поверхности $z=0$.

Для $u_r^{(1)}$, $u_z^{(1)}$ имеются нулевые граничные условия (1.1), однако, как показано в [5], всюду, за исключением малой окрестности точки O, отраженные от $z=0$ волны имеют порядок λ_1^2, где λ_1 — характерная толщина тела, и в порядке $0(1)$, в котором вычисляется $\frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r}$ на теле, ими можно пренебречь. Отраженные волны, имеющие порядок малости λ_1^2, можно определять по $u_r^{(1)}$, $u_z^{(1)}$ методом [5]. Точно так же не влияет на решение в основном порядке и малая окрестность точки O, где порядки величин v_r такие же, как и на всем теле [5]. Таким образом, при вычислении напряжений в порядке $0(1)$ достаточно для $u_r^{(1)}$, $u_z^{(1)}$ удовлетворять нулевым начальным условиям и граничным условиям при $r=r_k\xi_0$. Условие малости $\frac{\partial v_z}{\partial z}$ имеет место [5] при проникании без вибраций и соответствует условию проникания, при котором по крайней мере $v_r \sim v_z$, и тогда в порядке $0(1)$ в области течения уравнение несжимаемости примет вид

$$\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_r}{r}=0 \qquad (1.9)$$

причем $3\sigma=\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta}+\sigma_{zz}$. Из (1.7) в основном порядке получится

$$\sigma_{rr}=\sigma-\tau_s,\ \sigma_{\theta\theta}=\sigma+\tau_s,\ \sigma_{zz}=\sigma \qquad (1.10)$$

Интегрируя (1.9) и удовлетворяя условию на теле $v_r=\frac{\partial r_k}{\partial t}$ или $u_r=r_k$, можно получить при $r\leqslant r_k\xi_0$

$$v_r=\frac{r_k}{r}\frac{\partial r_k}{\partial t},\ u_r=r-\sqrt{r^2-r_k^2} \qquad (1.11)$$

Тогда из непрерывности нормальных перемещений на поверхности $r=r_k\xi_0$ в силу того, что $\xi_0\gg 1$ и поэтому $u_r\approx\frac{r_k^2}{2r}$, получится

$$\frac{r_k}{2\xi_0}=u_r^{(0)}+\frac{1}{2\pi r_k\xi_0}f(z,t) \qquad (1.12)$$

Условие для нормального импульса в силу малости скоростей частиц можно записать в виде

$$\sigma_{rr}^{(0)}+\sigma_{rr}^{(1)}=\sigma_{rr} \qquad (1.13)$$

Для определения σ_{rr} в области течения можно использовать упрощенные уравнения движения

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0$$

где использована малость σ_{rz} и u_r, откуда согласно (1.10) получится

$$\sigma_{rr} = 2\tau_s \ln r + \varphi(z, t) - \tau_s \tag{1.14}$$

В силу (1.5), (1.6) $\sigma_{rr}^{(1)} = -\frac{\mu}{\pi r^2} f(z, t)$, тогда функция φ определится из (1.12), (1.13) в виде

$$2\tau_s \ln \xi_0 r_k + \varphi - \tau_s = -\frac{\mu}{\xi_0^2} - (2\lambda + 4\mu)\varkappa + \lambda \frac{\partial u_z^{(0)}}{\partial z} \tag{1.15}$$

где

$$\frac{\partial u_z^{(0)}}{\partial z} = \operatorname{Re} e^{i\omega(t-t_1)} \int_0^\infty (\nu_1^2 A e^{-\nu_1 z} - \alpha^2 \nu_2 B e^{-\nu_2 z}) \alpha d\alpha \tag{1.16}$$

Для определения функции ξ_0 имеется условие (1.8), которое следует записывать для упругого решения, причем, учитывая (1.4), можно найти

$$\frac{1}{\xi_0^2} = -2\varkappa + \sqrt{\frac{\tau_s^2}{\mu^2} - \frac{4}{3}\left\{\varkappa + \frac{\partial u_z^{(0)}}{\partial z}\right\}^2} \tag{1.17}$$

Необходимое условие того, что решение верно

$$\frac{\tau_s^2}{\mu^2} > \frac{4}{3}\left\{\varkappa + \frac{\partial u_z^{(0)}}{\partial z}\right\}^2 + 4\varkappa^2 \tag{1.18}$$

выполняется для достаточно малых значений импульса. Для больших p_0 область течения появляется до начала проникания и упругое решение при $r > r_k \xi_0$ не имеет места. В области течения согласно (1.14), (1.15)

$$\sigma_{rr} = 2\tau_s \ln \frac{r}{r_k \xi_0} - \frac{\mu}{\xi_0^2} - (2\lambda + 4\mu)\varkappa + \lambda \frac{\partial u_z^{(0)}}{\partial z}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr} + 2\tau_s \tag{1.19}$$

и если при $r = r_k \xi_0$ $\sigma_{\theta\theta} < \sigma_*$, где σ_* есть прочность на отрыв по меридиональным площадкам, то и при $r < r_k \xi_0$ $\sigma_{\theta\theta} < \sigma_*$ и трещины не образуются [5].

Можно учесть также тот факт, что под действием вибраций упругие постоянные принимают их новые значения за конечное время*. Один из способов, в котором среда вдали от тела переходит из вязкого в упругое состояние, заключается в замене постоянных λ, μ на [9]

$$\lambda\left(1 + \bar{\tau}\frac{\partial}{\partial t}\right), \quad \mu\left(1 + \tau\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

где $\bar{\tau}$, τ есть время релаксации, при этом (1.5) снова имеет место. Также можно учесть в области течения эффекты вязкости, заменяя в

* Проще всего взять упругое решение вдали от тела, в котором $\mu = \mu(t)$, при этом (1.19) снова имеет место.

(1.7) $\frac{\tau_s}{\varepsilon_i}$ на $\mu' + \frac{\tau_s}{\varepsilon_i}$, где μ' есть коэффициент сдвиговой вязкости, а также можно учесть и упругие слагаемые в тензоре скоростей деформаций [10].

Можно решить также задачу проникания в грунт, в котором вблизи тела имеет место условие сыпучести [2]

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1-k}{1+k}\sigma_{rr} + \frac{\tau_0}{1+k}, \quad \tau_0 = 2\tau_s$$

Вводя лагранжеву координату $\xi = r - u_r$, получим из (1.11) $u_r = \sqrt{\xi^2 + r_k^2} - \xi$, а уравнение движения дает (после отбрасывания $\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}$)

$$\sigma_{rr} = \frac{\tau_0}{\nu(1+k)}\left(1 - \frac{r_k^\nu}{r^\nu}\right) + \frac{r_k^\nu}{r^\nu}\sigma_{rr}(0, t), \quad \nu = \frac{2k}{1+k}$$

На фронте $r = r_k \xi_0$, $\sigma_{rr} \approx \sigma_{rr}^{(0)} + \sigma_{rr}^{(1)}$, откуда получится

$$\frac{\tau_0}{\nu(1+k)}\left(1 - \frac{1}{\xi_0^\nu}\right) + \frac{1}{\xi_0^\nu}\sigma_{rr}(0, t) = -2(\lambda+\mu)\varkappa +$$

$$+\lambda\frac{\partial u_z^{(0)}}{\partial z} - \frac{\mu(1 + 2\varkappa\xi_0^2)}{\xi_0^2}$$

ξ_0 определяется из указанного условия предельного равновесия или непрерывности $\sigma_{\theta\theta}$, что дает с учетом того, что $\sigma_{rr}^{(0)} \approx \sigma_{\theta\theta}^{(0)}$, $\sigma_{rr}^{(1)} \approx -\sigma_{\theta\theta}^{(1)}$,

$$\frac{2\mu(1 + 2\varkappa\xi_0^2)}{\xi_0^2} + \left\{-2(\lambda+\mu)\varkappa + \lambda\frac{\partial u_z^{(0)}}{\partial z}\right\}2k = \tau_0$$

При отсутствии вибраций отсюда снова получится $\xi_0^2 = \frac{\mu}{\tau_s}$. Давление на теле $\sigma_{rr}(0, t)$ найдется по предыдущей формуле. В дальнейшем для простоты при расчетах взята первоначальная модель среды с областью течения вблизи тела и упругой средой при $r \geqslant r_k\xi_0$. Сила сопротивления прониканию равна

$$P = -2\pi\int_0^f r_k \sigma_{rr}|_{r=r_k}(\lambda_1 + k_1)\,dz$$

где $f(t)$ есть глубина проникания, $\lambda_1 \approx -\frac{\partial r_k}{\partial z}$ есть полуугол раствора тела, k_1 — коэффициент трения. Записывая уравнение движения тела $mf'' = -P + p_0\cos\omega(t + t_1)$, можно из (1.17) для ряда значений z находить ξ_0 на каждом слое по t. Тогда для $f(t)$ получится обыкновенное дифференциальное уравнение, которое при заданной форме тела $r_k = r_k\{f(t) - z\}$ можно решать для начальных условий $t = 0$, $f(t) = 0$,

$f'(t) = V$, $\xi_0 = 1$. При $\mu \neq 0$ или при $\tau_s \neq 0$ решение имеет особенность в вершине тела. Вблизи точки пересечения тела со свободной поверхностью $z=0$ также требуется уточнение решения [5]. Согласно решению в области $r < r_k \xi_0$ на теле $\frac{\partial u_r}{\partial r} = \infty$, что согласуется с тем фактом, что точки оси $r=0$ переходят в точки поверхности $r = r_k$. Кроме того, вблизи тела можно пренебречь $u_r^{(0)}$, $u_z^{(0)}$ по сравнению с u_r в то время, как в упругой области они имеют один порядок.

§ 2. *Проникание при наличии фронта трещин*

При невыполнении условия $\sigma_{\theta\theta} < \sigma_*$ при $r = r_k \xi_0$ можно предположить, что позади фронта $r = r_k \xi_0$ имеет место образование меридиональных трещин, на которых выполняется условие $\sigma_{\theta\theta} = 0$ [8]. Повторяя выкладки работы [5] с учетом вибрационных перемещений § 1, можно получить в области трещин вблизи тела

$$\sigma_{rr} = \frac{2\mu\eta r_k}{r}\left\{-\frac{1}{\eta + \ln \xi_0} + \xi_0 \frac{-\varkappa 2(\lambda+2\mu) + \lambda \frac{\partial u_z^{(0)}}{\partial z}}{2\mu(\ln \xi_0 + \eta)}\right\} \tag{2.1}$$

где ξ_0 определяется из соотношения

$$-2\varkappa \frac{\lambda(\eta + \ln \xi_0) + (\lambda + 2\mu)\ln \xi_0}{\eta + \ln \xi_0} + \lambda \frac{\partial u_z^{(0)}}{\partial z}\frac{\eta + 2\ln \xi_0}{\eta + \ln \xi_0} +$$

$$+ 2\mu \frac{\eta}{\xi_0(\eta + \ln \xi_0)} = \sigma_* \tag{2.2}$$

причем $\eta = \frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda + 2\mu}$. Условие того, что реализуется фронт трещин, позади которого не возникает фронт течения, помимо вышеуказанного, имеет вид

$$\sqrt{6}\,\frac{\sqrt{(\lambda+\mu)^2 + \frac{1}{3}\mu^2}}{(\eta + \ln \xi_0)(\lambda + 2\mu)}\left\{1 + \frac{\varkappa 2(\lambda+2\mu) - \lambda \frac{\partial u_z^{(0)}}{\partial z}}{2\mu}\xi_0\right\} < \sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{\tau_s}{\mu} \tag{2.3}$$

При невыполнении условия (2.3) позади фронта $r = r_k \xi_0$ трещин образуется фронт течения $r = r_k \xi_1$. Впереди фронта $r = r_k \xi_0$ по-прежнему имеет место упругое решение (1.4), (1.6). Так же, как и в задаче [5], где отсутствуют вибрации, можно получить решение в области трещин $r_k \xi_1 < r < r_k \xi_0$ и области течения $r_k < r < r_k \xi_1$, в которой имеет место

$$\sigma_{rr} = 2\tau_s \ln \frac{r}{r_k \xi_1} - \eta\mu \frac{1}{\xi_1^2\left(\ln \frac{\xi_0}{\xi_1} + \eta\right)} +$$

$$+\eta\,\frac{-2(\lambda+2\mu)\varkappa+\lambda\dfrac{\partial u_z^{(0)}}{\partial z}}{\ln\dfrac{\xi_0}{\xi_1}+\eta}\,\frac{\xi_0}{\xi_1} \tag{2.4}$$

где ξ_0, ξ_1 определяются уравнениями

$$\frac{1}{\ln\xi_0/\xi_1+\eta}\left\{\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\frac{1}{\xi_1^2}+\frac{\xi_0}{\xi_1}2\varkappa-\frac{\xi_0}{\xi_1}\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\frac{\partial u_z^{(0)}}{\partial z}\right\}\sqrt{\frac{(\lambda+\mu)^2}{\mu^2}+\frac{1}{3}}=\frac{\tau_s}{\mu}$$

$$-4(\lambda+\mu)\varkappa+2\lambda\frac{\partial u_z^{(0)}}{\partial z}+$$

$$+\frac{\eta\mu}{\xi_1\xi_0(\ln\xi_0/\xi_1+\eta)}+\eta\,\frac{2\varkappa(\lambda+2\mu)-\lambda\dfrac{\partial u_z^{(0)}}{\partial z}}{\ln\dfrac{\xi_0}{\xi_1}+\eta}=\sigma_* \tag{2.5}$$

Условие отсутствия фронта трещин позади фронта $r=r_k\xi_1$

$$2\tau_s+\frac{\xi_0}{\xi_1}\left\{-4(\lambda+\mu)\varkappa+2\lambda\frac{\partial u_z^{(0)}}{\partial z}\right\}<\left(1+\frac{\xi_0}{\xi_1}\right)\sigma_* \tag{2.6}$$

Полученные формулы достаточно просты и по ним можно проводить численные расчеты, причем были проведены расчеты для задачи § 1, в которой имеется фронт течения, и тело взято в виде конуса с углом полураствора λ_1. Были взяты следующие значения величин $c_1=a$, $c_2=b$:

$$\frac{b}{a}=\frac{1}{1.81},\ \frac{V}{b}=0.1,\ \omega t_1=50,\ \omega t=6.86;\ 10$$

$$\frac{\omega z}{b}=z_1,\ 0.1<z_1<\frac{V}{b}\,\omega t,\quad \frac{\tau_s}{\mu}=0.01;\ 0.1$$

$$p=\frac{p_0\omega^2}{4\pi\mu b^2},\ p=10^{-6};\ 10^{-5};\ 10^{-4}$$

где V — скорость проникания, которая пока предположена постоянной. Сила сопротивления записывается в виде

$$P=-(\lambda_1+k_1)\lambda_1\int_0^{Vt}2\pi(Vt-z)\,\sigma_{rr}\,dz$$

или

$$P=2\pi(\lambda_1+k_1)\lambda_1\frac{b^2\tau_s}{\omega^2}P',\ P'=-\int_0^{\frac{V}{b}\omega t}\left(\frac{V}{b}\,\omega t-z_1\right)\frac{\sigma_{rr}}{\tau_s}\,dz_1$$

где λ_1 — угол полураствора, k_1 — коэффициент трения.

Ввиду того, что период по ωt функций

$$\frac{\varkappa}{p}=J,\ \frac{1}{p}\frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial z}=K$$

равен $2\pi \approx 6.28$, можно продолжить полученные значения периодически по ωt, причем значения J, K в точке 6.86 обратны по знаку их величинам в точке 10.

Результаты расчетов приведены в табл. 1, где даны результаты для $\omega t = 10$, причем для $\omega t = 6.86$ следует поменять знаки J, K, а также в

Таблица 1

$\omega t = 10$

z_1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
J	74.666	18.91	8.633	5.041	3.374	2.461	1.902	1.53	1.221	1.101
K	233.684	58.935	26.645	15.335	10.082	7.210	5.461	4.309	3.427	2.977

табл. 2, 3, где в последнем столбце записаны постоянные значения $\frac{1}{\xi_0^2}$ и σ_{rr}, получаемые при $p=0$; при $z_1>0.7$ величины $\frac{1}{\xi_0^2}$ и σ_{rr} почти по-

Таблица 2

$p=10^{-5},\ \frac{\tau_z}{\mu}=0.01$

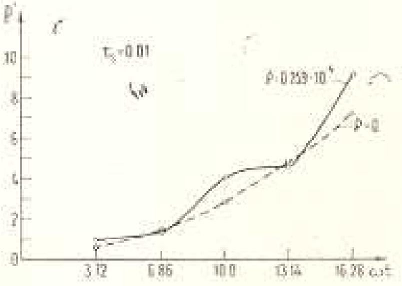
z_1		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	$p=0$
$\frac{1}{\xi_0^2}$	$\omega t=10$	0.008	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
	$\omega t=6.86$	0.011	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
$-\frac{\sigma_{rr}}{\tau_z}$	$\omega t=10$	5.82	5.65	5.63	5.62	5.61	5.61	5.61	5.6
	$\omega t=6.86$	5.42	5.56	5.58	5.59	6.6	5.6	5.6	5.6

Таблица 3

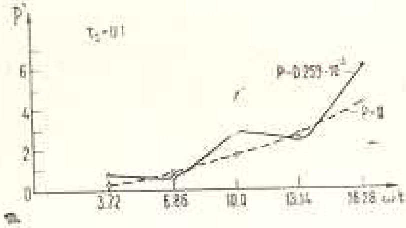
$p=10^{-4},\ \frac{\tau_z}{\mu}=0.1$

z_1		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	$p=0$
$\frac{1}{\xi_0^2}$	$\omega t=10$	0.079	0.096	0.098	0.099	0.099	0.1	0.1	0.1
	$\omega t=6.86$	0.108	0.103	0.102	0.101	0.101	0.101	0.1	0.1
$-\frac{\sigma_{rr}}{\tau_z}$	$\omega t=10$	3.52	3.35	3.33	3.32	3.31	3.3	3.3	3.3
	$\omega t=6.86$	3.11	3.25	3.28	3.29	3.29	3.3	3.3	3.3

стоянны, причем то же относится к величинам $\frac{1}{\xi_0^2}$ и σ_{rr} при значениях $p=10^{-6}$, $\frac{\tau_z}{\mu}=0.01$, где $-\frac{\sigma_{rr}}{\tau_z}=5.6$ и при $p=10^{-6}$, $p=10^{-5}$, $\frac{\tau_z}{\mu}=0.1$, где $-\dfrac{\sigma_{rr}}{\tau_s} = 3.3$. Кроме того, на графиках 1, 2 приведены кривые, дающие изменение P' в зависимости от ωt, причем пунктиром дана линия P'_0, соответствующая $p=0$. Следует отметить, что значения K, J, $\dfrac{1}{\xi_0^3}$, $\dfrac{\sigma_{rr}}{\tau_s}$, P годятся для произвольного закона проникания $f(t)$, только следует заменить V на $\dfrac{f}{t}$. Полученные значения σ_{rr} и P позволяют оценить влияние вибраций на сопротивление среды прони-



Фиг. 1.



Фиг. 2.

канию и получить закон движения тела в среде при наличии вибраций. Следует отметить, что при $\dfrac{\tau_s}{\mu} = 0.1$ значения $-\dfrac{\sigma_{rr}}{\mu}$ больше значений при $\dfrac{\tau_s}{\mu} = 0.01$, однако $\left(-\dfrac{\sigma_{rr}}{\tau_s}\right)$ при этом уменьшается. Предполагая, что вибрации сильно уменьшают μ и $\dfrac{\mu}{\tau_s}$, отсюда можно получить вывод о значительном уменьшении $(-\sigma_{rr})$ и силы сопротивления из-за вибраций.

Тот же вывод относится к коэффициенту трения.

Расчеты выполнены Г. А. Саркисяном.

§ 3. *Случай вибрационной силы, приложенной в вершине тела*

В вышерассмотренных задачах было сделано предположение о том, что вибрация имеет место и до начала проникания, причем вибрационная сила все время приложена в точке O свободной поверхности среды. Для виброударных инструментов, по-видимому, более естественным является предположение о том, что вибрации передаются в среду через силу, приложенную в вершине тела. Вначале решается задача о движении точечной силы со скоростью проникания V, которая для простоты предположена постоянной.

Уравнения движения в цилиндрической системе координат записываются в виде

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 v'}{\partial r^2}+(\lambda+2\mu)\frac{1}{r}\left(\frac{\partial v'}{\partial r}-\frac{v'}{r}\right)+\mu\frac{\partial^2 v'}{\partial z^2}+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u'}{\partial r\partial z}=$$

$$=\rho\frac{\partial^2 v'}{\partial t^2}$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 v'}{\partial r\partial z}+(\lambda+\mu)\frac{1}{r}\frac{\partial v'}{\partial z}+\mu\frac{\partial^2 u'}{\partial r^2}+\mu\frac{1}{r}\frac{\partial u'}{\partial r}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u'}{\partial z^2}=$$

$$=f+\rho\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} \qquad (3.1)$$

где f есть объемная сила, направленная по оси z,

$$f=-\operatorname{Re} p_0\,\frac{1}{2\pi r}\,\delta(r)\,\delta(Vt-z)\,e^{-i\omega_0 t} \qquad (3.2)$$

Удобно ввести функции

$$u'=\operatorname{Re} u,\ v'=\operatorname{Re} v \qquad (3.3)$$

тогда для u, v знак Re в (3.2) можно отбросить. Решение для преобразования Лапласа по t от v, u ищется в виде

$$\bar{v}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}A(\alpha,\beta)\,e^{i\alpha z}\,J_1(\beta r)\,d\alpha d\beta$$

$$\qquad (3.4)$$

$$\bar{u}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}B(\alpha,\beta)\,e^{i\alpha z}\,J_0(\beta r)\,d\alpha d\beta$$

Подставляя (3.4) в (3.1), к которому применено двустороннее преобразование Лапласа, и обращая преобразования Фурье по α и Ганкеля по β, можно найти

$$A=-\frac{p_0}{2\pi\Delta}\rho i\alpha\,(a^2-b^2)\,\beta^2\,\delta\,(\omega-\omega_0-V\alpha)$$

$$\qquad (3.5)$$

$$B=\frac{p_0}{2\pi\Delta}\rho\,(a^2\beta^2+b^2\alpha^2-\omega^2)\,\beta\delta\,(\omega-\omega_0-V\alpha)$$

где $s=-i\omega$ есть параметр преобразования Лапласа,

$$\Delta=\rho^2\,(\omega^2-a^2\alpha^2-a^2\beta^2)(\omega^2-b^2\alpha^2-b^2\beta^2)$$

и использовано преобразование Лапласа

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}\,\delta\,(Vt-z)\,e^{-i\omega_0 t}\,dt=\frac{1}{V}\,e^{i\frac{z}{V}(\omega-\omega_0)}$$

Применяя обратное преобразование Лапласа к (3.4), (3.5), можно получить, например, для v

$$v = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} e^{-i\omega_0 t}\,\frac{i\alpha\beta\,(a^2-b^2)\,\beta p_0 e^{i\alpha(z-Vt)}\,J_1(\beta r)\,d\alpha d\beta}{2\pi\rho\,(\omega_1^2 - a^2\alpha^2 - a^2\beta^2)(\omega_1^2 - b^2\alpha^2 - b^2\beta^2)} \tag{3.6}$$

где $\omega_1 = \omega_0 + V\alpha$.

Проводится вычисление вычетов по α в точках $\omega_0 + V\alpha = \omega$ или

$$\alpha_{1,2}^{(1,2)} = \frac{\omega_0 V \pm J_{1,2}}{c_{1,2}^2 - V^2},\quad J_n = c_n\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2(c_n^2 - V^2)} \tag{3.7}$$

причем верхнему индексу 1 соответствуют знак «+», и значения $\alpha_{1,2}^{(1)} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_{1,2}^2} - \beta^2}$; это решение соответствует $z > Vt$. Соответственно при $z < Vt$ выбирается верхний индекс 2 в (3.7), знак „—" и значения $\alpha_{1,2}^{(2)} = -\sqrt{\frac{\omega^2}{c_{1,2}^2} - \beta^2}$. Окончательно получится при $z < Vt$

$$v = -p_0\sum_{n=1}^{2}\int_0^\infty(-1)^{n-1}e^{-i\omega_0 t}\,\frac{\alpha_n^{(2)}\beta^2\, e^{i\alpha_n^{(2)}(z-Vt)}\,c_n^2\,J_1(\beta r)}{\omega_n^{(2)\,2}\,4\pi\rho\,J_n}\,d\beta$$

$$u = p_0\int_0^\infty e^{-i\omega_0 t}\,\frac{i\alpha_1^{(2)^2}\,\beta c_1^2\, e^{i\alpha_1^{(2)}(z-Vt)}\,J_0(\beta r)}{\omega_1^{(2)^2}\,4\pi\rho J_1}\,d\beta + \tag{3.8}$$

$$+ p_0\int_0^\infty e^{-i\omega_0 t}\,\frac{i\beta^3 c_2^2\, e^{i\alpha_2^{(2)}(z-Vt)}\,J_0(\beta r)}{4\pi\rho\,\omega_2^{(2)^2}\,J_2}\,d\beta$$

где использовано соотношение

$$1 - V\frac{d\alpha_n}{d\omega_n} = \frac{\omega_n\,(1 - V^2/c_n^2) - \omega_0}{V\alpha_n}$$

и имеет место

$$\omega_n^{(1,2)} = \frac{\omega_0 \pm VJ_n/c_n^2}{1 - V^2/c_n^2}$$

причем точки $\alpha_{1,2}^{(2)}$ находятся в нижней полуплоскости. При $z > Vt$ взяты значения $\alpha_{1,2}^{(1)}$.

Для того, чтобы выяснить являются ли непрерывными значения v, u при $z = Vt$, можно использовать соотношение [5]

$$\int_0^\infty \beta\,\frac{e^{i|z|\sqrt{\omega^2/c_n^2 - \beta^2}}}{\sqrt{\beta^2 - \frac{\omega^2}{c_n^2}}}\,J_0(\beta r)\,d\beta = \frac{e^{i\frac{\omega}{c_n}\sqrt{z^2+r^2}}}{\ldots}$$

где $\sqrt{\beta^2-\omega^2/c_n^2} = -i\sqrt{\frac{\omega^2}{c_n^2}-\beta^2}$, и получить из (3.8)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=p_0\frac{\partial^2}{\partial z\partial r}\sum_{n=1}^{2} e^{-i\omega_0 t}(-1)^{n-1} e^{i\frac{\omega_0 V}{c_n^2-V^2}(z-Vt)}\frac{e^{i\frac{\omega_0}{c_n\sqrt{1-V^2/c_n^2}}R_n}}{4\pi\rho R_n}$$

причем $R_n=\sqrt{\frac{(Vt-z)^2}{1-V^2/c_n^2}+r^2}$. Поскольку такое же выражение получается при $z>Vt$, отсюда следует правильность (3.8) и соответствующего значения для $z>Vt$. Можно вычислить сначала в (3.4), (3.5) вычет по α и получить

$$-\bar{v}=\pm p_0\int_0^\infty\sum_{n=1}^{2}(-1)^{n-1}\frac{\beta^2\delta(\omega-\omega_0-V\alpha_n)\,e^{i\alpha_n z}}{2\rho\,\omega^2}J_1(\beta r)\,d\beta$$

$$-\bar{u}=\mp p_0\int_0^\infty\frac{i\alpha_1\beta\delta(\omega-\omega_0-V\alpha_1)}{2\omega^2\rho}J_0(\beta r)\,d\beta\,\mp$$

$$\mp p_0\int_0^\infty i\beta^3\delta(\omega-\omega_0-V\alpha_2)\,e^{i\alpha_2 z}J_0(\beta r)\frac{d\beta}{2\alpha_2\,\omega^2\rho} \qquad (3.9)$$

где $\alpha_1=\pm\sqrt{\frac{\omega^2}{a^2}-\beta^2}$, $\alpha_2=\pm\sqrt{\frac{\omega^2}{b^2}-\beta^2}$, верхние (нижние) знаки относятся к $z>Vt$ $(z<Vt)$.

Для того, чтобы получить совпадение с формулой (3.8), следует при $z<Vt$ вычислять в (3.9) интегралы от дельта-функции в точках $\alpha_{1,2}^{(2)}$, а при $z>Vt$ — в точках $\alpha_{1,2}^{(1)}$. (3.8) дает решение стационарной задачи без учета нулевых начальных условий и свободной поверхности. Для достаточно больших t и малых $\frac{V}{b}$ можно и при наличии последней считать задачу не зависящей от начальных условий. Тогда для построения отраженных от поверхности $z=0$ волн следует полагать для полных комплексных перемещений $V^1=v+v_1$, $U^1=u+u^1$, где $\bar{v}$, $\bar{u}$ даются (3.4), в которых берутся нижние знаки

$$\bar{v}_1=\int_0^\infty\sum_{n=1}^{2}A_n(\beta)\,e^{-i\alpha_n z}J_1(\beta r)\,d\beta$$

$$\bar{u}_1=\int_0^\infty\sum_{n=1}^{2}B_n(\beta)\,e^{-i\alpha_n z}J_0(\beta r)\,d\beta,\ U'=\mathrm{Re}\,U^1,\ V'=\mathrm{Re}\,V^1 \qquad (3.10)$$

На поверхности $z=0$ имеются условия $\tau_{zz}=\tau_{rz}=0$, которые дают

$$\lambda\left(\frac{\partial V^1}{\partial r}+\frac{V^1}{r}\right)+(\lambda+2\mu)\frac{\partial U^1}{\partial z}=0 \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial V^1}{\partial z}+\frac{\partial U^1}{\partial r}=0$$

Подставляя (3.9), (3.10) в (3.11), учитывая соотношения, получаемые из уравнений (3.1), верных и для u_1, v_1 ($l=0$), после подстановки в (3.10) $B_1=-\frac{\alpha_1}{i\beta}A_1$, $B_2=\frac{\beta}{i\alpha_2}A_2$, можно получить решение в виде

$$-A_1\Delta_1=\frac{p_0}{2\omega^2\rho}\beta^2 b^2 R_1\,\delta(\omega-\omega_0-V\alpha_1)+$$

$$+2\frac{b^2p_0}{\rho\omega^2}\beta^4\left(\frac{\omega^2}{b^2}-2\beta^2\right)\delta(\omega-\omega_0-V\alpha_2),\ R_1=\left(\frac{\omega^2}{b^2}-2\beta^2\right)^2-4\beta^2\alpha_1\alpha_2$$

$$-A_2\Delta_1=-2b^2\left(\frac{\omega^2}{b^2}-2\beta^2\right)p_0\frac{\alpha_1\alpha_2\beta^2}{\omega^2\rho}\delta(\omega-\omega_0-V\alpha_1)+$$

$$+p_0\frac{\beta^2b^2}{2\omega^2\rho}\delta(\omega-\omega_0-V\alpha_2),\ \frac{\Delta_1}{b^2}=\left(\frac{\omega^2}{b^2}-2\beta^2\right)^2+4\alpha_1\alpha_2\beta^2$$

Подставляя полученные соотношения в (3.10), после обратного преобразования по ω с учетом того, что в силу $-(z+Vt)<0$ нужно вычислять интегралы от дельта-функции в точках $\alpha_{1,2}^{(2)}$, получится

$$-v_1=p_0\int_0^\infty\sum_{n=1}^{2}\Omega_n(\omega_n^{(2)})J_1(\beta r)\,e^{-i\omega_n^{(2)}t-i\alpha_1(\omega_n^{(2)})z}d\beta+$$

$$+p_0\int_0^\infty\sum_{n=1}^{2}K_n(\omega_n^{(2)})J_1(\beta r)\,e^{-i\omega_n^{(2)}t-i\alpha_2(\omega_n^{(2)})z}d\beta \tag{3.12}$$

$$-u_1=p_0\int_0^\infty\sum_{n=1}^{2}\Omega_n(\omega_n^{(2)})J_0(\beta r)\,e^{-i\omega_n^{(2)}t-i\alpha_1(\omega_n^{(2)})z}\frac{i\alpha_1(\omega_n^{(2)})}{\beta}d\beta+$$

$$+p_0\int_0^\infty\sum_{n=1}^{2}K_n(\omega_n^{(2)})J_0(\beta r)\,e^{-i\omega_n^{(2)}t-i\alpha_2(\omega_n^{(2)})z}\frac{\beta}{i\alpha_2(\omega_n^{(2)})}d\beta$$

где

$$\Omega_1(\omega)=\frac{\beta^2b^2R_1(\omega)V\alpha_1}{4\pi\Delta_1(\omega)\{\omega(1-V^2a^{-2})-\omega_0\}\omega^2\rho}$$

$$\Omega_2(\omega)=\frac{b^2\beta^4\left(\frac{\omega^2}{b^2}-2\beta^2\right)V\alpha_2}{\pi\rho\omega^2\Delta_1(\omega)\{\omega(1-V^2b^{-2})-\omega_0\}}$$

$$K_1(\omega) = -\frac{b^2 \beta^2 \left(\frac{\omega^2}{b^2} - 2\beta^2\right) \alpha_1^2 \, V\alpha_2}{\pi\rho\,\omega^2 \Delta_1(\omega) \left[\omega\left(1 - V^2 a^{-2}\right) - \omega_0\right]}$$

$$K_2(\omega) = \frac{\beta^2 b^2 R_1(\omega) \, V\alpha_2}{4\pi\rho\,\omega^2 \Delta_1(\omega) \left\{\omega\left(1 - V^2 b^{-2}\right) - \omega_0\right\}}$$

Для малых r, учитывая, что $J_1(\beta r) \approx \frac{1}{2}\beta r$, и обозначая $\operatorname{Re} V' = -r\varkappa$, можно получить значения $\varkappa$ и $\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial u_1'}{\partial z}$ сложением действительной части выражений (3.8), (3.12), причем сравнение с § 1 показывает, что роль $u_r^{(0)}$, $u_z^{(0)}$ играют V', U'. Далее, используя значения $\varkappa = \varkappa_0 + \varkappa_1$, $\frac{\partial u_z^{(0)}}{\partial z}$ в формулах §§ 1, 2, можно получить решение задачи о проникании тела в упругую среду при наличии фронта течения, фронта трещин и фронта трещин, за которым следует фронт течения, причем вибрационная сила p_0 действует в вершине тела во все время с начала проникания. При $V=0$, взяв (3.8) для $z > Vt$, то есть для значений $\alpha_{1,2}^{(1)}$, и сложив с (3.12), с учетом того, что при этом $\alpha_n^{(1)} = -\alpha_n^{(2)}$, $\omega_0 = -\omega$, $\sqrt{\beta^2 - \frac{\omega^2}{c_n^2}} = i\alpha_n^{(2)}$, можно получить решение (1.2), в котором изменен знак p_0. Следует отметить, что в отсутствие предварительного нагружения среды, учитывая, что вибрации передаются в среду через всю поверхность проникающего тела, можно упростить задачу, не учитывая слагаемых $u_r^{(0)}$, $u_z^{(0)}$.

Тогда (1.19) примет вид

$$\sigma_{rr} = 2\tau_s \ln \frac{r}{r_k \xi_0} - \tau_s, \quad \xi_0^2 = \frac{\mu}{\tau_s}$$

и на теле $+\sigma' = \sigma_{rr} = -\tau_s \ln \frac{\mu}{\tau_s} - \tau_s$ постоянно. Уравнение движения конуса имеет вид $r_k = \lambda_1 (f - z)$.

$$mf''(t) = -\tau_s \left(\ln \frac{\mu}{\tau_s} + 1\right) \pi f^2(t) \lambda_1 (\lambda_1 + k_1) + p_0 \cos \omega t$$

где p_0 есть вибрационная сила. Хотя вблизи свободной поверхности требуется уточнение решения [5], влияние этой области на закон движения мало, и его можно не учитывать. Для произвольного $r_k = r_k\,[f(t) - z] = r_k(\zeta)$

$$V = f'(0), \; f'^2(t) - V^2 = \frac{2\pi\sigma'}{m} \int_0^f r_k^2(\zeta)\, d\zeta + \frac{4\pi\sigma' k_1}{m} \int_0^f r_k(\zeta)(f - \zeta)\, d\zeta,$$

откуда при $f'(t) = 0$ найдется $f = f_{\max}$.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 10 V 1979

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ

ՄԱՐՄՆԻ ԹԱՓԱՆՑՈՒՄԸ ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ՄԵՋ ՎԻԲՐԱՑԻԱՆԵՐԻ ՆԵՐԿԱՅՈՒԹՅԱՄԲ

Ամփոփում

Ենթադրվում է որ թափանցող մարմնի շրջակայքում տեղի ունի միջավայրի քայքայում և միջավայրը հոսում է։ Դիտարկված խնդիրներում լուծումը առաձգական տիրույթի համար կարվում է մարմնի շրջակայքում պլաստիկական տիրույթի համար ստացված լուծման հետ։ Բերվում են աղյուսակները և գրաֆիկները։

THE PENETRATION OF A BODY INTO A MEDIUM UNDER VIBRATION

A. G. BAGDOEV

Summary

The penetration of a slender body of revolution into the elastic medium under a vibration impulse is considered. The problems are examined. In the first one the initial loading of the medium by the impulse applied to the surface of the medium is studied. In the second one the vibration impulse is applied to the top of the penetrating body. The front, connected with the top of the body and separating the region of elastic deformations from the region of plastic flow near the body is introduced. The effective solution, satisfying the boundary conditions on the body is found. The tables of stresses on the body and the graphs of the resistance force of the medium are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Григорян С. С.* Некоторые вопросы газодинамики тонких тел. Кандидатская диссертация, МГУ, 1956.
2. *Сагомонян А. Я.* Проникание. Изд. МГУ, 1974.
3. *Багдоев А. Г.* Проникание узкого конуса в сжимаемую жидкость. Вестник МГУ, 1955.
4. *Сеекло В. А., Шмойлов А. Ф.* Осесимметричная задача о внедрении в упругое полупространство тонкой жесткой гладкой сваи конечной длины. ПММ, 1975, т. 39, вып. 4.
5. *Багдоев А. Г.* Проникание тонкого тела вращения в упругую среду. Изв. АН Арм.ССР, 1977, т. 30, № 5.
6. *Неймарк Ю. И.* Теория вибрационного погружения. Инж. сб., 1953, т. 16, стр. 13—48.
7. *Новацкий В.* Теория упругости. М., «Мир», 1975.
8. *Григорян С. С.* Некоторые вопросы математической теории деформирования горных пород. ПММ, 1967, т. 31, вып. 4.
9. *Кольский Г.* Волны напряжения в твердых телах. М., ИЛ, 1955.
10. *Ионов В. Н., Огибалов П. М.* Напряжения в телах при импульсивном нагружении. М., Изд-во ВШ, 1975.