ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXIV, № 6, 1981 Механика

Э. Х. ГРИГОРЯН

ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА ПЛОСКИХ ВОЛН В ПЛОСКИХ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

В работе методом плоских волн получено решение уравнений однородной среды при наличии сосредоточенных импульсов. При решении использовано известное представление δ-функции в виде разложения на плоские волны [1, 2]. Это разложение δ-функции было дано в работе [3], которое затем применялось к решению задачи Коши для гиперболических уравнений и к построению фундаментальных решений эллиптических уравнений. Аналогичные результаты получены также в монографии [4], где при решении соответствующих задач использовано представление непрерывной функции в виде разложения по некоторым плоским волнам.

В настоящей работе проведена элементарная модификация в представлении δ-функции в виде разложения на плоские волны, которая позволяет в плоской задаче определить фундаментальное решение для уравнений магнитоупругости достаточно простым образом. Далее, с помощью такой модификации, методом плоских волн получается решение задачи Ламба для упругой среды.

Задачи о сосредоточенном импульсе для безграничной магнитоупругой среды другими методами исследовались в работах [5, 6].

Решение задачи Ламба для упругой среды методом интегральных преобразований содержится в [7], а методом функционально-инвариантных решений Смирнова-Соболева — в [8].

1. Требуется определить решение системы уравнений

$$c_1^2\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x_1^2}+c_2^2\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x_2^2}+c^2\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{1}{\rho}P\delta(x_1)\delta(x_2)\delta(t)=\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2}$$

$$c_4^2\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x_1^2}+c_3^2\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x_2^2}+c^2\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{1}{\rho}Q\delta(x_1)\delta(x_2)\delta(t)=\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

при условии

$$u^{(1)}(x_1,x_2,t)=0,\ \frac{\partial u^{(1)}(x_1,x_2,t)}{\partial t}=0,\ u^{(2)}(x_1,x_2,t)=0,\ \frac{\partial u^{(2)}(x_1,x_2,t)}{\partial t}=0$$

$$\text{при}\quad t<0 \quad (1.1')$$

где $c^2=c_1^2-c_2^2$, $c_1^2=(\lambda+2G)/\rho$, $c_2^2=G/\rho$, $c_3^2=c_1^2+a^2$, $c_4^2=c_2^2+a^2$, $a^2=\mu H_0^2/4\pi\rho$, λ и G — постоянные Ламэ, ρ — плотность упругой среды,

μ — магнитная проницаемость среды, H_0 — интенсивность внешнего магнитного поля, a — скорость Альфвена.

Уравнения (1.1) описывают движение идеально проводящей упругой среды при наличии однородного магнитного поля $\vec{H}(H_0, 0, 0)$, когда в среде действуют объемные силы в виде сосредоточенных импульсов, в случае пренебрежения токами смещения [5, 6].

Для решения задачи (1.1), (1.1)′ пользуемся представлением $\delta(x_1)\,\delta(x_2)$ в виде разложения на плоские волны [1]

$$\delta(x_1)\,\delta(x_2) = -\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{d\zeta}{(\zeta_1 x_1+\zeta_2 x_2)^2},\ \zeta_1^2+\zeta_2^2=1,\ |\zeta|=\sqrt{\zeta_1^2+\zeta_2^2} \quad (1.2)$$

Имея в виду, что $\zeta_1^2+\zeta_2^2=1$, (1.2) можно записать в виде

$$\delta(x_1)\,\delta(x_2) = -\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\left[\frac{1}{(\zeta_1 x_1+\sqrt{1-\zeta_1^2}\,x_2)^2}+\frac{1}{(\zeta_1 x_1-\sqrt{1-\zeta_1^2}\,x_2)^2}\right]\times$$

$$\times\frac{d\zeta_1}{\sqrt{1-\zeta_1^2}} \quad (1.3)$$

Из (1.3) после продолжения ζ_1 на всю действительную ось получим

$$\delta(x_1)\,\delta(x_2) = -\frac{1}{2\pi^2}\,\mathrm{Re}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(\zeta_1 x_1+\zeta_2 x_2)^2}\,\frac{d\zeta_1}{\sqrt{1-\zeta_1^2}}\right],\quad \zeta_2=\sqrt{1-\zeta_1^2} \quad (1.4)$$

Очевидно, что под $\sqrt{1-\zeta_1^2}$ понимается та ветвь этой функции, которая положительна при положительных мнимых значениях ζ_1. Такую ветвь можно выбрать, если провести разрез на отрезке $(-1, 1)$. Для такой ветви $\sqrt{1-\zeta_1^2}$ положительно мнима при $\zeta_1<-1$ и отрицательно мнима при $\zeta_1>1$.

Эта элементарная модификация в представлении $\delta(x_1)\,\delta(x_2)$ (1.4) дает возможность в дальнейшем без каких-либо трудностей получить решение задачи (1.1), (1.1)′ в виде записи через элементарные функции.

Теперь приступим к решению задачи (1.1), (1.1)′. Для этого сначала определим решение однородного уравнения (1.1) вида

$$\overset{*}{u}{}_\lambda^{(1)} = A_\lambda f(\lambda t+\zeta_1 x_1+\zeta_2 x_2),\quad \overset{*}{u}{}_\lambda^{(2)} = B_\lambda f(\lambda t+\zeta_1 x_1+\zeta_2 x_2)\quad (-\infty<\zeta_1<+\infty)$$

Под $\sqrt{1-\zeta_1^2}$ понимается вышеуказанная ветвь этой функции.

После подстановки этих функций в (1.1) и требования, чтобы они удовлетворяли однородным уравнениям, для определения A_λ, B_λ получим систему уравнений

$$(c_1^2\zeta_1^2+c_2^2\zeta_2^2-\lambda^2)\,A_\lambda+c^2\zeta_1\zeta_2\,B_\lambda=0$$

$$c^2\zeta_1\zeta_2\,A_\lambda+(c_4^2\zeta_1^2+c_3^2\zeta_2^2-\lambda^2)\,B_\lambda=0$$

Для того, чтобы получить нетривиальное решение этой системы, должно иметь место следующее:

$$\lambda^4 - \lambda^2 (c_2^2 + c_3^2) + c_2^2 c_3^2 + a^2 c^2 \zeta_1^2 = 0$$

Решив это уравнение, получим его корни в следующем виде:

$$\lambda_j = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{c_2^2 + c_3^2 - (-1)^j \sqrt{(c_3^2 - c_2^2)^2 - 4a^2 c^2 \zeta_1^2}}$$

$$\lambda_3 = -\lambda_1, \ \lambda_4 = -\lambda_2 \quad (j = 1, \ 2)$$

Очевидно, что $\zeta_1 = \zeta_1^{\pm} = \pm (c_3^2 - c_2^2)/2ac$ будут точками ветвления внутреннего радикала в выражениях $\lambda_j(\zeta_1)$, $(j = 1, \ 2)$.

Фиксируем значения внутреннего радикала так, как это сделано относительно функции $\sqrt{1 - \zeta_1^2}$. Очевидно, что в этом случае надо провести разрез, соединяющий ζ_1^- с ζ_1^+. В разрезанной указанным образом плоскости точка $\zeta_1^{(1)} = -ic_2c_3/ac$ будет точкой ветвления для $\lambda_1(\zeta_1)$, а $\zeta_1^{(2)} = \overline{\zeta_1^{(1)}}$ — точкой ветвления для $\lambda_2(\zeta_1)$. Теперь однозначные ветви функций $\lambda_j(\zeta_1)$, $(j = 1, \ 2)$ в указанной плоскости выберем так, чтобы $\lambda_1(\zeta_1)$ для мнимых значений ζ_1 было положительным при $\operatorname{Im}\zeta_1 > \operatorname{Im}\zeta_1^{(1)}$ и отрицательно мнимым при $\operatorname{Im}\zeta_1 < \operatorname{Im}\zeta_1^{(1)}$, а $\lambda_2(\zeta_1)$ — положительным при $\operatorname{Im}\zeta_1 < \operatorname{Im}\zeta_1^{(2)}$ и отрицательно мнимым при $\operatorname{Im}\zeta_1 > \operatorname{Im}\zeta_1^{(2)}$. Для этого для $\lambda_1(\zeta_1)$ надо провести разрез, соединяющий точку $\zeta_1^{(1)}$ с бесконечностью и находящийся в левой полуплоскости, а для $\lambda_2(\zeta_1)$—разрез, соединяющий точку $\zeta_1^{(2)}$ с бесконечностью и находящийся в правой полуплоскости. Причем линия $\operatorname{Im}\zeta_1 = \operatorname{Im}\zeta_1^{(2)}$ обходит точку $\zeta_1^{(2)}$ снизу, а линия $\operatorname{Im}\zeta_1 = \operatorname{Im}\zeta_1^{(1)}$ — точку $\zeta_1^{(1)}$ сверху.

Таким образом, общее решение однородного уравнения в рассматриваемом классе функций будет иметь вид

$$\overset{\circ}{u}{}^{(1)} = A_{\lambda_j} f(\lambda_j t + \zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2), \quad \overset{\circ}{u}{}^{(2)} = B_{\lambda_j} f(\lambda_j t + \zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2) \quad (j = 1, 2, 3, 4)$$

Здесь и в дальнейшем под повторяющимся индексом понимается суммирование.

Имеют место следующие соотношения:

$$B_{\lambda_j} = -\frac{c_1^2 \zeta_1^2 + c_2^2 \zeta_2^2 - \lambda_j^2}{c^2 \zeta_1 \zeta_2} A_{\lambda_j}, \quad (j = 1, 2, 3, 4) \tag{1.5}$$

Теперь построим решение задачи (1.1), (1.1)'. Имея в виду (1.4), решение задачи (1.1), (1.1)' ищем в виде

$$u^{(k)} = -\frac{1}{2\pi^2} H(t) \operatorname{Re} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \overset{\circ}{u}{}^{(k)}(\zeta_1, x_1, x_2, t) \frac{d\zeta_1}{\sqrt{1 - \zeta_1^2}} \right] \quad (k = 1, \ 2)$$

Здесь $H(t)$ — функция Хевисайда.

Подставив $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ в систему уравнений (1.1) и потребовав, чтобы она удовлетворилась, в результате получаем следующее:

$$\delta_{jj} A_{\lambda_j} = 0, \ \ \lambda_j A_{\lambda_j} = \frac{P}{\rho}, \ \delta_{jj} B_{\lambda_j} = 0, \ \ \lambda_j B_{\lambda_j} = \frac{Q}{\rho} \ (j = 1, \ 2, \ 3, \ 4) \tag{1.6}$$

$$f(\zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2) = -\frac{1}{\zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2} + C$$

Здесь C — произвольная постоянная, δ_{ij} — символы Кронекера.

Разрешив систему уравнений (1.6) и (1.5), для A_{λ_j} и B_{λ_j} получим следующие выражения:

$$A_{\lambda_1} = \frac{P}{2\rho}\frac{c_1^2\zeta_1^2 + c_2^2\zeta_2^2 - \lambda_1^2}{\lambda_1(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} + \frac{Q}{2\rho}\frac{c^{2*}\zeta_1\zeta_2}{\lambda_1(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}, \quad A_{\lambda_3} = -A_{\lambda_1},$$

$$A_{\lambda_2} = -\frac{P}{2\rho}\frac{c_1^2\zeta_1^2 + c_2^2\zeta_2^2 - \lambda_1^2}{\lambda_2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} - \frac{Q}{2\rho}\frac{c^{2*}\zeta_1\zeta_2}{\lambda_2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}, \quad A_{\lambda_4} = -A_{\lambda_2},$$

$$B_{\lambda_1} = -\frac{Q}{2\rho}\frac{c_1^2\zeta_1^2 + c_2^2\zeta_2^2 - \lambda_1^2}{\lambda_1(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} + \frac{P}{2\rho}\frac{c^{2*}\zeta_1\zeta_2}{\lambda_1(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}, \quad B_{\lambda_3} = -B_{\lambda_1},$$

$$B_{\lambda_2} = \frac{Q}{2\rho}\frac{c_1^2\zeta_1^2 + c_2^2\zeta_2^2 - \lambda_2^2}{\lambda_2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} - \frac{P}{2\rho}\frac{c^{2*}\zeta_1\zeta_2}{\lambda_2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}, \quad B_{\lambda_4} = -B_{\lambda_2},$$

Таким образом, решение задачи (1.1), (1.1)′ будет иметь вид

$$u^{(1)} = \frac{H(t)}{2\pi^2}\,\mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} A_{\lambda_j}\left(\frac{1}{\lambda_j t + \zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2} + \frac{1}{\lambda_j t - \zeta_1 x_1 - \zeta_2 x_2}\right)\frac{d\zeta_1}{\sqrt{1-\zeta_1^2}}\right]$$

$$u^{(2)} = \frac{H(t)}{2\pi^2}\,\mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} B_{\lambda_j}\left(\frac{1}{\lambda_j t + \zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2} + \frac{1}{\lambda_j t - \zeta_1 x_1 - \zeta_2 x_2}\right)\frac{d\zeta_1}{\sqrt{1-\zeta_1^2}}\right] \tag{1.7}$$

$(j = 1, 2)$

Нетрудно видеть, что подынтегральные функции имеют следующие точки ветвления: $\zeta_1 = \pm 1$, $\zeta_1 = \zeta_1^*$. Следовательно, эти функции, рассматриваемые как функции комплексного переменного, вне действительной оси, кроме полюсов, других особых точек не могут иметь.

С другой стороны, легко видеть, что волны $\lambda_j t + \zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2 = 0$ будут уходящими от начала координат $(0, 0)$ при $\mathrm{Im}\,\zeta_1 > 0$ только, если $x_2 < 0$, а волны $\lambda_j t - \zeta_1 x_1 - \zeta_2 x_2 = 0$ будут уходящими от $(0, 0)$ при $\mathrm{Im}\,\zeta_1 > 0$ только, если $x_2 > 0$. Учитывая это, после вычислений интегралов из (1.7) стандартным методом теории вычетов, имея при этом в виду, что действительная ось должна обходить особые точки подынтегрального выражения сверху, для $x_2 < 0$ получим

$$u^{(1)} = \frac{H(t)}{\pi}\,\mathrm{Re}\left[\frac{iA_{\lambda_j}(\zeta_1^{(j)})}{\lambda_j'(\zeta_1^{(j)})\,\zeta_2^{(j)}\,t + \zeta_2^{(j)}\,x_1 - \zeta_1^{(j)}\,x_2}\right]$$

$(j = 1, 2)$

$$u^{(2)} = \frac{H(t)}{\pi}\,\mathrm{Re}\left[\frac{iB_{\lambda_j}(\zeta_1^{(j)})}{\lambda_j'(\zeta_1^{(j)})\,\zeta_2^{(j)}\,t + \zeta_2^{(j)}\,x_1 - \zeta_1^{(j)}\,x_2}\right]$$

где $\zeta_1^{(j)}$ определяются из уравнений

$$\lambda_j(\zeta_1^{(j)})\,t + \zeta_1^{(j)}\,x_1 + \zeta_2^{(j)}\,x_2 = 0 \quad (j = 1, 2)$$

2. Рассмотрим колебания упругой полуплоскости, на границе которой приложен сосредоточенный импульс (задача Ламба)

$$
\begin{aligned}
a_0^2 \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x_1^2} + b_0^2 \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x_3^2} \\
b_0^2 \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x_1^2} + a_0^2 \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x_3^2}
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

$$
\left[a_0^2 \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x_2} + (a_0^2 - 2b_0^2) \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_1} \right]_{x_1=0} = -\frac{P}{\rho c} \delta(x_1) \delta(x_3)
$$

$$
\left[\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_2} + \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x_1} \right]_{x_1=0} = -\frac{Q}{\rho b_0^2} \delta(x_1) \delta(x_3) \tag{2.1$'$}
$$

$$
u^{(1)} = 0, \quad \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_3} = 0, \quad u^{(2)} = 0, \quad \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x_3} = 0 \quad \text{при} \quad x_3 < 0 \tag{2.1$''$}
$$

где $a_0^2 = c_1^2/c^2$, $b_0^2 = c_2^2/c^2$, $c^2 = c_1^2 - c_2^2$, $x_3 = ct$, t — переменная, характеризующая время.

Для решения рассматриваемой задачи, как и выше, $\delta(x_1)\,\delta(x_3)$ представим в виде

$$
\delta(x_1)\,\delta(x_3) = -\frac{1}{2\pi^2} \operatorname{Re} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\zeta_1 x_1 + \sqrt{1-\zeta_1^2}\, x_3)^2} \frac{d\zeta_1}{\sqrt{1-\zeta_1^2}} \right] \tag{2.2}
$$

причем под $\sqrt{1-\zeta_1^2}$ понимается та ветвь этой функции, что и в первом пункте.

Решение системы уравнений (2.1) ищем в виде

$$
\overset{\circ}{u}{}^{(1)}_{\lambda} = A_\lambda f(\zeta_1 x_1 - \lambda x_2 + \sqrt{1-\zeta_1^2}\, x_3), \quad \overset{\circ}{u}{}^{(2)}_{\lambda} = B_\lambda f(\zeta_1 x_1 - \lambda x_2 + \sqrt{1-\zeta_1^2}\, x_3) \tag{2.3}
$$

Под $\sqrt{1-\zeta_1^2}$ понимается та ветвь, что и в (2.2).

Подставляя (2.3) в (2.1), для определения A_λ, B_λ получим систему уравнений

$$
\begin{aligned}
(a_0^2 \zeta_1^2 - \zeta_2^2 + \lambda^2 b_0^2) A_\lambda - \lambda \zeta_1 B_\lambda &= 0 \\
& \qquad \zeta_2 = \sqrt{1-\zeta_1^2} \\
-\lambda \zeta_1 A_\lambda + (b_0^2 \zeta_1^2 - \zeta_2^2 + \lambda^2 a_0^2) B_\lambda &= 0
\end{aligned}
$$

Нетрудно видеть, что рассматриваемая система будет иметь нетривиальное решение при

$$
\lambda_1 = \frac{\sqrt{a_0^2+1}}{a_0} \sqrt{\frac{1}{a_0^2+1} - \zeta_1^2}, \quad \lambda_2 = \frac{\sqrt{b_0^2+1}}{b_0} \sqrt{\frac{1}{b_0^2+1} - \zeta_1^2}
$$

$$
\lambda_3 = -\lambda_1, \quad \lambda_4 = -\lambda_2
$$

Функции λ_1, λ_2 выберем так, чтобы они были положительными при положительно мнимых значениях ζ_1. Тогда решение системы уравнений (2.1) в рассматриваемом классе функций будет иметь вид

$$
\overset{\circ}{u}{}^{(1)} = A_{\lambda_j} f(\zeta_1 x_1 - \lambda_j x_2 + \zeta_2 x_3), \quad \overset{\circ}{u}{}^{(2)} = B_{\lambda_j} f(\zeta_1 x_1 - \lambda_j x_2 + \zeta_2 x_3)
$$

причем

$$B_{\lambda_j}=\frac{a_0^2\zeta_1^2-\zeta_2^2+\lambda_j^2 b_0^2}{\lambda_j\zeta_1}A_{\lambda_j}\quad (j=1,2,3,4) \tag{2.4}$$

Так как в рассматриваемой задаче $x_2>0$ и в силу того, что ζ_1, λ_j $(j=1, 2)$ положительны при положительно мнимых значениях ζ_1, то отсюда следует, что наше решение будет представлять уходящую волну, если взять $A_{\lambda_3}=A_{\lambda_4}=0$. Следовательно,

$$\overset{*}{u}{}^{(1)}=A_{\lambda_j}f(\zeta_1x_1-\lambda_jx_2-\zeta_2x_3),\quad \overset{*}{u}{}^{(2)}=B_{\lambda_j}f(\zeta_1x_1-\lambda_jx_2+\zeta_2x_3)\quad (j=1,\ 2)$$

Имея в виду (2.2), решение задачи (2.1), (2.1)′, (2.1)″ ищем в виде

$$u^{(j)}=-\frac{1}{2\pi^2}\,\mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\overset{*}{u}{}^{(j)}(\zeta_1,x_1,x_2,x_3)\frac{d\zeta_1}{\sqrt{1-\zeta_1^2}}\right]\quad (j=1,\ 2)$$

Подставляя $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ в граничное условие (2.1)′, после некоторых выкладок получим следующее:

$$\begin{gathered}\left(2\zeta_1^2-\frac{\zeta_2^2}{b_0^2}\right)A_{\lambda_1}+2\zeta_1^2A_{\lambda_2}=\frac{P\zeta_1}{\rho cb_0^2}\\ 2\lambda_1\lambda_2A_{\lambda_1}-\left(2\zeta_1^2-\frac{\zeta_2^2}{b_0^2}\right)A_{\lambda_2}=\frac{Q\lambda_2}{\rho cb_0^2}\\ f(\zeta_1x_1+\zeta_2x_3)=-\frac{1}{\zeta_1x_1+\zeta_2x_3}+N\end{gathered}\tag{2.5}$$

Здесь N — произвольная постоянная.

Далее из (2.4) и (2.5) получим

$$A_{\lambda_1}=\frac{Q}{\rho cb_0^2}\,\frac{2\lambda_2\zeta_1^2}{\Delta(\zeta_1)}-\frac{P}{\rho cb_0^2}\,\frac{\zeta_1(\zeta_2^2b_0^{-2}-2\zeta_1^2)}{\Delta(\zeta_1)}+A^0_{\lambda_1}$$

$$A_{\lambda_2}=\frac{P}{\rho cb_0^2}\,\frac{2\lambda_1\lambda_2\zeta_1}{\Delta(\zeta_1)}+\frac{Q}{\rho cb_0^2}\,\frac{\lambda_2(\zeta_2^2b_0^{-2}-2\zeta_1^2)}{\Delta(\zeta_1)}+A^0_{\lambda_2}$$

$$B_{\lambda_1}=-\frac{\lambda_1}{\zeta_1}(A_{\lambda_1}-A^0_{\lambda_1})+B^0_{\lambda_1},\ B_{\lambda_2}=\frac{\zeta_1}{\lambda_2}(A_{\lambda_2}-A^0_{\lambda_2})+B^0_{\lambda_2}$$

$$A^0_{\lambda_1}=c_1\delta(\zeta_1-\zeta_{1R})+c_2\delta(\zeta_1+\zeta_{1R}),\ A^0_{\lambda_2}=-\frac{(2\zeta_{1R}^2-\zeta_{2R}^2b_0^{-2})}{2\zeta_{1R}^2}A^0_{\lambda_1}$$

$$B^0_{\lambda_1}=-\frac{\lambda_{1R}}{\zeta_{1R}}A^0_{\lambda_1},\ B^0_{\lambda_2}=-\frac{(2\zeta_{1R}-\zeta_{2R}^2b_0^{-2})}{2\lambda_{2R}\zeta_{1R}}A^0_{\lambda_1},\ \zeta_{2R}=\sqrt{1-\zeta_{1R}^2}$$

$$\Delta(\zeta_1)=(2\zeta_1^2-\zeta_2^2b_0^{-2})^2+4\lambda_1\lambda_2\zeta_1^2,\ \lambda_{jR}=\lambda_j(\zeta_{1R})$$

где $A^0_{\lambda_1}$, $A^0_{\lambda_2}$ удовлетворяют однородным уравнениям системы (2.5), c_1, c_2 — произвольные постоянные, $\delta(z)$ — функция Дирака, а $\zeta_{1R}=c(c^2+c_R^2)^{-1/2}$, где c_R — скорость распространения волн Рэлея, являющаяся корнем уравнения $\Delta(\zeta_1)=0$.

Следовательно, $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ будут даваться формулами

$$u^{(1)}=\frac{1}{2\pi^2}\,\mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(A_{\lambda_j}-A^0_{\lambda_j})}{\zeta_1x_1-\lambda_jx_2+\zeta_2x_3}\;\frac{d\zeta_1}{\sqrt{1-\zeta_1^2}}\right]-$$

$$-\frac{1}{2\pi^2}\,\mathrm{Re}\left[\frac{(-1)^n L_j C_n}{\zeta_{2R}(\zeta_{1R}x_1+(-1)^n\lambda_{jR}x_2-(-1)^n\zeta_{2R}x_3)}\right]+N_1$$

$$u^{(2)}=\frac{1}{2\pi^2}\,\mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(B_{\lambda_j}-B^0_{\lambda_j})}{\zeta_1x_1-\lambda_jx_2+\zeta_2x_3}\;\frac{d\zeta_1}{\sqrt{1-\zeta_1^2}}\right]-$$

$$-\frac{1}{2\pi^2}\,\mathrm{Re}\left[\frac{(-1)^n M_j C_n}{\zeta_{2R}(\zeta_{1R}x_1+(-1)^n\lambda_{jR}x_2-(-1)^n\zeta_{2R}x_3)}\right]+N_2$$

где $L_1=1$, $L_2=(\zeta_{2R}^2b_0^2-2\zeta_{1R}^2)/2\zeta_{1R}^2$, $M_1=-\lambda_{1R}\zeta_{1R}^{-1}$, $M_2=(\zeta_{2R}^2b_0^2-$ $-2\zeta_{1R}^2)/2\zeta_{1R}\lambda_{2R}$, N_1, N_2 — произвольные постоянные.

Здесь интегралы понимаются в смысле главного значения по Коши, поскольку подынтегральные выражения имеют простые полюсы в точках $\pm\zeta_{1R}$.

Вычисляя эти интегралы стандартным методом теории вычетов, при этом имея в виду, что действительная ось должна обходить особые точки подынтегрального выражения сверху, получим

$$u^{(1)}=\frac{1}{\pi}H(x_3)\,\mathrm{Re}\left[\frac{i(A_{\lambda_j}(\zeta_1^{(j)})-A^0_{\lambda_j}(\zeta_1^{(j)}))}{\zeta_2^{(j)}\frac{d}{d\zeta_1}(\zeta_1x_1-\lambda_jx_2+\zeta_2x_3)|_{\zeta_1=\zeta_1^{(j)}}}\right]-$$

$$-\frac{1}{2\pi^2}\,\mathrm{Re}\left[\frac{\pi i\frac{\partial}{\partial\zeta_1}(A_{\lambda_j}-A^0_{\lambda_j})|_{\zeta_1=\zeta_{1R}}\delta_{nn}+(-1)^nL_jC_n}{\zeta_{2R}(\zeta_{1R}x_1+(-1)^n\lambda_{jR}x_2-(-1)^n\zeta_{2R}x_3)}\right]+N_1$$

$$u^{(2)}=\frac{1}{\pi}H(x_3)\,\mathrm{Re}\left[\frac{i(B_{\lambda_j}(\zeta_1^{(j)})-B^0_{\lambda_j}(\zeta_1^{(j)}))}{\zeta_2^{(j)}\frac{d}{d\zeta_1}(\zeta_1x_1-\lambda_jx_2+\zeta_2x_3)|_{\zeta_1=\zeta_1^{(j)}}}\right]-$$

$$-\frac{1}{2\pi^2}\,\mathrm{Re}\left[\frac{\pi i\frac{\partial}{\partial\zeta_1}(B_{\lambda_j}-B^0_{\lambda_j})|_{\zeta_1=\zeta_{1R}}\delta_{nn}+(-1)^nM_jC_n}{\zeta_{2R}(\zeta_{1R}x_1+(-1)^n\lambda_{jR}x_2-(-1)^n\zeta_{2R}x_3)}\right]+N_2$$

где $\zeta_1^{(j)}$ определяются из уравнений

$$\zeta_1^{(j)}x_1-\lambda_j(\zeta_1^{(j)})\,x_2+\zeta_2^{(j)}x_3=0\quad(j=1,\,2)$$

Теперь удовлетворив условиям $(2.1)''$, получим решение задачи Ламба в следующем виде:

$$u^{(1)}=\frac{1}{\pi} H(x_3)\,\mathrm{Re}\left[\frac{i\,\{A_{\lambda_j}(\zeta_1^{(j)})-A^0_{\lambda_j}(\zeta_1^{(j)})\}}{\zeta_2^{(j)}x_1-\zeta_1^{(j)}x_3-\zeta_2^{(j)}\lambda_j^{'}(\zeta_1^{(j)})\,x_2}\right]$$

$$(j=1,\ 2)$$

$$u^{(2)}=\frac{1}{\pi} H(x_3)\,\mathrm{Re}\left[\frac{i\,\{B_{\lambda_j}(\zeta_1^{(j)})-B^0_{\lambda_j}(\zeta_1^{(j)})\}}{\zeta_2^{(j)}x_1-\zeta_1^{(j)}x_3-\zeta_2^{(j)}\lambda_j^{'}(\zeta_1^{(j)})\,x_2}\right]$$

Ереванский государственный
университет

Поступила 11 VII 1980

Է. Խ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

ՀԱՐԹ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՄԵԹՈԴԻ ՄԻ ՄՈԴԻՖԻԿԱՑԻԱՅԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ ՀՈԾ ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ՀԱՐԹ ԳԾԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ

Ամփոփում

Աշխատանքում հարթ ալիքների մեթոդով ստացված է մագնիսաառաձգական միջավայրի հավասարումների լուծումը կենտրոնացած իմպուլսների առկայության դեպքում։ Լուծման ընթացքում կատարված է մոդիֆիկացիա δ-ֆունկցիայի ըստ հարթ ալիքների վերլուծության ներկայացման նկատմամբ։ Նշված մոդիֆիկացիան հնարավորություն է տալիս բավականին հեշտ ձևով որոշելու մագնիսաառաձգականության հավասարումների սիստեմի ֆունդամենտալ լուծումը։ Հետագայում, նշված մոդիֆիկացիայի օգնությամբ, հարթ ալիքների մեթոդով ստացվում է Լեմբի խնդրի լուծումը առաձգական միջավայրի համար։

Ed. Kh. GRIGORIAN

ON SOME MODIFICATION OF THE PLANE WAVES METHOD FOR PLANE PROBLEMS IN CONTINUUM MECHANICS

Summary

The solution for equations of magnetoelastic medium under concentrated loads is obtained by the plane waves method. The modification of the known presentation of δ-function in plane wave expansion is carried out in the solution. This modification makes it possible to obtain in a rather easy way the principal solution for magnetoelasticity equations. Then by this modification the solution of Lamb's problem for elastic medium is obtained, using the plane waves method.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй спецкурс. М., Изд-во «Наука», 1973.
2. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М., Изд-во «Мир», 1964.

3. *Гельфанд И. М., Шапиро З. Я.* Однородные функции и их приложения. Успехи мат. наук, 1955, т. 10, вып. 3 (65).
4. *Йон Ф.* Плоские волны и сферические средние в приложении к дифференциальным уравнениям с частными производными. М., ИЛ, 1958.
5. *Багдоев А. Г.* Определение фундаментальных решений для уравнений магнитоупругости. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1974, т. 27, № 2.
6. *Григорян Э. Х.* О колебании магнитоупругой среды, возбуждаемой сосредоточенной гармонической силой. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1978, т. 31, № 5.
7. *Филипов И. Г., Егорьев О. А.* Нестационарные колебания и дифракция волн в акустических и упругих средах. М., «Машиностроение», 1977.
8. *Франк Ф., Мизес Р.* Интегральные и дифференциальные уравнения математической физики. М., ОГИЗ, 1936.