ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIV, № 5, 1981 Механика

М. И. ТЕПЛЫЙ

КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ, ИМЕЮЩЕЙ КРУГЛОЕ ОТВЕРСТИЕ, СО ВСТАВЛЕННЫМ В НЕГО УПРУГИМ ДИСКОМ

Рассмотрение задач о внутреннем сжатии круговых цилиндров близких радиусов впервые было начато в работах И. Я. Штаермана. При решении поставленной им задачи [1] принято, что внешняя нагрузка, действующая на внутренний и внешний цилиндры по их поверхностям, осуществляется в виде нормального давления, диаметрально противоположного давлению на поверхности контакта. Заметим, что согласно принятой терминологии под внешним цилиндром следует подразумевать неограниченное тело с круговой цилиндрической полостью.

При выводе уравнения задачи использовано известное решение о сжатии цилиндра двумя диаметрально противоположными силами [2] и решение аналогичной задачи для внешности кругового отверстия в упругой среде. Воспользовавшись принципом суперпозиции, И. Я. Штаерман нашел формулы для радиальных перемещений контурных точек цилиндров S_1 и S_2, создаваемых распределенной нагрузкой (фиг. 1), а затем получил интегральное уравнение для определения контактного давления. Это уравнение имеет вид

$$\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} p(\vartheta)\left[A\cos(\alpha-\vartheta)\ln\operatorname{tg}\frac{|\alpha-\vartheta|}{2}-B\sin|\alpha-\vartheta|+C\right]d\vartheta=$$

$$=\varepsilon(1-\cos\alpha)-\delta\cos\alpha,\quad -\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_0 \tag{1.1}$$

где α_0 — угол контакта; $\varepsilon=R_1-R_2$ — радиальный зазор;

$$A=2(\gamma_1^{*}R_1+\gamma_2^{*}R_2),\quad B=\varkappa_2^{*}R_2+\varkappa_1^{*}R_1,\quad C=2\gamma_2^{*}R_2$$

$$\gamma_1^{*}=\frac{\lambda_1+2G_1}{4\pi G_1(\lambda_1+G_1)},\quad \gamma_2^{*}=\frac{\lambda_2+2G_2}{4\pi G_2(\lambda_2+G_2)},\quad \varkappa_1^{*}=\frac{1}{4(\lambda_1+G_1)},\quad \varkappa_2^{*}=\frac{1}{4(\lambda_2+G_2)}$$

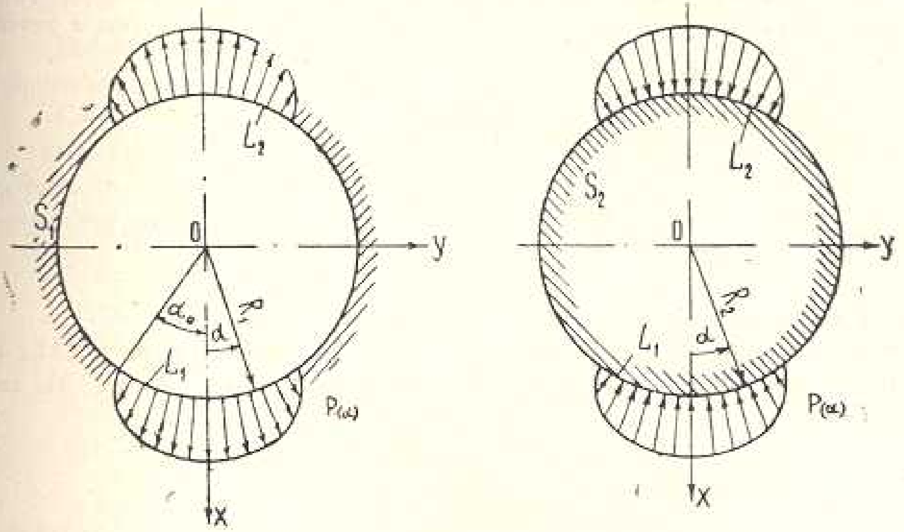
λ_1, λ_2, G_1, G_2 — упругие постоянные сжимаемых тел; δ — сближение тел S_1 и S_2 при сжатии; $p(\alpha)$ — контактное давление. Здесь индекс 1 относится к упругой среде с круговым отверстием радиуса R_1, а индекс 2—к цилиндру S_2 радиуса R_2.

Применив метод конечных разностей, И. Я. Штаерман получил численное решение задачи для случая, когда упругие свойства контактирующих цилиндров одинаковы.

Построим решение контактной задачи, поставленной И. Я. Штаерманом, воспользовавшись комплексным представлением плоской задачи теории упругости [3]. Для вывода уравнения рассматриваемой задачи запишем условие контакта

$$k_1(\alpha) = k_2(\alpha) \quad (|\alpha| \leqslant \alpha_0) \tag{1.2}$$

где $k_1(\alpha)$ и $k_2(\alpha)$ — кривизны деформированных границ в области контакта соответственно кругового отверстия в упругой среде S_1 и цилиндра S_2.



Фиг. 1.

Кривизна деформированного контура круговой области радиуса R может быть определена по известной формуле

$$k(\alpha) = \frac{1}{R} - \frac{v_r + v_r''}{R^2} \tag{1.3}$$

где $v_r(\alpha)$ — радиальное смещение точек рассматриваемого контура; $v_r'' = \dfrac{d^2 v_r}{d\alpha^2}$.

Сумму радиального смещения v_r и его второй производной v_r'' можно выразить на основании [3] следующим образом:

для точек контура кругового отверстия в упругой среде S_1

$$v_{r1} + v_{r1}'' = \operatorname{Re} \frac{R_1}{2G_1} \{\varkappa_1 [\Phi_1^-(t_0) - t_0 \Phi_1'^-(t_0)] + \Phi_1^+(t_0) - t_0 \Phi_1'^+(t_0)\} \tag{1.4}$$

для точек контура упругого цилиндра S_2

$$v_{r2} + v_{r2}'' = \operatorname{Re} \frac{R_2}{2G_2} \{\varkappa_2 [\Phi_2^+(t_0) - t_0 \Phi_2'^+(t_0)] + \Phi_2^-(t_0) - t_0 \Phi_2'^-(t_0)\} \tag{1.5}$$

Здесь $\Phi_j^+(t_0)$ и $\Phi_j^-(t_0)$ — граничные значения функций Колосова-Мусхелишвили $\Phi_j(z)$ при $z \to t_0$, причем $z = re^{i\alpha}$ $(i = \sqrt{-1})$, $t_0 = R_j e^{i\alpha}$ — точка на контуре радиуса R_j, $j = 1, 2$ соответственно для контактирующих тел S_1 и S_2; $\Phi_j^{'+}(t_0) = \frac{d\Phi^+(t_0)}{dt_0}$; $\varkappa_j = 3 - 4\nu_j$ для плоской деформации и $\varkappa_j = 3 - \nu_j/1 + \nu_j$ для обобщенного плоского напряженного состояния; $G_j = E_j/2(1 + \nu_j)$, а E_j и ν_j — соответственно модули Юнга и коэффициенты Пуассона для материалов контактирующих цилиндров.

Для областей S_1 и S_2, когда на дугах контакта L_1 и L_2 действует неизвестное контактное давление (фиг. 1), функции $\Phi_j(z)$ получены в таком виде:

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1+L_2}\frac{p(t)\,dt}{t - z}, \qquad t = R_1 e^{i\vartheta}$$

$$\Phi_2(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1+L_2}\frac{p(t)\,dt}{t - z} + \frac{1}{4\pi i}\int\limits_{L_1+L_2}\frac{p(t)\,dt}{t}, \qquad t = R_2 e^{i\vartheta} \tag{1.6}$$

где $p(t)$—контактное давление; ϑ—полярный угол.

На основании формул Сохоцкого—Племеля [3] перейдем в (1.6) к граничным значениям, подставив которые в выражения (1.4) и (1.5), получим

$$v_{r1} + v_{r1}^{''} = \frac{1-\varkappa_1}{4G_1}R_1 p(\alpha) - \frac{1+\varkappa_1}{4\pi G_1}R_1\int\limits_{-\alpha_0}^{\alpha_0}\operatorname{ctg}(\alpha - \vartheta)\,p'(\vartheta)\,d\vartheta +$$

$$+ \frac{1+\varkappa_1}{4\pi G_1}R_1\int\limits_{-\alpha_0}^{\alpha_0}p(\alpha)\,d\alpha \tag{1.7}$$

$$v_{r2} + v_{r2}^{''} = \frac{1-\varkappa_2}{4G_2}R_2 p(\alpha) + \frac{1+\varkappa_2}{4\pi G_2}R_2\int\limits_{-\alpha_0}^{\alpha_0}\operatorname{ctg}(\alpha - \vartheta)\,p'(\vartheta)\,d\vartheta \tag{1.8}$$

Подставим формулы (1.7) и (1.8) в равенство (1.3) и потребуем тождественного совпадения кривизн деформированных контуров цилиндров S_1 и S_2 в области контакта. В результате получим следующее уравнение для определения контактного давления:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\alpha_0}^{\alpha_0}\operatorname{ctg}(\alpha - \vartheta)\,p'(\vartheta)\,d\vartheta = \frac{(1-\varkappa_1)G_2 - (1-\varkappa_2)G_1}{(1+\varkappa_1)G_2 + (1+\varkappa_2)G_1}p(\alpha) +$$

$$+ \frac{(1+\varkappa_1)G_2 P_1}{\pi[(1+\varkappa_1)G_2 + (1+\varkappa_2)G_1]} + \frac{4\varepsilon G_1 G_2}{[(1+\varkappa_1)G_2 + (1+\varkappa_2)G_1]R} \tag{1.9}$$

где

$$P_1 = \int\limits_{-\alpha_0}^{\alpha_0}p(\alpha)\,d\alpha \tag{1.10}$$

При выводе уравнения (1.9) принято $R_1 \approx R_2 = R$, однако $R_1 - R_2 = \varepsilon \neq 0$. Такое допущение возможно, когда радиусы поверхностей контактирующих цилиндров близки.

Если известно распределение контактного давления $p(\alpha)$ по поверхности контакта, то можно найти равнодействующую P этого давления по формуле

$$P = R\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} p(\alpha)\cos\alpha\, d\alpha \tag{1.11}$$

Интегро-дифференциальное уравнение (1.9) совместно с (1.11) дают полное решение поставленной задачи.

Сведем уравнение (1.1), полученное для случая плоской деформации, к уравнению (1.9). С этой целью продифференцируем (1.1) дважды по α. Затем, складывая полученный результат с исходным уравнением (1.1) и учитывая тождества

$$\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \frac{p(\vartheta)\, d\vartheta}{\sin^2(\alpha - \vartheta)} = -\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \operatorname{ctg}(\alpha - \vartheta)\, p'(\vartheta)\, d\vartheta$$

$$\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} p(\vartheta)\sin|\alpha - \vartheta|\, d\vartheta + \frac{d^2}{d\alpha^2}\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} p(\vartheta)\sin|\alpha - \vartheta|\, d\vartheta = 2p(\alpha)$$

приходим к уравнению, имеющему такую же структуру, как и уравнение (1.9) и совпадающему с ним, если в уравнении (1.1) положить $B = \varkappa_2^* R_2 - \varkappa_1^* R_1$.

Имеющееся несоответствие между уравнениями (1.1) и (1.9) вызвано ошибкой, допущенной в формуле /227/ на стр. 144 книги И. Я. Штаермана [1]. Эта формула должна быть записана (в обозначениях И. Я. Штаермана) так:

$$v_r = P\left(-2\nu\cos\varphi\ln\operatorname{tg}\frac{|\varphi|}{2} - \varkappa\sin|\varphi|\right)$$

Решение интегро-дифференциального уравнения (1.9) наталкивается на значительные математические трудности. Однако, когда упругие свойства контактирующих цилиндров одинаковы ($G_1 = G_2 = G$, $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa$), уравнение (1.9) упрощается, принимая вид

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \operatorname{ctg}(\alpha - \vartheta)\, p'(\vartheta)\, d\vartheta = \frac{P_1}{2\pi} + \frac{2\varepsilon G}{(1+\varkappa)R}, \qquad -\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0 \tag{1.12}$$

Найдем решение уравнения (1.12). С этой целью в (1.12) произведем замену переменных, полагая $\operatorname{tg}\alpha = \xi$ и $\operatorname{tg}\vartheta = x$. В результате имеем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a_0}^{a_0}\frac{p'(\operatorname{arc\,tg} x)}{x-\xi}dx=f, \qquad -a_0\leqslant\xi\leqslant a_0 \tag{1.13}$$

где

$$f=\frac{P_2}{\pi}-\frac{P_1}{2\pi}-\frac{\varepsilon E}{(1+\varkappa)(1+\nu)R}, \quad a_0=\operatorname{tg}\alpha_0$$

$$P_1=\int_{-a_0}^{a_0}\frac{p(\operatorname{arc\,tg}\xi)}{1+\xi^2}d\xi, \qquad P_2=\int_{-a_0}^{a_0}\frac{\xi p'(\operatorname{arc\,tg}\xi)}{1+\xi^2}d\xi$$

Общее решение уравнения (1.13) дается формулой [5]

$$p'(\operatorname{arc\,tg}\xi)=\frac{-1}{\pi\sqrt{a_0^2-\xi^2}}\int_{-a_0}^{a_0}\frac{f(x)\sqrt{a_0^2-x^2}}{x-\xi}dx+\frac{D}{\sqrt{a_0^2-\xi^2}} \tag{1.14}$$

Подставляя в (1.14) значение функции $f(\xi)=f$ и вычисляя при этом необходимые интегралы, получим

$$p'(\operatorname{arc\,tg}\xi)=\frac{f\cdot\xi}{\sqrt{a_0^2-\xi^2}}+\frac{D}{\sqrt{a_0^2-\xi^2}} \tag{1.15}$$

Искомая функция $p(\alpha)$ определяется так:

$$p(\alpha)=\int\frac{p'(\operatorname{arc\,tg}\xi)}{1+\xi^2}d\xi+C_1 \tag{1.16}$$

Постоянные C_1 и D найдем из условия равенства нулю контактного давления в конечных точках области контакта, то есть из условия $p(\pm\alpha_0)=0$.

Исходя из формул (1.15), (1.16) и указанного выше условия, получаем

$$p(\alpha)=\frac{2\varepsilon E}{(1+\nu)(1+\varkappa)[4-\ln(a_0^2+1)]R}\ln\frac{\sqrt{a_0^2+1}+\sqrt{a_0^2-\xi^2}}{\sqrt{a_0^2+1}-\sqrt{a_0^2-\xi^2}} \tag{1.17}$$

$$|\alpha|\leqslant\alpha_0$$

$$P_1-2P_2=\frac{2\pi\varepsilon E}{(1+\varkappa)(1+\nu)R}\left(\frac{4\sqrt{a_0^2+1}}{4-\ln(a_0^2+1)}-1\right) \tag{1.18}$$

Подставляя формулу (1.17) в равенство (1.11) и вычисляя при этом необходимые интегралы, приходим (с учетом (1.18)) к следующему уравнению:

$$\frac{P}{\varepsilon E}=\frac{8[K(k)-E(k)]}{(1+\nu)(1+\varkappa)[4-\ln(a_0^2+1)]} \tag{1.19}$$

где $E(k)$ и $K(k)$ — полные эллиптические интегралы; $k=\sin\alpha_0$.

Формула (1.19) устанавливает зависимость между углом контакта α_0, равнодействующей P внешней нагрузки, радиальным зазором ε и упругими постоянными E и ν.

В таблице приведены результаты вычислений контактного давления и величины $P/\varepsilon E$ для случая, когда контактирующие цилиндры находятся в условиях плоской деформации ($\varkappa = 3-4\nu$) и $\nu = 0.3$. В числителе приведены значения $p(\alpha)$ и $P/\varepsilon E$, подсчитанные по формулам (1.17) и (1.19), а в знаменателе—по формулам, установленным в работе [4] для случая, когда внешняя нагрузка приложена в центре внутреннего цилиндра.

На фиг. 2 построены кривые, выражающие изменение угла контакта α_0 в зависимости от величины $P/\varepsilon E$, причем кривая 1 построена по формуле (1.19), кривая 2 — по формуле, полученной в работе [4], а кривая 3 — по данным работы [1]. Из таблицы и фиг. 2 видно, что в рассматриваемых случаях нагружения цилиндров отклонение в результатах по $P/\varepsilon E$ и $p(\alpha)$ незначительное при $\alpha < 5/18\,\pi$.

Таблица

α_0	Значение контактного давления $p(\alpha)$, доли $\varepsilon E/R$, при α					$\dfrac{P}{\varepsilon E}$
	0	$\dfrac{\pi}{9}$	$\dfrac{2}{9}\pi$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{4}{9}\pi$	
$\dfrac{\pi}{9}$	$\dfrac{0.1010}{0.1042}$	$\dfrac{0}{0}$				$\dfrac{0.0546}{0.0563}$
$\dfrac{2}{9}\pi$	$\dfrac{0.2418}{0.2740}$	$\dfrac{0.2096}{0.2363}$	$\dfrac{0}{0}$			$\dfrac{0.2495}{0.2814}$
$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{0.5537}{0.7329}$	$\dfrac{0.5232}{0.6847}$	$\dfrac{0.4165}{0.5267}$	$\dfrac{0}{0}$		$\dfrac{0.7950}{1.0297}$
$\dfrac{4}{9}\pi$	$\dfrac{5.3699}{5.3279}$	$\dfrac{5.2305}{5.0876}$	$\dfrac{4.7704}{4.3643}$	$\dfrac{3.7892}{3.1084}$	$\dfrac{0}{0}$	$\dfrac{9.3160}{8.7113}$

Фиг. 2.

Сравнение кривых 1 и 3 на фиг. 2 показывает, что имеет место значительное отклонение результатов приближенного решения уравнения, установленного в работе [1], с результатами точного решения задачи, выражаемого формулами (1.17)—(1.19). Существенная погрешность приближенного решения объясняется, как было показано выше, ошибкой, допущенной в уравнении И. Я. Штаермана.

Дрогобычский педагогический
институт им. Ив. Франко

Поступила 17 XII 1979

Մ. Ի. ՏԵՊԼԻ

ԿԼՈՐ ԱՆՑՔ ՈՒՆԵՑՈՂ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԱՆՑՔԻ ՄԵՋ ԴՐՎԱԾ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՍԿԱՎԱՌԱԿԻ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ՓՈԽԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ամփոփում

Ճշտվել է իրար մոտիկ շառավիղներ ունեցող երկու կլոր գլանների Ի. Յա. Շտաերմանի դրվածքով կոնտակտային խնդրի հավասարումը: Տրվում է այդ հավասարման ճշգրիտ լուծումը, երբ կոնտակտի մեջ գտնվող գլանների առաձգական հատկությունները միևնույնն են: Կատարվել է տարբեր դրվածքներով ստացված այդ խնդրի լուծման արդյունքների համեմատությունը: Ցույց է տրվում, որ Ի. Յա. Շտաերմանի հավասարման մեջ թույլ է տրվել սխալ, որն առաջացել է գլանների կոնտուրային կետերի շառավիղային տեղափոխությունների համար սկզբնական բանաձևերի անճշտությամբ:

CONTACT INTERACTION OF ELASTIC PLANE HAVING CIRCULAR HOLE WITH INSERTED IN IT ELASTIC DISC

M. I. TEPLY

Summary

The equation of the contact problem for round cylinders of almost equal radii in I. J. Shtayerman's stating is derived. An exact solution for this equation in the case of equal elastic characteristics of contract cylinders is given. The comparison of the solutions for the above problem in different statings is carried out. It is shown that an error is present in Shtayerman's equation. The error was caused by inaccuracy in the initial formulae for radial shifts of contour points of the cylinders.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
2. *Тимошенко С. П.* Теория упругости. Л.—М., ОНТИ, 1937.
3. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
4. *Панасюк В. В., Теплый М. И.* Определение контактных напряжений при внутреннем соприкосновении цилиндрических тел. Прикл. механика, 1971, т. 7, вып. 4.
5. *Михлин С. Г.* Интегральные уравнения. М., Гостехиздат, 1949.