

Б. Е. ПОБЕДРЯ, С. В. ШЕШЕНИН

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛАМЕ
 ОБ УПРУГОМ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЕ

Задаче о равновесии параллелепипеда посвящена обширная литература [1]. В настоящее время получил широкое распространение вариационно-разностный метод получения априори устойчивых разностных схем. Его применение для построения разностных аналогов уравнений теории упругости в перемещениях для параллелепипеда приводит к необходимости программирования большого числа различных разностных уравнений. Дело в том, что разностные уравнения, к которым приводит вариационно-разностный метод, имеют различный вид в разных точках параллелепипеда (во внутренних точках уравнения будут одного типа, на каждой грани—другого и т. д.). Всего получается 27 типов различных уравнений. Ниже дается метод получения разностных уравнений для любой точки параллелепипеда по уравнениям, записанным в одной из его вершин. Получена разностная схема для ортотропного неоднородного упругого и упруго-пластического параллелепипеда. Предложен метод решения полученных разностных уравнений и приведено численное решение двух краевых задач.

1. Вторая краевая задача теории упругости заключается в решении уравнений равновесия

$$\vec{L}u = \text{div}(\vec{C}\varepsilon(\vec{u})) + \vec{X} = 0, \quad \vec{x} \in V \quad (1)$$

при заданном на границе Σ векторе поверхностной нагрузки \vec{s}^0

$$\vec{l}u = (\vec{C}\varepsilon(\vec{u}))\vec{n}|_{\Sigma} = \vec{s}^0 \quad (2)$$

где $\vec{C}(\vec{x})$ — тензор модулей упругости, $\varepsilon(\vec{u})$ — тензор деформаций, компоненты которого выражены по формулам Коши через вектор перемещений \vec{u} [2], \vec{X} — вектор объемных сил, \vec{n} — единичный вектор внешней нормали к границе. Все величины будем считать безразмерными. Задача (1), (2) имеет решение, определяемое с точностью до смещения тела как жесткого целого, при известных условиях самоуравновешенности нагрузки [3]. Задача (1), (2) эквивалентна задаче минимизации лагранжиана [4]

$$\vec{W} = 1/2 \int_V \vec{\sigma}(\vec{u})\varepsilon(\vec{u}) dV - \int_V \vec{X}u dV - \int_{\Sigma} \vec{s}^0 u d\Sigma \quad (3)$$

где $\vec{\sigma}(\vec{u})$ — тензор напряжений, выраженный через вектор перемещений посредством закона Гука и формул Коши, V — область внутри параллелепипеда.

Начало декартовой системы координат поместим в одной из вершин параллелепипеда, а оси x_1, x_2, x_3 направим вдоль его сторон. В области V введем равномерную сетку с шагом h_α по направлению $x_\alpha: h_\alpha = l_\alpha / (N_\alpha - 1)$, где N_α — число узлов сетки на ребре длиной l_α , параллельном оси $x_\alpha, \alpha = 1, 2, 3$. Введем обозначения: \vec{E} — тождественный оператор, \vec{T}_α^n — оператор сдвига, ∂_α — правая, а ∂_α^- — левая разностные производные, Λ_α — вторая разностная производная

$$\vec{E}\vec{u} = \vec{u}, \quad \vec{T}_\alpha^n \vec{u}(i_1, i_2, i_3) = \vec{u}(i_1 + n\delta_{1\alpha}, i_2 + n\delta_{2\alpha}, i_3 + n\delta_{3\alpha})$$

$$\partial_\alpha = (\vec{T}_\alpha^{-1} - \vec{E})/h_\alpha, \quad \partial_\alpha^- = (\vec{E} - \vec{T}_\alpha^{-1})/h_\alpha, \quad \Lambda_\alpha = \partial_\alpha^- \partial_\alpha$$

Далее обозначим

$$[\vec{u}, \vec{\varphi}]_\alpha = 1/2 \left\{ \sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha-1} \vec{u} \vec{\varphi} h_\alpha + \sum_{i_\alpha=2}^{N_\alpha} \vec{u} \vec{\varphi} h_\alpha \right\}, \quad i_\beta, i_\gamma = \text{const}$$

$$[\vec{u}, \vec{\varphi}]_{\alpha\beta} = [[\vec{u}, \vec{\varphi}]_\alpha]_\beta, \quad i_\gamma = \text{const}, \quad \alpha \neq \beta \neq \gamma$$

Тогда разностными аналогами интегралов $\int_V \vec{u} \vec{\varphi} dV$ и $\int_\Sigma \vec{u} \vec{\varphi} d\Sigma$ будут со-

ответственно

$$[\vec{u}, \vec{\varphi}] = [[[\vec{u}, \vec{\varphi}]_{12}]_3]$$

$$[\vec{u}, \vec{\varphi}]_\Sigma = \sum_{\alpha=1}^3 \left\{ [\vec{u}, \vec{\varphi}]_{\beta\gamma} |_{i_\alpha=1} + [\vec{u}, \vec{\varphi}]_{\beta\gamma} |_{i_\alpha=N_\alpha} \right\}$$

Норму определим выражением $\|\vec{u}\| = [\vec{u}, \vec{u}]^{1/2}$. Введем обозначение

$$\begin{aligned} f(k_1, k_2, k_3) = & C_{1111} (\partial_{k_1} u_1)^2 + C_{2222} (\partial_{k_2} u_2)^2 + C_{3333} (\partial_{k_3} u_3)^2 + \\ & + C_{1212} (\partial_{k_1} u_2 + \partial_{k_2} u_1)^2 + C_{1133} (\partial_{k_1} u_3 + \partial_{k_3} u_1)^2 + C_{2323} (\partial_{k_2} u_3 + \partial_{k_3} u_2)^2 + \\ & + 2(C_{1122} \partial_{k_1} u_1 \partial_{k_2} u_2 + C_{1133} \partial_{k_1} u_1 \partial_{k_3} u_3 + C_{2333} \partial_{k_2} u_2 \partial_{k_3} u_3) \end{aligned}$$

где $k_1 = 1, \bar{1}, k_2 = 2, \bar{2}, k_3 = 3, \bar{3}$. Поскольку $\partial_\alpha^- = \vec{T}_\alpha^{-1} \partial_\alpha$, то разностный аналог лагранжиана \vec{W} для ортотропной среды будет иметь вид

$$\vec{W}^h = 1/2 w^h = [\vec{X}, \vec{u}] - [s^2, \vec{u}]_\Sigma \quad (4)$$

$$\text{где } \bar{w}^h = \sum_{j_1=0}^1 \sum_{j_2=0}^1 \sum_{j_3=0}^1 \sum_{i_1=j_1+1}^{N_1+i_1-1} \sum_{i_2=j_2+1}^{N_2+i_2-1} \sum_{i_3=j_3+1}^{N_3+i_3-1} f_1(j_1, j_2, j_3) h_1 h_2 h_3 / 8 \quad (5)$$

$$f_1(j_1, j_2, j_3) = f(\bar{T}_1^{-j_1} \partial_1, \bar{T}_2^{-j_2} \partial_2, \bar{T}_3^{-j_3} \partial_3)$$

Если компоненты тензора \bar{C} разрывны на плоскостях, параллельных координатным плоскостям, то область V представим в виде объединения параллелепипедов Π_k , в которых тензор \bar{C} непрерывен.

Тогда $\bar{W}(V) = \sum_k \bar{W}(\Pi_k)$ и $\bar{W}^h = \sum_k \bar{W}^h(\Pi_k)$. Аналогично можно построить лагранжиан для тела, являющегося объединением конечного числа параллелепипедов. Однако ввести во всей области V единую равномерную сетку можно не всегда.

2. Лагранжиан \bar{W}^h есть функция конечного числа переменных $\bar{u}(i_1, i_2, i_3)$, поэтому для нахождения его минимума нужно решить уравнения

$$\frac{\partial \bar{W}(\bar{u})}{\partial u_\beta(i_1, i_2, i_3)} = 0, \quad i_\alpha = 1, \dots, N_\alpha, \alpha, \beta = 1, 2, 3 \quad (6)$$

которые запишем в виде

$$\bar{L}^h \bar{u} + \bar{\Phi} = 0 \quad (7)$$

где

$$(\bar{L}^h \bar{u})_\beta = -\frac{1}{2} \frac{\partial \bar{w}^h(\bar{u})}{\partial u_\beta(i_1, i_2, i_3)} \quad (8)$$

Сеточная функция $\bar{\Phi}$ определяется следующим образом:

$$\bar{\Phi} = \bar{X} \text{ — во внутренних точках,}$$

$$\bar{\Phi} = \bar{X} + 2 \frac{\bar{s}_\alpha^0}{h_\alpha} \text{ — на гранях, перпендикулярных оси } x_\alpha,$$

$$\bar{\Phi} = \bar{X} + 2 \left(\frac{\bar{s}_\beta^0}{h_\beta} + \frac{\bar{s}_\gamma^0}{h_\gamma} \right) \text{ — на ребрах, параллельных оси } x_\alpha,$$

$\bar{\Phi} = \bar{X} + 2 \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\bar{s}_\alpha^0}{h_\alpha}$ — в вершинах. Здесь \bar{s}_α^0 — поверхностная нагрузка, действующая на грань, перпендикулярную оси x_α .

Введем обозначение

$$g_\alpha(\bar{u}, i_1, i_2, i_3, j_1, j_2, j_3) = \frac{C_{\alpha\alpha}}{4h_\alpha^2} \bar{T}_\alpha^{j_\alpha} u_\alpha - \left(\frac{C_{2\alpha}}{4h_\alpha^2} + \frac{C_{3\alpha}}{4h_\beta^2} + \frac{C_{\alpha 1}}{4h_\gamma^2} \right) u_\alpha +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{C_{\alpha\bar{\gamma}}}{4h_{\beta}^2} \bar{T}_{\beta}^{j\beta} u_{\alpha} + \frac{C_{\alpha\bar{\gamma}}}{4h_{\gamma}^2} \bar{T}_{\gamma}^{j\gamma} u_{\alpha} + \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^3 \left\{ \frac{z_{\alpha\beta}}{8h_{\alpha}h_{\beta}} \left\{ (C_{\alpha\beta\beta} - \bar{T}_{\beta}^{j\beta} C_{\alpha\beta\beta}) \bar{T}_{\beta}^{j\beta} u_{\beta} - \right. \right. \\
& - (\bar{T}_{\alpha}^{j\alpha} C_{\alpha\beta\beta} - C_{\alpha\beta\beta}) \bar{T}_{\alpha}^{j\alpha} u_{\beta} + (\bar{T}_{\alpha}^{j\alpha} C_{\alpha\beta\beta} + \bar{T}_{\beta}^{j\beta} C_{\alpha\beta\beta}) \bar{T}_{\alpha}^{j\alpha} \bar{T}_{\beta}^{j\beta} u_{\beta} - \\
& \left. \left. - (C_{\alpha\beta\beta} + C_{\alpha\beta\beta}) u_{\beta} \right\} \right\}, \quad z_{\alpha\beta} = z_{\beta\alpha}, \quad \alpha \neq \beta \neq \gamma \\
& C_{\alpha\beta} = (\bar{T}_{\alpha}^{j\alpha} C_{\alpha\beta\beta} + C_{\alpha\beta\beta})/2, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3
\end{aligned}$$

Тогда в вершинах оператор L^h можно записать в виде:
вершина $(0, 0, 0)$

$$\bar{L}_{(1)}^h \vec{u} = \vec{g}(\vec{u}, 1, 1, 1, 1, 1, 1), \quad z_{12} = z_{23} = z_{13} = 1$$

вершина $(l_1, 0, 0)$

$$\bar{L}_{(2)}^h \vec{u} = \vec{g}(\vec{u}, N_1, 1, 1, -1, 1, 1), \quad z_{12} = -1, \quad z_{23} = 1, \quad z_{13} = -1$$

вершина $(0, l_2, 0)$

$$\bar{L}_{(3)}^h \vec{u} = \vec{g}(\vec{u}, 1, N_2, 1, 1, -1, 1), \quad z_{12} = -1, \quad z_{23} = -1, \quad z_{13} = 1$$

вершина $(l_1, l_2, 0)$

$$\bar{L}_{(4)}^h \vec{u} = \vec{g}(\vec{u}, N_1, N_2, 1, -1, -1, 1), \quad z_{12} = 1, \quad z_{23} = z_{13} = -1$$

вершина $(0, 0, l_3)$

$$\bar{L}_{(5)}^h \vec{u} = \vec{g}(\vec{u}, 1, 1, N_3, 1, 1, -1), \quad z_{12} = 1, \quad z_{23} = z_{13} = -1$$

вершина $(l_1, 0, l_3)$

$$\bar{L}_{(6)}^h \vec{u} = \vec{g}(\vec{u}, N_1, 1, N_3, -1, 1, -1), \quad z_{12} = z_{23} = -1, \quad z_{13} = 1$$

вершина $(0, l_2, l_3)$

$$\bar{L}_{(7)}^h \vec{u} = \vec{g}(\vec{u}, 1, N_2, N_3, 1, -1, -1), \quad z_{12} = -1, \quad z_{23} = 1, \quad z_{13} = -1$$

вершина (l_1, l_2, l_3)

$$\bar{L}_{(8)}^h \vec{u} = \vec{g}(\vec{u}, N_1, N_2, N_3, -1, -1, -1), \quad z_{12} = z_{23} = z_{13} = 1$$

где \vec{g} — вектор с компонентами g_1, g_2, g_3 .

Для получения разностных уравнений в остальных узлах сетки используем аддитивность лагранжиана. Рассмотрим внутренний узел (l_1, l_2, l_3) и проведем через него три плоскости, соответственно параллельные координатным плоскостям. Область V разобьется на 8 параллелепипе-

дов $V = \sum_{k=1}^8 \Pi_k$, $\tilde{w}^h(V) = \sum_{k=1}^8 \tilde{w}^h(\Pi_k)$. Из (8) следует, что \tilde{L}^h представляется в виде

$$\tilde{L}^h = \sum_{k=1}^8 \tilde{L}_{(k)}^h, \quad \tilde{L}_{(k)}^h = \vec{g}(\vec{u}, i_1, i_2, i_3, j_1, j_2, j_3) \quad (9)$$

где числа $j_1, j_2, j_3, z_1, z_2, z_3$ зависят от k , как указано выше.

Аналогично, на гранях \tilde{L}^h равен сумме четырех, а на ребрах — сумме двух операторов $\tilde{L}_{(k)}^h$, соответствующих тем вершинам, которые принадлежат данной грани или данному ребру. Таким образом, \tilde{L}^h строится одинаково для точек непрерывности или точек разрыва компонент тензора C . Также в виде суммы соответствующего числа операторов $\tilde{L}_{(k)}^h$ получим \tilde{L}^h в любой точке тела, составленного из параллелепипедов. Во внутренних точках для случая непрерывных компонент тензора C оператор \tilde{L}^h имеет вид

$$\begin{aligned} (\tilde{L}^h \vec{u})_\alpha = & \sum_{\beta=1}^3 \partial_{\bar{\beta}} (C_{\alpha\beta\beta} \partial_{\bar{\beta}} u_\alpha) + \frac{1}{4} \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^3 (\partial_\alpha (C_{\alpha\beta\beta} \partial_{\bar{\beta}} u_\beta) + \\ & + \partial_{\bar{\beta}} (C_{\alpha\beta\beta} \partial_\alpha u_\beta) + \partial_{z_\beta} (C_{\alpha\beta\beta} \partial_{\bar{\beta}} u_\beta) + \partial_{\bar{\beta}} (C_{\alpha\beta\beta} \partial_{z_\beta} u_\beta) + \\ & + \partial_\alpha (C_{\alpha\beta\beta} \partial_{\bar{\beta}} u_\beta) + \partial_{\bar{\beta}} (C_{\alpha\beta\beta} \partial_\alpha u_\beta) + \partial_{z_\beta} (C_{\alpha\beta\beta} \partial_{\bar{\beta}} u_\beta) + \partial_{\bar{\beta}} (C_{\alpha\beta\beta} \partial_{z_\beta} u_\beta)) \quad (10) \end{aligned}$$

$\alpha, \beta = 1, 2, 3.$

В случае, когда компоненты C_{ijkl} постоянны, вычисление \tilde{L}^h во внутренних точках по формуле (10), а на границе Σ — в виде суммы соответствующего числа операторов $\tilde{L}_{(k)}^h$ приводит к небольшому удлинению программы, зато время счета сокращается более, чем вдвое.

3. Свойства разностной схемы (7) известны [5]. При условии

$$C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \geq \mu_0 \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}, \quad \mu_0 > 0, \quad ijkl = 1, 2, 3 \quad (11)$$

схема (7) устойчива. Для изотропного тела

$$C_{ijkl} = \lambda(\vec{x}) \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu(\vec{x}) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (12)$$

и $\mu_0 = 2 \min_V \mu(\vec{x})$, где λ, μ — постоянные Ламе. Из (8) при учете того, что \tilde{w}^h — квадратичная форма, следуют соотношения

$$\tilde{w}^h(\vec{u}) = [-\tilde{L}^h \vec{u}, \vec{u}], \quad \tilde{w}^h(\vec{u}, \vec{\varphi}) = [-\tilde{L}^h \vec{u}, \vec{\varphi}] \quad (13)$$

где $\tilde{w}^h(\vec{u}, \vec{\varphi})$ — симметричная билинейная форма, соответствующая квадратичной форме $\tilde{w}^h(\vec{u})$. Из (13) следуют самосопряженность оператора $\tilde{L}^h: [\tilde{L}^h \vec{u}, \vec{\varphi}] = [\vec{u}, \tilde{L}^h \vec{\varphi}]$ и положительная определенность оператора $-\tilde{L}^h: [-\tilde{L}^h \vec{u}, \vec{u}] \geq 0$.

4. Получим разностный аналог краевой задачи теории малых упруго-пластических деформаций при активном нагружении [6] или нелинейной теории упругости. Для этого в \tilde{L}^h достаточно положить

$$\begin{aligned} C_{ijkl} &= \lambda(\varepsilon_n) \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu(\varepsilon_n) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\ \mu(\varepsilon_n) &= \mu(1 - \omega(\varepsilon_n)), \quad \lambda(\varepsilon_n) = K - 2/3 \mu(\varepsilon_n) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\varepsilon_n = (e_{ij} e_{ij})^{1/2}, \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - 1/3 \varepsilon_{kk} \delta_{ij}$$

Здесь K — модуль объемного сжатия, ε_n — интенсивность деформаций, ω — функция пластичности Ильюшина [6]. Разностные уравнения теории малых упруго-пластических деформаций запишем в виде

$$\tilde{P}_h \vec{u} + \vec{\Phi} = 0 \quad (15)$$

На функцию ω наложим известные условия [6]

$$0 \leq \omega < \omega + \frac{d\omega}{d\varepsilon_n} \varepsilon_n \leq \omega_0 < 1, \quad \frac{d\omega}{d\varepsilon_n} > 0 \quad (16)$$

На части границы Σ могут быть заданы некоторые компоненты вектора перемещений \vec{u} . Тогда в таких узлах по соответствующим направлениям вместо уравнений (7) имеем заданные компоненты вектора перемещений.

5. Для решения задачи (7) используем итерационный метод [7]

$$\tilde{B} \frac{\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^n}{\tau_{n+1}} = \tilde{L}^h \vec{u}^n + \vec{\Phi}, \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (17)$$

где τ_n — чебышевский набор параметров (Ч. Н. П.) [7]

$$\tau_n = 2 \left\{ \gamma_2 + \gamma_1 - (\gamma_2 - \gamma_1) \cos \frac{\pi(2n-1)}{2N} \right\} \quad (18)$$

а оператор \tilde{B} имеет вид

$$\tilde{B} = \prod_{s=1}^3 (\tilde{E} + \tau_s \tilde{R}_s), \quad \tilde{R}_s = \begin{pmatrix} -\Lambda_{ss} & 0 & 0 \\ 0 & -\Lambda_{ss} & 0 \\ 0 & 0 & -\Lambda_{ss} \end{pmatrix}$$

Постоянные γ_1, γ_2 определяются из неравенств

$$\gamma_1 [\vec{B}u, \vec{u}] \leq [-\vec{L}^h \vec{u}, \vec{u}] \leq \gamma_2 [\vec{B}u, \vec{u}] \quad (19)$$

которые запишем сокращенно $\gamma_1 \vec{B} \leq -\vec{L}^h \leq \gamma_2 \vec{B}$. Выбор оптимального параметра κ и γ_1, γ_2 известны [5, 7].

Описанный метод был реализован в виде программ на ФОРТРАНе для ЭВМ БЭСМ-6. Рассмотрим решение задачи М. М. Филоненко-Бородича [8] о сжатии параллелепипеда $l_{1,2} = 1, l_3 = 2$,

$N_{1,2} = 9, N_3 = 17$ куполообразной нагрузкой

$$s_{1,2} = 0, s_3 = (1 - \cos(2\pi x_1))(1 - \cos(2\pi x_2)) \quad \text{при } x_3 = 0$$

$$s_{1,2} = 0, s_3 = -(1 - \cos(2\pi x_1))(1 - \cos(2\pi x_2)) \quad \text{при } x_3 = 2$$

(остальные грани свободны). Итерационный процесс (17) останавливался, как только удовлетворялось неравенство

$$\|\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^n\| / \|\vec{u}^1 - \vec{u}^0\| \leq 0.5 \cdot 10^{-4} \quad (20)$$

Для выполнения этого условия достаточно провести пять циклов из восьми итераций ($N = 8$). Это занимает около пяти минут. Порядок решаемой системы равен 4131. В таблице 1 приведено сравнение σ_{33} при $x_3 = 1$ с другими решениями этой задачи.

Цифрой 1 обозначено решение М. М. Филоненко-Бородича [8], цифрой 2 — решение В. П. Нетребко, Л. Е. Мальцева, Н. П. Матвеева [9], цифрой 3 — решение М. Мишинова [10], цифрой 4 — предлагаемое решение.

Приведем решение задачи о сжатии куба $l_1 = 1, N_2 = 11, E = 1, \nu = 1/3$ жесткими плитами без проскальзывания, то есть при $x_2 = 0, \vec{u} = 0$, при $x_3 = 1, u_{1,2} = 0, u_3 = -0.1$, боковая поверхность свободна. Для удовлетворения неравенства (20) достаточно в этой задаче двух циклов из восьми итераций. На фиг. 1, 2 приведено распределение интенсивности напряжений σ_u и максимального удлинения ε_{\max} в плоскости $x_2 = 0.5$. В кубе образуются две пирамидальные области (основаниями пирамид служат сжимающие плиты), в которых σ_u и ε_{\max} существенно меньше значений этих же величин в средней части куба, то есть при $x_3 = 0.5$. Такое распределение σ_u и ε_{\max} соответствует наблюдаемому в опытах распадение куба на куски пирамидальной формы [11, 12]. Известно [12], что разрушение в отсутствие смазки происходит при сжимающей силе в 2—4 раза большей, чем в случае наличия смазки. Полученное решение показывает, что классические критерии прочности, согласно которым разрушение происходит, когда, например, σ_u или ε_{\max} достигают заданных значений, не могут объяснить отмеченной разницы в сопротивлении сжатию, ибо в средней части куба напряженное состояние практически одинаково в случаях наличия или отсутствия смазки (разница составляет около 7%).

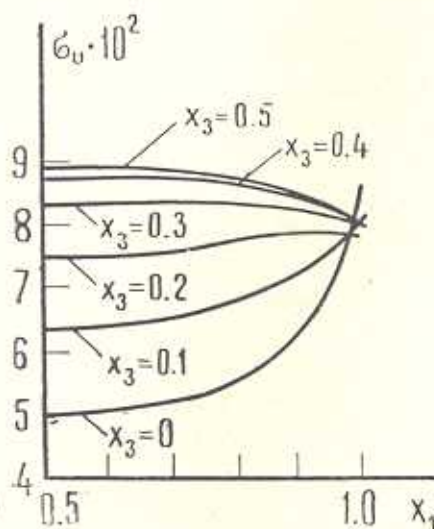
6. Для решения задачи теории малых упруго-пластических деформаций (15) применим итерационный метод

$$\bar{L}^h \frac{\vec{u}^{m+1} - \vec{u}^m}{\tau_{m+1}} + \bar{P}_h \vec{u}^m + \vec{\Phi} = 0 \quad (21)$$

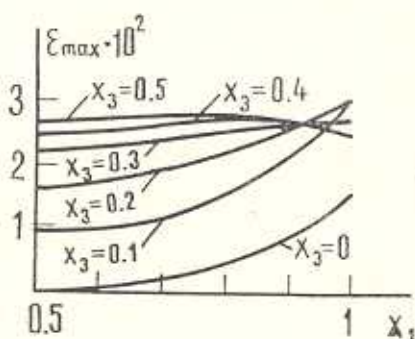
являющийся модификацией метода упругих решений Ильюшина [6]. На каждой итерации схемы (21) нужно решать задачу теории упругости

$$\bar{L}^h \vec{u}^{m+1} + \vec{\Phi}^m = 0 \quad (22)$$

$$\text{где } \vec{\Phi}^m = -\bar{L}^h \vec{u}^m + \tau_{m+1} (\bar{P}_h \vec{u}^m + \vec{\Phi})$$



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Параметры τ_m возьмем по формуле (18), а γ_1, γ_2 определяются теперь из неравенств

$$\gamma_1 (-\bar{L}^h) \leq -\bar{P}_h(\vec{v}) < \gamma_2 (-\bar{L}^h) \quad (23)$$

Из неравенства (23) и равенства [7]

$$[\bar{P}_h(\vec{u}_1) - \bar{P}_h(\vec{u}_2), \Delta \vec{u}] = [-\bar{P}_h(\vec{v}), \Delta \vec{u}], \quad \vec{v} = \vec{u}_1 + t \Delta \vec{u}$$

$$\Delta \vec{u} = \vec{u}_2 - \vec{u}_1, \quad t \in [0, 1]$$

получим

$$[\bar{P}_h(\vec{u}_1) - \bar{P}_h(\vec{u}_2), \Delta \vec{u}] \geq \gamma_1 [-\bar{L}^h \Delta \vec{u}, \Delta \vec{u}]$$

Отсюда, используя разностные аналоги неравенств Корна и Пуанкаре [5]

$$\int_V u_{i,j} u_{i,j} dV \leq M_1 \int_V \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} dV, \quad \int_V u_i u_i dV \leq M_2 \int_V u_{i,j} u_{i,j} dV$$

справедливые при условиях

$$\int_V \vec{u} dV = 0, \quad \int_V \text{rot } \vec{u} dV = 0$$

при учете (11) получим

$$[-(\tilde{P}_h(\vec{u}_2) - \tilde{P}_h(\vec{u}_1)), \vec{u}_2 - \vec{u}_1] \geq \gamma_1 \frac{2\mu}{M_1 M_2} \|\vec{u}_2 - \vec{u}_1\|^2$$

Это неравенство выражает сильную монотонность оператора $-\tilde{P}_h$ и обеспечивает [7] существование и единственность решения задачи (15), устойчивость разностной схемы (15).

Оператор \tilde{P}_h , определяемый в виде

$$\tilde{P}_h(\vec{v}) \vec{u} = \left. \frac{d\tilde{P}_h(\vec{v} + t\vec{u})}{dt} \right|_{t=0}$$

есть оператор \tilde{L}^h , если в последнем положить

$$C_{ijkl}(\vec{v}) = \lambda (v_a) \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (v_a) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) - 2\mu \frac{d\omega(v_a)}{dv_a} \frac{v_{ij} v_{kl}}{v_a} \\ v_{ij} = 1/2 (v_{i,j} + v_{j,i}) - 1/3 v_{k,k} \delta_{ij}, \quad v_a = (v_{ij} v_{ij})^{1/2} \quad (24)$$

Тензор C (24) определяет некоторую упругую анизотропную среду, для которой

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = 2\mu (1 - \omega(v_a)) e_{ij} e_{ij} - 2\mu \frac{d\omega}{dv_a} \frac{v_{ij} v_{kl}}{v_a} e_{ij} e_{kl} + K \varepsilon_{kk} \varepsilon_{ii}$$

Тогда будем иметь

$$2\mu \left(1 - \omega - \frac{d\omega}{dv_a} v_a \right) e_{ij} e_{ij} + K \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} \leq \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \leq 2\mu e_{ij} e_{ij} + K \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} \quad (25)$$

Из (13), (25) следуют неравенства (23) с $\gamma_1 = \inf \left(1 - \omega - \frac{d\omega}{dv_a} v_a \right)$, $\gamma_2 = 1$.

Точность, с которой нужно решать задачу (17), невелика [13]. При этом внешний итерационный процесс будет осуществляться по схеме (21),

но не с оператором \tilde{L}^h , а с „близким“ оператором $\tilde{L}^h (E - D_M)^{-1}$, где

D_M — разрешающий оператор внутреннего итерационного процесса (17)

[14]. В задаче о сжатии куба из упруго-пластического материала с линейным упрочнением ($l_a = 1$, $N_a = 5$, $\alpha = 1, 2, 3$) равномерно распределенной по граням $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$ нормальной нагрузкой оказалось оптимальным проводить один внутренний цикл из восьми итераций. Если же зада-

чу (22) решать «точно», то есть так, чтобы выполнялось условие (20), то скорость сходимости внешнего итерационного процесса возрастет всего на 2%. Для выяснения различия в скорости сходимости схемы (21) и метода упругих решений (схема (21) при $\tau_m \equiv 1$) был проведен ряд расчетов

Таблица 1

	$x_1=0$ $x_2=0$	$x_1=0.25$ $x_2=0$	$x_1=0.5$ $x_2=0$	$x_1=0.25$ $x_2=0.25$	$x_1=0.5$ $x_2=0.25$	$x_1=0.5$ $x_2=0.5$
1	0.00	1.12	0.97	1.07	1.10	1.47
2	0.90	0.94	0.89	1.03	1.036	1.10
3	0.95	—	1.00	0.97	1.03	1.06
4	0.92	0.96	1.01	1.00	1.047	1.10

Таблица 2

σ_{33}	метод упругих решений		Ч. Н. П.	
	δ_8	δ_{16}	δ_8	δ_{16}
$2.5 \cdot 10^{-3}$	0.20	0.09	0.06	0.01
$5 \cdot 10^{-3}$	0.30	0.13	0.04	0.008

описанной выше задачи. Результаты приведены в табл. 2. Отношение модуля упрочнения к модулю μ было взято равным 0.1, предел текучести $\sigma_s = 0.1 \sigma_0$

$$\delta_m = \| \tilde{B}^{-1} (\tilde{P}_k \tilde{u}^m + \tilde{\Phi}) \| / \| \tilde{B}^{-1} (\tilde{P}_k \tilde{u}^0 + \tilde{\Phi}) \|$$

Механико-математический факультет
МГУ им. М. В. Ломоносова

Поступила 22 VII 1980

В. Б. АНДРИАНОВ, В. А. ЗЕЗЕНКО

ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ԶՈՒԳԱՀԵՌԱՆՆԻՍՏԻ ՎԵՐԱՅԵՐՅԱԼ ԼԱՄԵՆ ԽՆԴՐԻ ԹՎԱՅԻՆ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Վարիացիոն-տարրերական եղանակով ստացվել է տարրերական սխեմա, որը մոտարկում է առաձգականության և փոքր առաձգապլաստիկ դեֆորմացիաների անստիբիլությունների անըզափոխություններով խնդիրը ծավալային և մակերևութային ուժերի ազդեցության տակ գտնվող զուգահեռանիստի հավասարակշռության մասին: Յույց է տրված զուգահեռանիստի դանդաղացած կետում տարրերական հավասարումների ստացման հնարավորությունը, որոնք գրվում են զագաթներից մեկի համար: Երկու եզրային խնդիրների համար բերվում են թվային լուծումներ:

A NUMERICAL SOLUTION FOR THE LAME PROBLEM OF AN ELASTIC PARALLELEPIPED

B. E. POBEDRYA, S. V. SHESHENIN

S u m m a r y

A variational-difference method is used to obtain a system of difference equations, approximating the boundary problem in the theory of elasticity and the deformational theory of plasticity on the equilibrium of parallelepiped under the action of wall and surface forces. The possibility to obtain the difference equations in any point of parallelepiped, using the equations obtained for the vertex, is studied. Numerical solutions for two boundary problems of elasticity are presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. Суслова Н. Н. Методы решения пространственной задачи теории упругости для тела в форме параллелепипеда. В сб.: Итоги науки и техники ВИНТИ АН СССР. Сер. механ. тверд. деф. тела. М., Наука, 1980, т. 13, с. 187—296.
2. Победря Б. Е. Лекции по тензорному анализу. М., изд-во Моск. ун-та, изд. 2-е, 1979.
3. Новацкий В. Теория упругости. М., Мир, 1975.
4. Победря Б. Е. Некоторые общие теоремы механики деформируемого твердого тела. ПММ, 1979, т. 43, № 3, с. 531—541.
5. Белухина И. Г. Разностные схемы для решения некоторых задач статической теории упругости в анизотропном случае. Вычисл. методы и программирование. М., изд-во Моск. ун-та, 1972, № 19, с. 123—145.
6. Ильюшин А. А. Пластичность, ч. 1. М.—Л., ГИТТЛ, 1948.
7. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М., Наука, 1978.
8. Филоненко-Бородич М. М. Задача о равновесии упругого параллелепипеда при заданных нагрузках на его гранях. ПММ, 1951, т. 15, вып. 2, с. 137—148.
9. Нетребко В. П., Мальцев А. Е., Мотвеев Н. П. Об одном видоизменении вариационного метода Папковича—Филоненко—Бородича решения пространственных задач теории упругости. Инж. ж. МТТ, 1973, № 6, с. 133—138.
10. Мишинов М. Общ. метод за решение на пространствената задача на еластичността за параллелепипеда. В сб. Изв. Техн. ин-т Бълг. АН. София, 1960, кн. 9—10.
11. Гончаров И. Г. Прочность каменных материалов в условиях различных напряженных состояний. М.—Л., Госстройиздат, 1960.
12. Фепплъ А. Техническа механика. Сопротивление материалов, т. 3. М.—Л., ОНТИ, 1937.
13. Дьяконов Е. Г., Николаев И. К. О решении некоторых задач теории сетчатых оболочек. Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1973, т. 13, № 4, с. 938—951.
14. Дьяконов Е. Г. О построении итерационных методов на основе использования операторов, эквивалентных по спектру. Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1966, т. 6, № 1, с. 12—34.