

Г. Г. ОГАНЯН

О ВЛИЯНИИ СРЕДНЕГО (АКУСТИЧЕСКОГО) ТЕЧЕНИЯ
НА ЭВОЛЮЦИЮ ВОЛНЫ В ДИСПЕРГИРУЮЩИХ СРЕДАХ

В работе рассматриваются нелинейные задачи распространения волн огибающих монохроматических волн малой амплитуды. На примере модельного уравнения, описывающего волновое движение в различных средах, показано влияние среднего течения на характер распространения модулированной волны (волны огибающей). Выведены и решены нелинейные уравнения модуляций как для одномерного нестационарного (задача самомодуляции волны), так и для стационарного двумерного (задача самофокусировки волны) случаев. Показано, что в первой задаче учет среднего течения оказывает демодулирующее влияние, если параметр, характеризующий дисперсию среды, положителен и обратно — самомодулирующий эффект, если параметр дисперсии отрицателен. Во второй задаче в рассматриваемом приближении средним (акустическим) течением можно пренебречь и характер эволюции модулированной волны зависит лишь от знака параметра дисперсии среды.

Стационарные уравнения модуляций в различных недиссипативных средах и их решения приведены в [1—5].

Рассмотрено влияние кривизны первоначально заданной волны и дифракционного эффекта на эволюцию волны. Показано, что в дефокусирующей среде выпуклая волна начинает сразу расплываться, в то время как вогнутая волна до некоторого момента времени сжимается (самофокусируется) и далее начинается процесс расплывания. В фокусирующей среде, независимо от знака кривизны, эволюция волны имеет волноводный характер. Аналогичная картина распространения модулированной волны имеет место и в задаче самофокусировки пучка. Учет дифракционного эффекта препятствует заострению профиля волны и образованию фокуса.

§ 1. Уравнения модуляций. Без учета диссипативных и релаксационных эффектов волновое движение можно описать уравнением

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u \frac{\partial u}{\partial x_1} + \gamma \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} \right) = - \frac{c_0}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1.1)$$

Здесь t — время, $x_1 = x - c_0 t$, x и y — пространственные координаты поперек и вдоль волны, c_0 — невозмущенная скорость звука, u — скорость, α и γ — коэффициенты нелинейности и дисперсии среды. Уравнение (1.1) в одномерном нестационарном случае описывает распространение волн на

поверхности неглубокой жидкости, акустических волн в плазме [2, 6], слабых ударных волн в газожидкостной смеси [5, 7].

Решение уравнения (1.1) будем искать в виде

$$u = U_0 + U_1 e^{i\theta} + U_1^* e^{-i\theta} + U_2 e^{2i\theta} + U_2^* e^{-2i\theta} \quad (1.2)$$

Здесь U_0 — действительная функция, описывающая среднее (акустическое) течение, U_1 и U_1^* — комплексные и комплексно-сопряженные функции, дифференцирование которых по независимым переменным уменьшает порядок их величин, $\theta = kx_1 - \omega t$ — фаза, k и ω — волновое число и частота невозмущенной волны. Подставляя (1.2) в (1.1), приравнявая коэффициенты при одинаковых по θ степеням экспоненты и удерживая главные члены, получим систему уравнений

$$U_1(\omega + \gamma k^3) + i \frac{\partial U_1}{\partial t} + i \left(-\frac{\omega}{k} - 4\gamma k^2 \right) \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial U_1}{\partial t} - 6\gamma k^2 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \right) + \frac{c_0}{2k} \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} - \alpha k U_0 U_1 - \alpha k U_1^* U_0 = 0 \quad (1.3)$$

$$2U_2(\omega + 4\gamma k^3) - \alpha k U_1^2 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial U_0}{\partial t} + \alpha \frac{\partial}{\partial x_1} |U_1|^2 \right) + \frac{c_0}{2} \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} = 0$$

В линейном приближении из (1.1) нетрудно получить дисперсионное соотношение $\omega = -\gamma k^3$. Подставляя значение ω в уравнение системы (1.3), в главном приближении получим соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t} \approx 3\gamma k^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \quad (1.4)$$

подстановка которого в члены более высокого порядка малости приводит систему (1.3) к виду

$$i \left(\frac{\partial U_1}{\partial t} - 3\gamma k^2 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \right) - 3\gamma k \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} - \frac{\alpha^2}{6\gamma k} |U_1|^2 U_1 - \alpha k U_0 U_1 + \frac{c_0}{2k} \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} = 0 \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial U_0}{\partial t} + \alpha \frac{\partial}{\partial x_1} |U_1|^2 \right) + \frac{c_0}{2} \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} = 0$$

Полученная система в рассматриваемом приближении полностью описывает эволюцию огибающей волн (модулированной волны).

§ 2. Самомодуляция волн. В одномерном нестационарном варианте уравнений (1.5) предположим [1], что среднее течение, характеризуемое функцией U_0 , обусловлено основным, то есть имеет место соотношение (1.4). Тогда система (1.5) сведется к одному уравнению

$$i \left(\frac{\partial U_1}{\partial t} - 3\gamma k^2 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \right) - 3\gamma k \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} + \beta |U_1|^2 U_1 = 0, \quad \beta = \frac{\alpha^2}{6\gamma k} \quad (2.1)$$

Эффект влияния среднего течения на вид уравнения (2.1) проявляется, согласно (1.5), через коэффициент β : $\beta > 0$ при $\gamma > 0$ и $\beta < 0$ при $\gamma < 0$. При отсутствии среднего течения $\beta < 0$ при $\gamma > 0$ и $\beta > 0$ при $\gamma < 0$.

1) Пусть $\gamma > 0$ (дефокусирующая среда). Если в уравнении (2.1) перейти к координате $\mu = (x_1 - 3\gamma k^2 t) (6\gamma k)^{-1/2}$ и решение искать в виде $U_1 = a(\mu, t) \exp [i\varphi(\mu, t)]$, где a и φ — амплитуда и фаза волны, то после отделения действительной и мнимой частей, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial t} - \frac{a}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2} - \frac{\partial a}{\partial \mu} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} &= 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2a} \frac{\partial^2 a}{\partial \mu^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right)^2 - \beta a^2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Рассмотрим задачу с начальными условиями

$$\text{при } t = 0 \quad a = a_0 \exp \left(-\frac{\mu^2}{2\nu_0^2} \right), \quad \varphi = \tau_0 - \frac{\mu^2}{2R_0} \quad (2.3)$$

где a_0 , σ_0 — начальная амплитуда и фаза при $\mu = 0$, ν_0 и $-1/R_0$ — начальная ширина профиля и «кривизна» волны в пространстве времени. Решение системы (2.2) будем искать в виде

$$a = \frac{a_0}{f^{1/2}} \exp \left(-\frac{\mu^2}{2\nu_0^2 f^2} \right), \quad \varphi = \tau(t) - \frac{\mu^2}{2R(t)} \quad (2.4)$$

Здесь функция $f(t)$ характеризует степень сжатия профиля волны, причем

$$\frac{1}{R(t)} = \frac{1}{f} \frac{df}{dt} \quad \text{при } t = 0, \quad f(0) = 1, \quad \frac{df(0)}{dt} = \frac{1}{R_0} \quad (2.5)$$

Подставляя (2.4) в (2.2) и в нелинейном слагаемом взяв первых два члена из разложения экспоненты по малым μ , после интегрирования и учета начальных условий (2.4) получим

$$\left(\frac{df}{dt} \right)^2 = m + n + r - \frac{m}{f} - \frac{n}{f^2}, \quad \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{2\nu_0^2 f^2} + \frac{m\nu_0^2}{4f} \quad (2.6)$$

$$m = \frac{2\alpha^2 a_0^2}{3\gamma k \nu_0^2} = \frac{4\alpha_0^2}{\nu_0^2} \beta, \quad n = \frac{1}{\nu_0^4}, \quad r = \frac{1}{R_0^2}$$

1) $\beta > 0$ (влияние акустического течения), тогда $m > 0$. Не выписывая здесь решений уравнения (2.6), записываемых через элементарные функции, опишем вкратце эволюцию волны.

Если первоначально заданная волна выпуклая ($R_0 > 0$), то сразу начинается процесс демодуляции (расплывания) волны. Если же первоначальная волна вогнутая ($R_0 < 0$), то до момента времени

$$t_* = \frac{\sqrt{r}}{m+n+r} - \frac{m}{2(m+n+r)^{3/2}} \ln \frac{\sqrt{4n(m+n+r)+m^2}}{2\sqrt{r(m+n+r)+m+2n+2r}}$$

начинается процесс самомодуляции (сжатия) волны, потом она становится плоской и далее выгибается в сторону выпуклости и начинается процесс демодуляции.

2) $\beta < 0$ (отсутствие акустического течения), тогда $m < 0$, а уравнение (2.6) перепишем в виде

$$\left(\frac{df}{dt}\right)^2 = n+r-m + \frac{m}{f} - \frac{n}{f^2}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{1}{2f^2 v_0^2} - \frac{m v_0^2}{4f} \quad (2.7)$$

Покажем, что при отсутствии в уравнениях (2.2) дифракционных членов (вторых производных) происходит заострение гауссова профиля волны. Действительно, для простоты принимая первоначально заданную волну плоской и интегрируя уравнение (2.7), в котором положено $n=r=0$, находим

$$t = (\arcsin \sqrt{1-f} + \sqrt{f-f^2}) (m)^{-1/2}$$

В момент $t=t_0 = \pi v_0 (3\gamma k/2)^{1/2} / (\alpha a_0)$ получаем $f=0$ и $\alpha \rightarrow \infty$. Если же волна неплоская, то для всех $R_0 < 0$ и $R_0 > 0$, удовлетворяющих условию $R_0^2 > 1/m$, имеет место аналогичная картина.

Для физически верного описания картины распространения необходимо в (2.7) учесть дифракционные члены, которые в окрестности $t=t_0$ начинают играть важную роль. Для общности примем, что первоначально заданная волна неплоская. Поведение решений уравнения для f из (2.7) во многом определяется выбором корней f_1, f_2 , соответствующих выбору знаков «+» и «-» в решении уравнения $(n+r-m)f^2 + mf - n = 0$, исследование которого необходимо проводить для каждого конкретного случая.

2а) Пусть $n+r-m > 0$, то есть $r > m-n$, что приводит к условию $0 < f_1 < 1, f_2 < 0$. Решая с учетом (2.5) уравнение (2.7) и исследуя получаемое решение, приходим к выводу, что если первоначальная волна выпуклая ($R_0 > 0$), то независимо от «радиуса кривизны», имеет место ее демодуляция. Если же начальная волна вогнутая ($R_0 < 0$), то она начинает самомодулироваться до момента

$$t_1 = \frac{\sqrt{r}}{n+r-m} + \frac{m}{(n+r-m)^{1/2}} \ln \frac{2n-m+2r-2\sqrt{r(n-m+r)}}{2n-m+2r+2\sqrt{r(n-m+r)}}$$

При $t=t_1$ волна становится плоской, а при $t > t_1$ — выпуклой и начинается процесс демодуляции.

2б) Пусть $n+r-m < 0$, то есть $r < m-n$, что приводит к условию $0 < f_1 < 1, f_2 > 1$.

Первоначально заданная волна выпуклая ($R_0 > 0$). Примем $m-2n > 0$, то есть нелинейный эффект больше дифракционного, при этом, как будет показано ниже, $f_1 < f < f_2$. Взяв в уравнении (2.7) знак «+» и интегрируя его с учетом (2.5), получим (ветвь IC, фиг. 1)

$$t = \frac{\sqrt{r} - \sqrt{(n+r-m)f^2 + mf - n}}{m-n-r} - \frac{m}{2(m-n-r)^{3/2}} [\arcsin F(t) - \arcsin B]$$

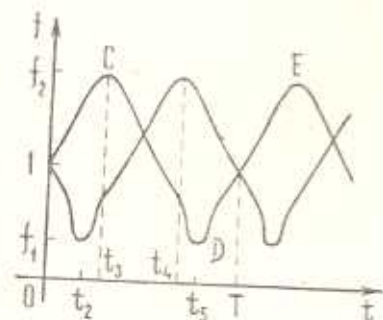
$$F(t) = \frac{2(n+r-m)f + m}{\sqrt{(m-2n)^2 + 4nr}}, \quad B = \frac{2n-m+2r}{\sqrt{(m-2n)^2 + 4nr}}$$

Для того, чтобы подкоренное выражение было больше нуля, необходимо выполнение условия $j_1 < j < j_2$. При $j = j_2$ находим

$$t_2 = \frac{\sqrt{r}}{m-n-r} + \frac{m}{2(m-n-r)^{3/2}} \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin B \right)$$

Ввиду того, что, начиная с момента $t > t_2$, $f'(t) < 0$, следует при интегрировании уравнения (2.7) брать знак «-», при этом постоянная интегрирования определяется из условия: при $t = t_2$, $j = j_2$. Решение запишется в виде (ветвь CD)

$$t = \frac{\sqrt{r} + \sqrt{(n+r-m)f^2 + mf - n}}{m-n-r} + \frac{m}{2(m-n-r)^{3/2}} [\arcsin F(t) + \arcsin B + \pi]$$



Фиг. 1.

При $j = j_1$ получаем

$$t_3 = \frac{\sqrt{r}}{m-n-r} +$$

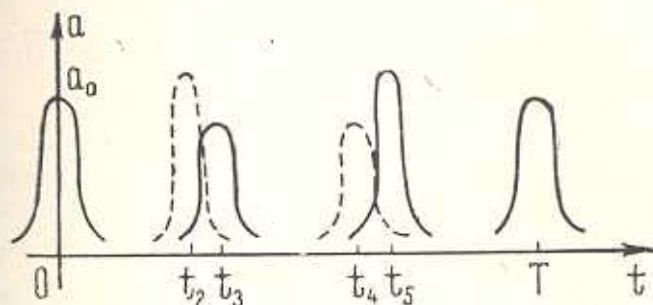
$$+ \frac{m}{2(m-n-r)^{3/2}} \left(\frac{3\pi}{2} + \arcsin B \right)$$

Начиная с момента $t > t_3$, $f'(t) > 0$, поэтому в (2.7) следует брать знак «+» и постоянную интегрирования определять из условия: при $t = t_3$, $j = j_1$, откуда находим решение (ветвь DE)

$$t = \frac{\sqrt{r} - \sqrt{(m-n-r)f^2 + mf - n}}{m-n-r} - \frac{m}{2(m-n-r)^{3/2}} [\arcsin F(t) - \arcsin B - 2\pi]$$

При $j = 1$ получаем $T = \pi m (m-n-r)^{-3/2}$, являющееся периодом функции $f(t)$, так как картина изменения f периодически повторяется. Таким образом, начальная выпуклая волна начинает демодулироваться до момента $t = t_3$, при котором она, превращаясь в плоскую, далее выгибается в сторону вогнутости; при этом начинается процесс самомодуляции, продолжающийся до момента $t = t_4$. В момент $t = t_4$ вогнутая волна, превра-

щаяся в плоскую, далее становится выпуклой и начинается процесс демодуляции, причем описанный процесс эволюции волны огибающей периодически повторяется (фиг. 2). Первоначально заданная волна вогнутая ($R_0 < 0$). Примем $m - 2n > 0$, при этом $f_1 < f < f_2$. Не выписывая здесь решений, получаемых аналогично вышеприведенному исследованию, опишем картину эволюции волны огибающей (фиг. 1).



Фиг. 2.

Начальная вогнутая волна начинает самомодулироваться до момента

$$t_2 = \frac{\sqrt{r}}{n+r-m} + \frac{m}{2(m-n-r)^{3/2}} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin B \right)$$

при котором она, превращаясь в плоскую, далее выгибается в сторону выпуклости и начинается процесс демодуляции, продолжающийся до момента

$$t_4 = -\frac{\sqrt{r}}{m-n-r} + \frac{m}{2(m-n-r)^{3/2}} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin B \right)$$

При $t = t_4$ выпуклая волна, превращаясь в плоскую, далее становится вогнутой и начинается процесс самомодуляции. Такая картина распространения волны периодически повторяется с периодом $T = \pi m (m-n-r)^{-3/2}$.

Пусть теперь $m - 2n < 0$, то есть нелинейный эффект меньше дифракционного, что приводит к условию $f_1 < f < f_2$. Картина распространения волны огибающей аналогична описанию, приведенному в пункте 2б), лишь выпуклая и вогнутая волны меняются ролями.

Таким образом, из проведенного исследования следует, что в дефокусирующей среде ($\gamma > 0$) учет среднего (акустического) течения приводит к демодуляции (расплыванию) волны огибающей.

3) Пусть $\gamma < 0$ (фокусирующая среда). Заменяя в уравнении (2.1) γ на $(-\gamma)$ и переходя к координате $\mu = (x_1 + 3\gamma k^2 t) (6\gamma k)^{-1/2}$, получим для амплитуды и фазы систему уравнений

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{a}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2} + \frac{\partial a}{\partial \mu} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2a} \frac{\partial^2 a}{\partial \mu^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right)^2 + \beta a^2 = 0$$

Здесь и ниже обозначения те же, что и в п. 1. Рассмотрим задачу об эволюции волны, первоначально заданной в виде гауссова профиля:

$$\text{при } t = 0 \quad a = a_0 \exp\left(-\frac{\mu^2}{2\mu_0^2}\right), \quad \varphi = \varphi_0 + \frac{\mu^2}{2R_0}$$

Если решение рассматриваемой системы искать в виде

$$a = \frac{a_0}{f^{1/2}} \exp\left(-\frac{\mu^2}{2\mu_0^2 f^2}\right), \quad \varphi = \varphi(t) + \frac{\mu^2}{2R(t)}$$

то, аналогично выводу (2.6), получим систему уравнений

$$\left(\frac{df}{dt}\right)^2 = m + n + r - \frac{m}{f} - \frac{n}{f^2}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{2\mu_0^2 f^2} - \frac{m\mu_0^2}{4f} \quad (2.8)$$

3а) $\beta < 0$ (влияние акустического течения), тогда $m < 0$ и уравнение для функции $f(t)$ из (2.8) совпадает с (2.7). Таким образом, учет среднего течения в фокусирующей среде приводит к самомодуляции волны огибающей.

3б) $\beta > 0$ (отсутствие акустического течения), тогда $m > 0$ и уравнение для функции $f(t)$ совпадает с (2.6), то есть для волны огибающей имеет место процесс демодуляции (расплывание профиля волны).

§ 3. Узкие пучки. В задачах об узких пучках изменения параметров течения по касательной к волне превосходят их изменения поперек волны, поэтому в уравнениях (1.5) второй производной по x , можно пренебречь в сравнении с y . Перейдем в (1.5) от подвижной (x_1, y, t) к неподвижной (x, y, t) системе координат и стационарный двумерный вариант полученных уравнений запишем в виде

$$i(c_0 - 3\gamma k^2) \frac{\partial U_1}{\partial x} - \frac{\alpha^2}{6\gamma k} |U_1|^2 U_1 - \alpha k U_0 U_1 + \frac{c_0 - 3\gamma k^2}{2k} \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} = 0$$

$$\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} |U_1|^2 + \frac{c_0}{2} \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} = 0 \quad (3.1)$$

В системе (3.1) $|U_1| \sim \epsilon$, $x \sim 1$, $y \sim \epsilon^{1/2}$, $\gamma \sim \epsilon^3$, $k \sim \epsilon^{-1}$, где ϵ — безразмерный малый параметр, поэтому из второго уравнения нетрудно заметить, что $U_0 \sim \epsilon^3$. Таким образом, в рассматриваемом приближении среднее (акустическое) течение не влияет на распространение волны огибающей, и система (3.1) сведется к уравнению

$$i \frac{\partial U_1}{\partial x} - \frac{\alpha^2}{6\gamma k c_0} |U_1|^2 U_1 + \frac{1}{2k} \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} = 0 \quad (3.2)$$

Если решение (3.2) искать в виде $U_1 = a(x, y) \exp[i\varphi(x, y)]$, то для амплитуды a и фазы φ получим систему уравнений [1-5]

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{1}{k} \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{a}{2k} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2k} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{2ak} \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \beta a^2 = 0$$
(3.3)

Рассмотрим задачу об эволюции волны, первоначально заданной в виде гауссова пучка

при $x = 0$

$$a = a_0 \exp\left(-\frac{y^2}{2y_0^2}\right), \quad \varphi = \sigma_0 + \frac{y^2}{2R_0}$$
(3.4)

где a_0 , σ_0 — начальные амплитуды и фаза волны при $x = 0$, y_0 и $1/R_0$ — начальные ширина профиля и кривизна волны. Задача (3.3)–(3.4) ставилась и подробно исследовалась в [2, 3], поэтому дадим краткое описание поведения волны.

Если $\gamma > 0$, в дефокусирующей среде происходит расплывание пучка.

Если $\gamma < 0$, в фокусирующей среде происходит волноводное распространение волны, то есть узкий пучок стремится фокусироваться, однако дифракционный эффект, выражаемый в (3.3) вторыми производными, препятствует образованию фокуса. Как было показано выше, процесс эволюции волны огибающей периодически повторяется.

В заключение отметим, что в более высшем приближении в работе [4] на основании закона сохранения потока импульса исследовано влияние акустического течения на самофокусировку звукового пучка. Утверждается, что учет среднего течения приводит к дополнительной расфокусировке пучка в дефокусирующей среде ($\gamma > 0$). Тогда, по аналогии с [4], можно утверждать, что в фокусирующей среде ($\gamma < 0$) акустическое течение усиливает процесс фокусировки пучка.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 8 XII 1980

Գ. Գ. ՕՋԱՆՅԱՆ

ԳԻՄՊԵՐՍՈՎ ՄԻՋԱՎԱՅՐԵՐՈՒՄ ԱԼԻՔԻ ԶԱՐԳԱՅՄԱՆ ՎՐԱ ՄԻՋԻՆ
(ԱՎՈՒՍՏԻԿ) ՀՈՍԱՆՔԻ ԱԶԴԵՅՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Դիտարկվում են փոքր ամպլիտուդայի մոնոխրոմատիկ ալիքների պարուրիչ ալիքի տարածման խնդիրները: Յույց է տրված, որ ոչ ստացիոնար միաչափ խնդրում ակուստիկ հոսանքի հաշվառումը դիսպերսիայի դրական պարամետրի դեպքում ալիքի տարածման վրա թողնում է դեմագույացվող ազդեցություն, իսկ դիսպերսիայի բացասական պարամետրի դեպքում՝ ինքնամոդուլացվող էֆեկտ: Երկչափ ստացիոնար խնդրում ակուստիկ հոսանքը չի ազդում ալիքների պարուրիչի էվոլյուցիայի վրա:

ON INFLUENCE OF MEAN (ACOUSTIC) FLOW ON THE EVOLUTION OF WAVE IN DISPERSIVE MEDIA

G. G. OHANIAN

Summary

The problems of propagation of enveloping waves of monochromatic waves of small amplitude are considered. It is shown that in one-dimensional nonstationary problem the taking into account of acoustic flow exerts a demodulation influence on propagation of wave, when the parameter of dispersion is positive, and conversely—the self-modulation effect, when the parameter of dispersion is negative. In a two-dimensional stationary problem the acoustic flow has no influence on evolution of enveloping waves.

ЛИТЕРАТУРА

1. Уилем Дж. Линейные и нелинейные волны. М., «Мир», 1977.
2. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. М., «Наука», 1979.
3. Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В. Самофокусировка и дифракция света в нелинейной среде. Усп. физ. н., 1967, т. 93, № 1, стр. 19—70.
4. Заболотская Е. А. Два механизма самовоздействия звуковых волн, распространяющихся в газожидкостной смеси. Акуст. ж., 1977, т. 23, № 4, стр. 591—595.
5. Батлов А. Г., Оганян Г. Г. Распространение модулированных нелинейных волн в релаксирующей газожидкостной смеси. Изв. АН СССР, МЖГ, 1980, № 1, стр. 133—143.
6. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., «Наука», 1973.
7. Оганян Г. Г. Распространение слабых волн в релаксирующей газожидкостной смеси. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1979, т. 32, № 2, стр. 3—13.