

Л. В. БЕЛОКОПЫТОВА, О. А. ИВАНЕНКО, А. А. ФИЛЬШТИНСКИЙ

ПЕРЕДАЧА НАГРУЗКИ ОТ УПРУГОГО РЕБРА
 К ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОЙ
 ПЛАСТИНКЕ

Контактные задачи для анизотропной полуплоскости с накладками рассматривались в [1]. Обзор основных результатов в этой области содержится в [2]. Взаимодействие изотропной или анизотропной пластины с двоякопериодической системой упругих тонких включений изучено в [3, 4].

Ниже рассматриваются задачи о передаче нагрузки от упругого тонкого включения или периодической системы включений к полубесконечной пьезокерамической пластинке. Общие представления решений строятся на базе полученных в данной работе фундаментальных решений двумерных уравнений электроупругости для полуплоскости. Детально исследуется случай, когда конец ребра выходит на границу полуплоскости. Приводятся результаты расчета.

1. Все построения будем проводить для поперечноизотропной пьезоэлектрической среды (кристалл гексагональной системы *6 mm*, поляризованная вдоль оси *oz* керамика), уравнения состояния которой в кристаллофизической системе координат *xyz* имеют вид [5]

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= S_{11}\sigma_x + S_{12}\sigma_y + S_{13}\sigma_z + d_{31}E_x \\ \varepsilon_y &= S_{12}\sigma_x + S_{11}\sigma_y + S_{13}\sigma_z + d_{31}E_x \\ \varepsilon_z &= S_{13}\sigma_x + S_{13}\sigma_y + S_{33}\sigma_z + d_{33}E_x \\ \gamma_{yz} &= S_{44}\tau_{yz} + d_{15}E_y; \quad D_x = d_{15}\tau_{yz} + \varepsilon_{11}E_x \\ \gamma_{xz} &= S_{44}\tau_{xz} + d_{15}E_x; \quad D_y = d_{15}\tau_{yz} + \varepsilon_{11}E_y \\ \gamma_{xy} &= 2(S_{11} - S_{12})\tau_{xy}; \quad D_z = d_{31}\sigma_x + d_{31}\sigma_y + d_{33}\sigma_z + \varepsilon_{31}E_x \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{xy}$ и $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \dots, \gamma_{xy}$ — компоненты тензоров механических напряжений и деформаций $E_x, E_y, E_z, D_x, D_y, D_z$ — компоненты векторов напряженности электрического поля и электрической индукции, $S_{ik} = S_{ik}^E, d_{ik}, \varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ik}^T$ — соответственно упругие податливости, пьезоэлектрические модули и диэлектрические постоянные среды.

Привлекая уравнения равновесия, условия совместности деформации и уравнения Максвелла [6], находим с учетом (1.1) компоненты механи-

ческих и электрических величин для случая плоского напряженного состояния в плоскости xOz

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \gamma_k \mu_k^2 \Phi'_k(z_k); & z_k &= x + \mu_k z \\ \tau_{xz} &= -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \gamma_k \mu_k \Phi'_k(z_k); & \operatorname{Im} \mu_k &> 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\sigma_z = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \gamma_k \Phi'_k(z_k); \quad \gamma_k = a_{20} + a_{22} \mu_k^2$$

$$u = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 p_k \Phi_k(z_k)$$

$$w = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 q_k \Phi_k(z_k)$$

$$\varphi = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_k \Phi_k(z_k)$$

$$E_x = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_k \Phi'_k(z_k)$$

$$E_z = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_k \mu_k \Phi'_k(z_k)$$

$$D_x = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 r_k \mu_k \Phi'_k(z_k)$$

$$D_z = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 r_k \Phi'_k(z_k)$$

$$p_k = a_{14} \gamma_k \mu_k^2 + 0.5 (a_{12} - S_{44}) \gamma_k - a_{23} \lambda_k \mu_k$$

$$q_k = 0.5 (a_{12} - S_{44}) \gamma_k \mu_k + a_{10} \gamma_k \mu_k^{-1} - (a_{21} - d_{15}) \lambda_k$$

$$\lambda_k = a_{21} \mu_k + a_{23} \mu_k^3$$

$$r_k = a_{20} \lambda_k \mu_k^{-1} - d_{15} \gamma_k$$

$$\Phi'_k(z_k) = d\Phi_k(z_k)/dz_k$$

$$a_{10} = S_{33}; \quad a_{12} = 2S_{13} + S_{44}; \quad a_{14} = S_{11}$$

$$a_{20} = \varepsilon_{11}; \quad a_{21} = d_{15} - d_{33}; \quad a_{22} = \varepsilon_{33}; \quad a_{23} = -d_{31}$$

Здесь u, w — компоненты вектора упругого смещения, φ — потенциал электрического поля, μ_k — корни характеристического уравнения.

$$(a_{10} + a_{12} \mu^2 + a_{14} \mu^4) (a_{20} + a_{22} \mu^2) - \mu^2 (a_{21} + a_{23} \mu^2)^2 = 0 \quad (1.3)$$

Так, например, для керамики PZT-5 вычисления дают

$$\mu_1 = 1.024i, \quad \mu_2 = 0.215 + 1.038i, \quad \mu_3 = -0.215 + 1.038i$$

Компоненты главного вектора механических усилий вдоль дуги AB определяются формулами

$$\int_{AB} X_n ds = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \gamma_k \mu_k \Phi_k(z_k) \Big|_A^B$$

$$\int_{AB} Z_n ds = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \gamma_k \Phi_k(z_k) \Big|_A^B \quad (1.4)$$

Выражение для нормальной компоненты D_n вектора электрической индукции \vec{D} на дуге AB и потока вектора \vec{D} через AB получим, используя формулы (1.2), и формулы для компонентов D_x и D_z из (1.1). Имеем (ψ — угол между нормалью к дуге AB и осью ox)

$$D_n = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 a_k(\psi) r_k \Phi_k'(z_k)$$

$$\int_{AB} D_n ds = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 r_k \Phi_k(z_k) \Big|_A^B \quad (1.5)$$

$$a_k(\psi) = \mu_k \cos \psi - \sin \psi$$

2. Пусть в точке (x_0, z_0) неограниченной пластинки действует сосредоточенная сила $\vec{P} = (P \cos \omega, P \sin \omega)$ или сосредоточенный заряд плотности ρ .

Искомые функции в этом случае имеют вид

$$\Phi_k(z_k) = i A_k \ln(z_k - z_{k0}); \quad z_{k0} = x_0 + \mu_k z_0 \quad (k = 1, 2, 3) \quad (2.1)$$

Для определения постоянных A_k необходимо привлечь три условия однозначности перемещений и потенциала электрического поля и три условия вида (L — произвольный замкнутый контур, охватывающий точку (x_0, z_0)).

$$\oint_L X_n ds = P \cos \omega; \quad \oint_L Z_n ds = P \sin \omega; \quad \oint_L D_n ds = \rho \quad (2.2)$$

Реализация указанных условий приводит к системе шести алгебраических уравнений относительно A_k

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 A_k \mu_k^{n-1} = B_n \quad (n = 0, 1, \dots, 5) \quad (2.3)$$

$$B_0 = -\frac{P \cos \omega}{2\pi a_{10} a_{20}} \left\{ \frac{a_{10} a_{23} a_{33}}{\Delta_1} + \frac{a_{12} - S_{44}}{2} \right\}$$

$$B_1 = \frac{1}{2\pi \Delta_1 a_{20}} \{ P \sin \omega (d_{12} a_{22} - a_{20} a_{23}) - a_{22}^2 \}$$

$$B_2 = \frac{P \cos \omega}{2\pi \Delta_1} a_{23}$$

$$B_3 = \frac{1}{2\pi \Delta_1} \{ P \sin \omega (a_{21} - d_{15}) + \rho \}$$

$$B_4 = -\frac{P \cos \omega}{2\pi \Delta_1} a_{21}$$

$$B_5 = \frac{\Delta_3}{2\pi \Delta_1 \Delta_3} \left\{ P \sin \omega \left[(a_{21} - d_{15}) + \frac{a_{12} - S_{44}}{2} \frac{\Delta_1}{\Delta_3} \right] + \rho \right\}$$

$$\Delta_1 = a_{20}a_{23} - a_{21}a_{22}; \quad \Delta_2 = a_{14}a_{22} - a_{23}^2; \quad \Delta_3 = a_{21}a_{23} - a_{14}a_{20}$$

Определитель системы (2.3) $\Delta \neq 0$, так как

$$\Delta = -\frac{8i \operatorname{Im} \mu_1 \operatorname{Im} \mu_2 \operatorname{Im} \mu_3}{|\mu_1 \mu_2 \mu_3|} |(\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 - \mu_3)(\mu_2 - \mu_3)(\mu_1 - \bar{\mu}_2)(\mu_1 - \bar{\mu}_3) \times \\ \times (\mu_2 - \bar{\mu}_3)|^2 \quad (2.4)$$

$$\operatorname{Im} \mu_k > 0, \quad \mu_k \neq \mu_n \quad (k \neq n; k, n = 1, 2, 3)$$

Таким образом, система (2.3) определяет постоянные A_n . Подставляя их значение в (2.1), находим функции $\Phi_n(z_n)$, описывающие поля механических и электрических величин в неограниченной пьезоэлектрической среде при действии сосредоточенных сил (зарядов).

Пусть теперь в некоторой внутренней точке $M(x_0, z_0)$ верхней полуплоскости сосредоточен заряд плотности ρ или действует сосредоточенная сила $\bar{P} = (P \cos \omega; P \sin \omega)$.

На границе $z = 0$ зададим усилия σ_z , τ_{xz} и потенциал электрического поля $\phi = 0$ (электропроводная граница), в случае неэлектропроводной границы, когда внешняя среда представляет собой воздух или вакуум, положим приближенно $D_n = 0$. Это сделать можно, так как диэлектрическая проницаемость воздуха или вакуума в сотни раз меньше, чем у керамики.

Требуется определить функции $\Phi'_k(z_k)$, описывающие поля механических и электрических величин в среде.

Искомые функции представим в виде

$$\Phi'_k(z_k) = \frac{iA_k}{z_k - z_{k0}} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega_k(x)}{x - z_k} dx \quad (2.5)$$

$$(k = 1, 2, 3), \quad \operatorname{Im} \omega_k = 0$$

Постоянные A_k определены в (2.3), функции $\omega_k(x)$ подлежат определению.

В силу (4.2) краевые условия на границе $z = 0$ запишем так:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 c_{nk} \Phi'_k(x) = f_n^*(x) \\ (n = 1, 2, 3), \quad c_{1k} = \gamma_k \mu_k, \quad c_{2k} = \gamma_k \quad (2.6)$$

$$f_1^*(x) = -\tau_{xz}|_{z=0}, \quad f_2^*(x) = \sigma_z|_{z=0}, \quad f_3^*(x) = 0$$

Здесь условие при $n = 3$ соответствует для электропроводимой границы заданию $\partial\varphi/\partial x = 0$, в этом случае $c_{3k} = \lambda_k$. Если граница не покрыта электродами, то электрическое граничное условие берем в виде $D_x = 0$, в этом случае $c_{3k} = -r_k$.

Подставляя предельные значения функций (2.5) в краевые условия (2.6), приходим к следующему матричному сингулярному интегральному уравнению

$$A\Omega(\xi) + \frac{B^*}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega(x) \frac{dx}{x - \xi} = f(\xi) \quad (2.7)$$

$$A = \operatorname{Re} C = \|\operatorname{Re} c_{nk}\|, \quad B^* = i \operatorname{Im} C = i \|\operatorname{Im} c_{nk}\|$$

$$\Omega(x) = \begin{bmatrix} \omega_1(x) \\ \omega_2(x) \\ \omega_3(x) \end{bmatrix}, \quad f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \gamma_1^1 \beta_1 & \gamma_2^1 \beta_2 & \gamma_3^1 \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$f_n(x) = f_n^*(x) - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 c_{nk} \frac{iA_k}{x - z_{k0}} \quad (n = 1, 2, 3)$$

$$C = \|c_{nk}\|, \quad \det C \neq 0$$

Проще всего обратиться (2.7), решив соответствующую задачу Римана. Опуская выкладки, приведем окончательный результат (C^{-1} — матрица обратная к C).

$$\Omega(\xi) = [\operatorname{Re} C^{-1}] f(\xi) + \frac{\operatorname{Im} C^{-1}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - \xi} dx \quad (2.8)$$

$$\operatorname{Re} C^{-1} + i \operatorname{Im} C^{-1} = C^{-1}$$

Учитывая выражение для столбца $f(x)$ из (2.7) и выполняя в (2.8) необходимые квадратуры, находим

$$\begin{aligned} \Omega(x) &= \Omega^*(x) + 2 \operatorname{Re} \left\{ (\bar{C})^{-1} C \left[\frac{iA_1}{x - z_{10}}, \frac{iA_2}{x - z_{20}}, \frac{iA_3}{x - z_{30}} \right] \right\} \\ \Omega^*(x) &= [\operatorname{Re} C^{-1}] f^*(x) + \frac{\operatorname{Im} C^{-1}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\xi) \frac{d\xi}{\xi - x} = \\ &= [\omega_1^*, \omega_2^*, \omega_3^*], \quad \bar{C} = \|\bar{c}_{nk}\| \end{aligned} \quad (2.9)$$

Здесь под выражением $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ понимаем матрицу-столбец $\Omega^*(x)$ — известный столбец.

Подставляя $\omega_k(x)$ из (2.9) в представления (2.5), получаем решение поставленной задачи

$$\Phi_k(z_k) = F_k'(z_k) + \frac{iA_k}{z_k - z_{k0}} + \sum_{n=1}^3 \frac{i\bar{b}_{kn}\bar{A}_n}{z_k - z_{n0}} \quad (2.10)$$

$$F_k'(z_k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega_k^*(x)}{x - z_k} dx, \quad B = (\bar{C})^{-1}C = \|b_{kn}\|$$

$$(k = 1, 2, 3)$$

Интегрируя (2.10), находим

$$\Phi_k(z_k) = F_k(z_k) + iA_k \ln(z_k - z_{k0}) + \sum_{n=1}^3 i\bar{b}_{kn}\bar{A}_n \ln(z_k - z_{n0}) \quad (2.11)$$

Можно показать, что если действует лишь сосредоточенный заряд, а $P = 0$, то имеют место равенства

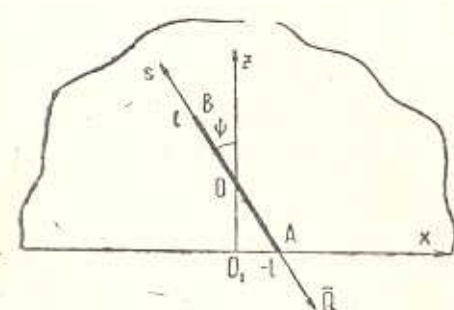
$$A_k + \sum_{n=1}^3 \bar{b}_{kn}\bar{A}_n = 0$$

то есть функции $\Phi_k(z_k)$ затухают при $|z_k| \rightarrow \infty$. Если же $P \neq 0$, то $\Phi_k(z_k)$ ведет себя на бесконечности, как $\ln z_k$, то есть неограниченно возрастает.

Если граница полупространства $z = 0$ свободна от сил, то в (2.10) необходимо положить $F_k'(z_k) = 0$ ($k = 1, 2, 3$).

Функции $\Phi_k(z_k)$ определяют в этом случае функцию Грина двумерной краевой задачи электроупругости для верхней полуплоскости $z > 0$.

3. Рассмотрим пьезокерамическую полубесконечную пластинку, закрепленную тонким упругим диэлектриком, выходящим на границу $z = 0$ (фиг. 1). Предположим, что к концу ребра приложена сила \bar{Q} , ребро работает лишь на растяжение—сжатие, граница $z = 0$ электродирована и свободна от сил.



Фиг. 1.

В этих условиях в пластинке возникают связанные сингулярные поля механических напряжений и вектора напряженности электрического поля. Электрические краевые условия на линии ребра имеют вид

$$E_s^+ = E_s^-, \quad D_n^+ = D_n^- \quad (3.1)$$

где E_s — касательная компонента вектора напряженности электрического поля, знак плюс относится к левому берегу при движении от начала ребра (точка A) к концу ребра (точка B).

Приравнивая осевую деформацию включения к полусумме деформаций пластинки на его берегах (что допустимо в силу достаточно малой толщины включения), получим, на основании (1.2), условие совместности деформаций ребра и пластинки.

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \alpha_k(\psi) R_k(\psi) \Phi_k'(t_k) = \frac{N}{E_0 F_0}$$

$$N = - \int_{-l}^l g(s) ds, \quad R_k(\psi) = q_k \cos \psi - p_k \sin \psi \quad (3.2)$$

$$t_k = \operatorname{Re} t + i \mu_k \operatorname{Im} t, \quad t \in [-l, l]$$

Здесь N — усилие в сечении ребра, $-g(s)/d$ — интенсивность контактных усилий, $E_0 F_0$ — соответственно модуль Юнга, площадь поперечного сечения ребра, ψ — острый угол между ребром и осью z , $[-l, l]$ — отрезок, занимаемый осью ребра.

Используя фундаментальное решение (2.10), искомые функции представим в виде

$$\Phi_k'(z_k) = \frac{b_k}{2\pi i d} \int_{-l}^l \frac{g(s)}{t_k - z_k} ds + \frac{1}{2\pi i d} \sum_{n=1}^3 \frac{\bar{b}_{kn} \bar{b}_n}{a_n(\psi)} \int_{-l}^l \frac{g(s)}{t_n - z_k} ds \quad (3.3)$$

$$\operatorname{Im} g(s) = 0, \quad t_k = l \mu_k \cos \psi + \alpha_k(\psi) S$$

Здесь $b_k = A_k$ при $P = 2\pi$, $\rho = 0$; d — толщина пластинки, $2l$ — длина ребра. Можно показать, что представления (3.3) автоматически удовлетворяют на границе $z = 0$ краевым условиям

$$\sigma_x = 0, \quad \tau_{xz} = 0, \quad \varphi = 0 \quad (3.4)$$

Подставляя в (3.2) полусумму предельных значений функции (3.3) и вводя параметризацию отрезка $[-l, l]$ по формулам

$$s = \xi l, \quad -1 \leq \xi \leq 1, \quad g(s) = \omega(\xi) \quad (3.5)$$

приходим к сингулярному интегродифференциальному уравнению относительно функции $\omega(\xi)$

$$\int_{-1}^1 \frac{\omega(\xi)}{\xi - \xi_0} d\xi + \int_{-1}^1 H^*(\xi, \xi_0) \omega(\xi) d\xi + \lambda \int_{\xi_0}^1 \omega(\xi) d\xi = 0 \quad (3.6)$$

$$G = 2 \operatorname{Im} \sum_{k=1}^3 b_k R_k(\psi)$$

$$H^*(\xi, \xi_0) = 2 \operatorname{Im} \sum_{k,n=1}^3 \frac{\bar{b}_{kn} \bar{b}_n \alpha_k(\psi) R_k(\psi)}{a_n(\psi) G[\xi - r_{kn}^*(\xi_0)]}$$

$$\lambda = \frac{2\pi l d}{E_0 F_0 G}$$

$$r_{kn}^*(\xi_0) = -1 + \frac{\alpha_k(\psi)}{a_n(\psi)} (1 + \xi_0)$$

К уравнению (3.6) необходимо присоединить дополнительное статическое условие

$$\int_{-1}^1 \omega(\xi) d\xi = -\frac{Q}{l}$$

В ядре H^* (ξ, ξ_0) имеется неподвижная особенность в точке

$$\xi = \xi_0 = -1$$

Для определения порядка особенности функции $\omega(\xi)$ на выходящем к границе конце ребра положим

$$\omega(\xi) = \frac{\omega_0(\xi)}{(1+\xi)^\beta}; \quad \text{Im } \beta = 0; \quad \omega_0(\xi) \in H[-1; 1]; \quad 0 < \beta < 1 \quad (3.7)$$

Подставляя (3.7) в интегральное уравнение (3.6) и используя формулы для асимптотических значений интеграла типа Коши в окрестности конца линии интегрирования [7], приходим после стандартной процедуры к трансцендентному уравнению относительно β

$$2 \text{Im} \sum_{k, n=1}^3 \bar{b}_{kn} \bar{b}_n R_k(\psi) \left[-\frac{a_k(\psi)}{a_n(\psi)} \right]^{1-\beta} - G \cos \pi\beta = 0 \quad (3.8)$$

4. Пусть теперь полубесконечная пьезоэлектрическая пластинка усилена периодической системой ребер, выходящих на границу $z = 0$ (фиг. 2). Будем предполагать, что к концам ребер приложены одинаковые силы \bar{Q} и ребра непрерывно скреплены с пластинкой.

Учитывая периодичность механических и электрических полей, представим искомые функции в виде

$$\begin{aligned} \Phi'_k(z_k) = & \frac{b_k}{2Tid} \int_{-1}^1 g(s) \left[\text{ctg} \frac{\pi(t_k - z_k)}{T} - i \right] ds + \\ & + \frac{1}{2Tid} \sum_{n=1}^3 \bar{b}_{kn} \bar{b}_n \int_{-1}^1 g(s) \left[\text{ctg} \frac{\pi(t_n - z_k)}{T} - i \right] ds \end{aligned} \quad (4.1)$$

где T — период структуры.

Очевидно, что условие совместности деформаций (3.2) достаточно выполнить на одном из ребер, в силу (4.1) на остальных ребрах оно выполняется автоматически.

Как и выше, приходим к сингулярному интегро-дифференциальному уравнению

$$\int_{-1}^1 G_1(\xi, \xi_0) \omega(\xi) d\xi + \int_{-1}^1 G_2(\xi, \xi_0) \omega(\xi) d\xi + \lambda \int_{-1}^1 \omega(\xi) d\xi = M \quad (4.2)$$

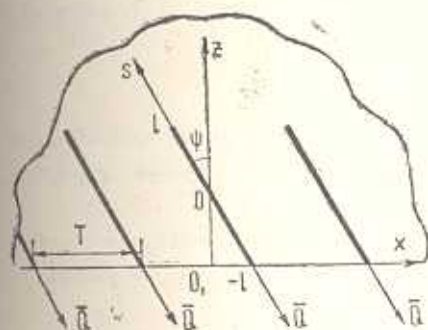
$$G_1(\xi, \xi_0) = 2 \operatorname{Im} \sum_{k=1}^3 b_k a_k(\psi) R_k(\psi) \operatorname{ctg} [a_k(\psi) (\xi - \xi_0)]$$

$$G_2(\xi, \xi_0) = 2 \operatorname{Im} \sum_{k,n=1}^3 \bar{b}_{kn} \bar{\delta}_n a_k(\psi) R_k(\psi) \operatorname{ctg} [\bar{a}_n(\psi) [\xi - r_{kn}^*(\xi_0)]]$$

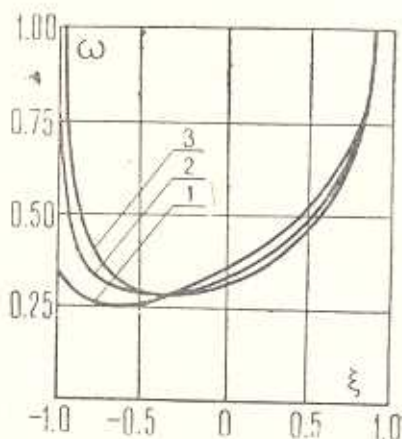
$$\lambda = \frac{2Td}{E_0 F_0}, \quad \alpha_k(\psi) = \frac{\pi l}{T} a_k(\psi)$$

$$M = \frac{Q}{l} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 c_k a_k(\psi) R_k(\psi); \quad c_k = b_k + \sum_{n=1}^3 \bar{b}_{kn} \bar{b}_n$$

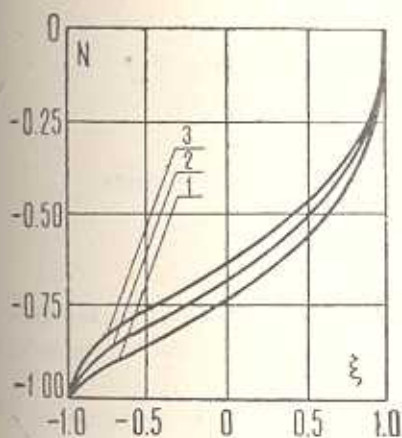
5. Уравнение (3.6) реализовано численно по схеме работы [8].



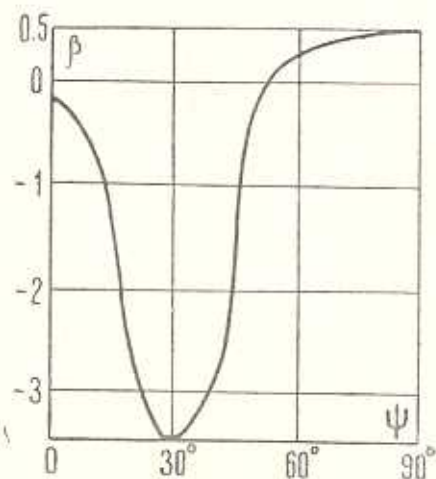
Фиг. 2.



Фиг. 3.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

На фиг. 3 представлены кривые изменения контактных усилий $-\omega(\xi)$, а на фиг. 4—внутренних усилий N в сечении ребра по его длине (кривые 1, 2, 3 относятся к значениям $\psi = 55^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ соответственно).

На фиг. 5 приведен график изменения порядка особенности β в функции от угла ψ .

Из результатов расчета следует, что при $0 \leq \psi \leq 51^\circ$ контактные усилия — $\omega(\xi)$ ограничены на конце A , при $51^\circ < \psi \leq 90^\circ$ в контактных усилиях появляется особенность, определяемая формулой (3.7).

Авторы благодарят О. А. Письмиченко за помощь при численной реализации алгоритма.

Сумский филиал Харьковского
политехнического института
им. В. И. Ленина

Поступила 12 V 1980

Լ. Վ. ԲԵԼՈՎՈՊԻՏՈՎԱ, Օ. Ա. ԻՎԱՆԵՆԿՈ, Լ. Ա. ՖԻԼՇՏԻՆՍԿԻ

ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ԿՈՂԻՑ ԲԵՌՆՎԱՄՈՒԹՅԱՆ ՓՈՆԱՆՆՅՈՒՄԸ
ԿԻՍԱՆՎԵՐՋ ՊՅԵԶՈԿԵՐԱՄԻԿ ՍԱԼԻՆ

Ա մ փ ո փ ո մ

Գրտարկված են մեկ կողից կամ կողերի պարբերական համակարգից պլեղոկերամիկ կիսաանվերջ սալին բեռնվածության փոքրացման վերաբերյալ էլեկտրատառաձգական երկշափ կոնտակտային խնդիրներ:

Հոդվածում կառուցված Գրինի ֆունկցիայի օգտագործմամբ զրված խնդիրը բերված է կոնտակտային ճիգերի նկատմամբ սինգուլյար ինտեգրալ-դիֆերենցիալ հավասարման:

Եզրագծի վրա զուրս եկող կողի ծայրում կոնտակտային ճիգերի եզրկիսօրթյան կարգը որոշելու համար ստացված է տրանսցենդենտ հավասարում: Բերվում են թվային արդյունքները:

LOAD TRANSFER FROM AN ELASTIC RIB TO A SEMI-INFINITE PIEZOCERAMIC PLATE

L. V. BĬLOKOPYTOVA, O. A. IVANENKO, L. A. PHILSHTINSKI

S u m m a r y

The paper deals with two-dimensional contact problems of electroelasticity concerning load transfer from a single rib or a periodic system of ribs to a piezoceramic semiinfinite plate.

By using the Green function the given problem is reduced to a singular integro-differential equation relative to contact stresses.

A transcendental equation for determining the order of the peculiarity of contact stresses on the boundary-side rib end is obtained. The results of the calculations are also given.

ЛИТЕРАТУРА

1. Саркисян В. С., Овсепян А. О. Контактная задача для анизотропной полуплоскости с упругими креплениями. Докл. АН Арм. ССР, 1971, т. 52, № 5.
2. Саркисян В. С. Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. Изд-во Ереванского ун-та, 1976.
3. Долгих В. Н., Фильштинский Л. А. Об одной модели регулярной кусочно-неоднородной среды. Изв. АН СССР, Механика твердого тела, 1976, № 2.
4. Долгих В. Н., Фильштинский Л. А. Модель анизотропной среды, армированной тонкими лентами. Прикл. механика АН УССР, 1979, т. 15, № 4.
5. Ной Дж. Физические свойства кристаллов и их описание при помощи тензоров и матриц. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
6. Белокопытова Л. В., Фильштинский Л. А. Двумерная краевая задача электрoупругости для пьезоэлектрической среды с разрезами. Изв. АН СССР, Прикл. математика и механика, 1979, т. 43, вып. 1.
7. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике. М., изд-во «Наука», 1968.
8. Каламидия А. И. Математические методы двумерной упругости. М., изд-во «Наука», 1973.