

С. Е. МИРЗОЯН, С. М. МХИТАРЯН

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ КОНТАКТНОГО
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МЕЖДУ БЕСКОНЕЧНЫМИ
СТРИНГЕРАМИ И ПОЛОСАМИ С УЧЕТОМ
НЕОДНОРОДНОСТИ СТАРЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

Область контактных задач о передаче нагрузки от тонкостенных элементов в виде стрингеров к деформируемым массивным телам различных форм в постановке теории упругости в последнее время значительно развивается, обогащаясь многими результатами. Основные достижения в этой области с достаточной полнотой отражены в монографии [1].

Между тем, при расчетах разнообразных инженерных конструкций, подкрепленных или армированных тонкостенными элементами, встречаются подобные задачи, исследование которых необходимо провести в постановке теории ползучести. Такие задачи часто возникают в вопросах механики армированных сред. При этом нужно исходить из теории ползучести, наиболее полно отражающей реальные эксплуатационные условия конструкций и сооружений. Одной из таких общепризнанных теорий является теория ползучести с учетом наследственности и старения материалов, предложенная Н. Х. Арутюняном в [2]. Эта теория в последнее время применительно к неоднородно-наследственно стареющим средам существенно обобщена и развита в работах Н. Х. Арутюняна [3—6]. Некоторые контактные задачи для неоднородно стареющих тел исследовались в работах [3, 7, 8].

В рамках последней теории в настоящей работе рассматриваются четыре задачи контактного взаимодействия между бесконечными стрингерами и деформируемыми полосами, обладающими свойствами ползучести и неоднородности старения материалов. При этом в первых двух задачах считается, что бесконечная полоса по одной своей грани усилена бесконечным стрингером, нагруженным горизонтальными силами произвольных интенсивностей, а по другой грани жестко защемлена или свободна от внешних напряжений. В двух других задачах считается, что две пластины в виде бесконечных полос, одна из граней которых либо жестко защемлена, либо свободна от внешних напряжений, соединены между собой вдоль двух других граней бесконечным стрингером, нагруженным горизонтальными силами произвольной интенсивности. Предполагается, что материалы стрингеров и полос имеют разные возрасты, в чем отражается факт их неоднородного старения. Стрингеры трактуются как одномерные деформируемые континуумы, а напряженно-деформированное состояние полос описывается уравнениями плоской теории ползучести.

Рассмотренные задачи математически формулируются в виде интегро-дифференциальных уравнений. Получены их замкнутые решения. Предельным переходом получены решения соответствующих задач в случае полуплоскостей. Приведен числовой пример.

§ 1. Постановка задач и вывод разрешающих уравнений

Пусть бесконечная полоса толщины H по одной своей грани усилена бесконечным стрингером малой толщины h , а по другой грани либо жестко закреплена (задача 1), либо свободна от внешних напряжений (задача 2). Будем считать, что материалы стрингера и полосы обладают свойством ползучести, которое характеризуется неоднородностью процесса старения. Обозначим меру ползучести стрингера— $C_1(t, u)$, модуль упругости— $E_1(t)$, возраст через τ_1 , а соответствующие характеристики для полосы— через $C_2(t, u)$, $E_2(t)$, τ_2 .

Будем считать также, что для материалов полосы и стрингера коэффициенты поперечного сжатия для упругой деформации $\nu_1(t)$ и деформации ползучести $\nu_2(t, u)$ одинаковы и постоянны

$$\nu_1(t) = \nu_2(t, u) = \nu = \text{const}$$

Требуется определить закон распределения контактных напряжений на линии соединения стрингера с полосой, если в момент времени τ_0 к стрингеру приложена горизонтальная сила интенсивности $q_0(x, t)$.

Пусть далее две одинаковые бесконечные полосы соединены между собой вдоль бесконечного стрингера. Другие грани полос либо жестко закреплены (задача 3), либо свободны от напряжений (задача 4), а к стрингеру в момент τ_0 приложены горизонтальные силы интенсивности $q_0(x, t)$. Опять требуется найти закон распределения контактных напряжений, действующих на линии соединения стрингера с полосами, притом характеристики ползучести полос и стрингера те же, что и в первых двух задачах.

Выведем разрешающие уравнения этих задач. Сначала обратимся к первой задаче.

Как обычно [3, 10], будем предполагать, что стрингер лишен изгибной жесткости и находится в одноосном напряженном состоянии, поэтому на линии соединения стрингера с полосой будут действовать только тангенциальные контактные напряжения $q(x, t)$.

В случае плоской деформации* основные реологические соотношения теории ползучести для неоднородно наследственно-стареющих сред имеют вид [3]

$$\begin{aligned} \epsilon_{x,y}(t) &= \frac{(1-\nu^2)\epsilon_x(t) - (\nu + \nu^2)\epsilon_y(t)}{E^*(t)} - \int_{\tau_0}^t [(1-\nu^2)\epsilon_x(u) - \dots] K^*(t, u) du \\ \tau_{x,y}(t) &= 2(1+\nu) \left[\frac{\tau_{xy}(t)}{E^*(t)} - \int_{\tau_0}^t \tau_{xy}(u) K^*(t, u) du \right] \end{aligned} \quad (1.1)$$

* Реологические соотношения в случае обобщенного плоского напряженного состояния получаются из (1.1), если в них положить $\nu^2 = 0$.

$$\epsilon_y(t) = \frac{(1 - \nu^2) \sigma_y(t) - (\nu + \nu^2) \sigma_x(t)}{E^*(t)} - \int_{\tau_0}^t [(1 - \nu^2) \sigma_y(u) - \dots] K^*(t, u) du \quad (1.1)$$

где

$$K^*(t, u) = K[t + \rho(x, y), u + \rho(x, y)], \quad \rho(x, y) = \tau(x, y) - \tau_0$$

$$K(t, u) = \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{1}{E(u)} + C(t, u) \right], \quad E^*(t) = E(t + \rho(x, y))$$

$$C(t, u) = \varphi(u) [1 - e^{-\nu(t-u)}], \quad \varphi(u) = C_0 + \frac{A_0}{u}$$

Если предположить, что $\tau(x, y) = \tau = \text{const}$, то из (1.1) легко получается, что

$$\begin{aligned} u^*(x, t) &= (1 - L) u(x, t) \\ v^*(x, t) &= (1 - L) v(x, t) \end{aligned} \quad (1.2)$$

где

$$LY(t) = \int_{\tau_0}^t E^*(u) K^*(t, u) Y(u) du$$

$u(x, t)$ и $v(x, t)$ — компоненты упруго-мгновенных перемещений, а $u^*(x, t)$ и $v^*(x, t)$ — те же компоненты при ползучести.

Так как струнгер находится в одноосном напряженном состоянии, то рассматривая равновесие его любой части, будем иметь

$$\sigma_x^{(1)}(x, t) = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^x [q(y, t) - q_0(y, t)] dy \quad (1.3)$$

так как $\sigma_x^{(1)}(x, t) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm \infty$.

На основании первого соотношения (1.1) имеем

$$\epsilon_x^{(1)}(x, t) = \frac{1 - \nu_1^2}{h} (1 - L_1) \int_{-\infty}^x \frac{q(y, t) - q_0(y, t)}{E_1(t + \rho_1)} dy \quad (1.4)$$

Здесь $\epsilon_x^{(1)}(x, t)$ — деформация точек струнгера с учетом ползучести. С другой стороны, известно [9], что перемещение точек границы упругой полосы в задаче 1 определяется формулой

$$u_2(x, t) = \int_{-\infty}^x \frac{K(|x - \zeta|) q(\zeta, t)}{E_2(t)} d\zeta \quad (1.5)$$

где

$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2p+1)[(p+1) \operatorname{sh} 2x + 2xp](1+\nu_2)}{|s|[2p(p+1) \operatorname{ch} 2x + p^2(4x^2+1) + (p+1)^2]} e^{-isx} ds$$

λ_2 и μ_2 — постоянные Ляме для полосы, а

$$p = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\lambda_2}{\mu_2} \right), \quad \alpha = |s|H$$

Из (1.5) с учетом (1.2) имеем

$$u_2^*(x, t) = (1 - L_2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(|x - \zeta|) q(\zeta, t)}{E_2(t + \rho_2)} d\zeta \quad (1.6)$$

Учитывая граничное условие на линии контакта

$$\varepsilon_x^{(1)}(x, t) = \varepsilon_x^{(2)}(x, t) \quad (-\infty < x < \infty)$$

получим основное разрешающее уравнение для определения $q(x, t)$ в следующем виде:

$$(1 - L_2) \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(|x - \zeta|) \varphi'(\zeta, t)}{E_2(t + \rho_2)} d\zeta = (1 - L_1) \frac{\varphi(x, t) - \varphi_0(x, t)}{hE_1(t + \rho_1)/(1 - \nu_1^2)} \quad (1.7)$$

где

$$\varphi'(x, t) = q(x, t), \quad \varphi_0'(x, t) = q_0(\zeta, t)$$

$$L_i Y(t) = \int_{\tau_i}^t E_i(u + \rho_i) K_i(t + \rho_i, u + \rho_i) Y(u) du, \quad \rho_i = \tau_i - \tau_0 \quad (i = 1, 2)$$

Таким образом, в задаче 1 определение неизвестного контактного напряжения $q(x, t)$ сводится к решению интегро-дифференциального уравнения (1.7).

Поступив вполне аналогичным образом, находим, что решение задачи 2 сводится к решению интегро-дифференциального уравнения

$$(1 - L_2) \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_1(|x - \zeta|) \varphi'(\zeta, t)}{E_2(t + \rho_2)} d\zeta = (1 - L_1) \frac{\varphi(x, t) - \varphi_0(x, t)}{hE_1(t + \rho_1)/(1 - \nu_1^2)} \quad (1.8)$$

где

$$K_1(x) = \frac{1 - \nu_2^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} a \operatorname{ch} a - a}{|s|(\operatorname{sh}^2 a - a^2)} e^{-isx} ds, \quad \alpha = |s|H.$$

Обратимся теперь к последним двум задачам. Для вывода разрешающих уравнений относительно стрингера будем предполагать, что стрингер

в горизонтальном направлении растягивается или сжимается как стержень, находясь в одноосном напряженном состоянии. Кроме того, будем считать, что вдоль оси ox его упругие вертикальные перемещения постоянны и даже равны нулю [10]. Последнее предположение обусловлено малостью толщины стрингера, вследствие чего ее изменение от точки к точке в процессе деформации незначительно и можно им пренебречь.

Предполагается также, что полосы находятся в обобщенном плоском напряженном состоянии.

Обозначим интенсивности нормальных и касательных контактных напряжений через $p(x, t)$ и $q(x, t)$ соответственно.

На основе сделанных предположений поставленная задача математически сформулируется в виде соотношений:

$$\frac{dv_1^*(x, t)}{dx} = 0 \quad (1.9)$$

$$\frac{du_1^*(x, t)}{dx} = (1 - L_1) \int_{-\infty}^x \frac{2h_1 q(y, t) - q_0(y, t)}{A_s E_1 (t + \rho_1)} dy$$

где A_s — площадь прямоугольного поперечного сечения стрингера, h_1 — ширина стрингера.

Вертикальные и горизонтальные перемещения граничных точек упругих полос в задаче 3 выражаются формулами [9]

$$u_2(x, t) = \frac{1}{E_2(t)} \left[\int_{-\infty}^{\infty} K_{21}(x - \zeta) p(\zeta, t) d\zeta + \int_{-\infty}^{\infty} K_{22}(|x - \zeta|) q(\zeta, t) d\zeta \right] \quad (1.10)$$

$$v_2(x, t) = \frac{1}{E_2(t)} \left[\int_{-\infty}^{\infty} K_{11}(|x - \zeta|) p(\zeta, t) d\zeta + \int_{-\infty}^{\infty} K_{12}(x - \zeta) q(\zeta, t) d\zeta \right]$$

где

$$K_{11}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2p+1)[2xp - (p+1)\operatorname{sh} 2\alpha](1+\nu_2)}{|s| \Delta(s)} e^{-isx} ds$$

$$K_{12}(x) = K_{21}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i[(p+1)(1 - \operatorname{ch} 2\alpha) + 4x^2 p^2](1+\nu_2)}{s \Delta(s)} e^{-isx} ds$$

$$K_{22}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2p+1)[2xp + (p+1)\operatorname{sh} 2\alpha](1+\nu_2)}{|s| \Delta(s)} e^{-isx} ds$$

$$p = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\lambda_2^*}{\nu_2} \right), \quad \lambda_2^* = 2\lambda_2 \nu_2 / (\lambda_2 + 2\nu_2)$$

$$\Delta(s) = 2p(p+1)\operatorname{ch} 2\alpha + p^2(4x^2 + 1) + (p+1)^2, \quad \alpha = |s|H$$

Теперь заметим, что на линии соединения стрингера с полосами должны удовлетворяться условия

$$\frac{du_1^*(x, t)}{dx} = \frac{du_2^*(x, t)}{dx}, \quad \frac{dv_1^*(x, t)}{dx} = \frac{dv_2^*(x, t)}{dx} \quad (|x| < \infty) \quad (1.11)$$

Для перемещений граничных точек полос с учетом ползучести согласно (1.2) и (1.10) имеем

$$\begin{aligned} u_2^*(x, t) &= (1 - L_2) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_{21}(x - \zeta) p(\zeta, t) d\zeta}{E_2(t + \rho_2)} + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_{22}(|x - \zeta|) q(\zeta, t) d\zeta}{E_2(t + \rho_2)} \right] \\ v_2^*(x, t) &= (1 - L_2) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_{11}(|x - \zeta|) p(\zeta, t) d\zeta}{E_2(t + \rho_2)} + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_{12}(x - \zeta) q(\zeta, t) d\zeta}{E_2(t + \rho_2)} \right] \end{aligned} \quad (1.12)$$

Удовлетворяя условиям (1.11) и имея в виду (1.9), относительно неизвестных контактных напряжений $p(x, t)$ и $q(x, t)$ получим следующую систему интегро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\int_{-\infty}^{\infty} K_{11}(|x - \zeta|) p(\zeta, t) d\zeta + \int_{-\infty}^{\infty} K_{12}(x - \zeta) \varphi'(\zeta, t) d\zeta \right] &= 0 \\ (1 - L_2) \frac{d}{dx} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_{21}(x - \zeta) p(\zeta, t)}{E_2(t + \rho_2)} d\zeta + \right. \\ \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_{22}(|x - \zeta|) \varphi'(\zeta, t)}{E_2(t + \rho_2)} d\zeta \right] &= (1 - L_1) \frac{2h_1 \varphi(x, t) - \varphi_0(x, t)}{A_1 E_1(t + \rho_1)} \end{aligned} \quad (1.13)$$

где

$$\varphi'(x, t) = q(x, t), \quad \varphi_0(x, t) = q_0(x, t)$$

Таким образом, в задаче 3 определение $p(x, t)$ и $q(x, t)$ сводится к решению системы интегро-дифференциальных уравнений (1.13).

Вполне аналогичным образом находим, что определение неизвестных контактных напряжений $p(x, t)$ и $q(x, t)$ в задаче 4 сводится к решению следующей системы интегро-дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{dx} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}_{11}(|x-\zeta|) p(\zeta, t) d\zeta + \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}_{12}(x-\zeta) \varphi'(\zeta, t) d\zeta \right] = 0$$

$$(1-L_2) \frac{d}{dx} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{K}_{21}(x-\zeta) p(\zeta, t) d\zeta}{E_2(t+\rho_2)} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{K}_{22}(|x-\zeta|) \varphi'(\zeta, t) d\zeta}{E_2(t+\rho_2)} \right] = (1-L_1) \frac{2h_1 \varphi(x, t) - \varphi_0(x, t)}{A_s E_1(t+\rho_1)} \quad (1.14)$$

где

$$\varphi'(x, t) = q(x, t), \quad \varphi_0'(x, t) = q_0(x, t)$$

$$\tilde{K}_{11}(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \alpha + \alpha}{|s|(\operatorname{sh}^2 \alpha - \alpha^2)} e^{-i s x} ds$$

$$\tilde{K}_{12}(x) = \tilde{K}_{21}(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i[(1-\nu_2) \operatorname{sh}^2 \alpha + (1+\nu_2) \alpha^2]}{s(\operatorname{sh}^2 \alpha - \alpha^2)} e^{-i s x} ds$$

$$\tilde{K}_{22} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \alpha - \alpha}{|s|(\operatorname{sh}^2 \alpha - \alpha^2)} e^{-i s x} ds, \quad \alpha = |s|H$$

§ 2. Решение определяющих уравнений

Сначала обратимся к решению уравнения (1.7). Применяя к обеим частям уравнения (1.7) преобразование Фурье, после некоторых несложных операций приходим к интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$A(s, t) \Phi(s, t) - \int_{t_0}^t [A_1 K_1^*(t, u) + A_2(s) K_2^*(t, u)] \Phi(s, u) du = Q_0(s, t) \quad (2.1)$$

где

$$A(s, t) = A_1/E_1^*(t) + A_2(s)/E_2^*(t), \quad A_1 = (1-\nu_1^2)/h, \quad A_2(s) = s^2 \bar{K}(s)$$

$$Q_0(s, t) = (1-L_1) \frac{\bar{q}_0(s, t)}{h E_1^*(t)/(1-\nu_1^2)}$$

$\Phi(s, t)$, $\bar{q}_0(s, t)$, $\bar{K}(s)$ — трансформанты Фурье соответственно для $\varphi'(x, t)$, $q_0(x, t)$ и $K(x)$, s — параметр преобразования Фурье.

Поступив аналогичным образом, из (1.8) получим уравнение вида

$$A(s, t) \Phi(s, t) - \int_{t_0}^t [A_1 K_1^*(t, u) + A_2(s) K_2^*(t, u)] \Phi(s, u) du = Q_0(s, t) \quad (2.2)$$

$$\frac{d}{dx} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}_{11}(|x-\zeta|) p(\zeta, t) d\zeta + \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}_{12}(x-\zeta) \varphi'(\zeta, t) d\zeta \right] = 0$$

$$(1-L_2) \frac{d}{dx} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{K}_{21}(x-\zeta) p(\zeta, t) d\zeta}{E_2(t+\rho_2)} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{K}_{22}(|x-\zeta|) \varphi'(\zeta, t) d\zeta}{E_2(t+\rho_2)} \right] = (1-L_1) \frac{2h_1 \varphi(x, t) - \varphi_0(x, t)}{A_s E_1(t+\rho_1)} \quad (1.14)$$

где

$$\varphi'(x, t) = q(x, t), \quad \varphi_0(x, t) = q_0(x, t)$$

$$\tilde{K}_{11}(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \alpha + \alpha}{|s|(\operatorname{sh}^2 \alpha - \alpha^2)} e^{-isx} ds$$

$$\tilde{K}_{12}(x) = \tilde{K}_{21}(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i[(1-\nu_2) \operatorname{sh}^2 \alpha + (1+\nu_2) \alpha^2]}{s(\operatorname{sh}^2 \alpha - \alpha^2)} e^{-isx} ds$$

$$\tilde{K}_{22} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \alpha - \alpha}{|s|(\operatorname{sh}^2 \alpha - \alpha^2)} e^{-isx} ds, \quad \alpha = |s|H$$

§ 2. Решение определяющих уравнений

Сначала обратимся к решению уравнения (1.7). Применяя к обеим частям уравнения (1.7) преобразование Фурье, после некоторых несложных операций приходим к интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$A(s, t) \Phi(s, t) - \int_{t_0}^t [A_1 K_1^*(t, u) + A_2(s) K_2^*(t, u)] \Phi(s, u) du = Q_0(s, t) \quad (2.1)$$

где

$$A(s, t) = A_1/E_1^*(t) + A_2(s)/E_2^*(t), \quad A_1 = (1-\nu_1^2)/h, \quad A_2(s) = s^2 \bar{K}(s)$$

$$Q_0(s, t) = (1-L_1) \frac{\bar{q}_0(s, t)}{h E_1^*(t)/(1-\nu_1^2)}$$

$\Phi(s, t)$, $\bar{q}_0(s, t)$, $\bar{K}(s)$ — трансформанты Фурье соответственно для $\varphi'(x, t)$, $q_0(x, t)$ и $K(x)$, s — параметр преобразования Фурье.

Поступив аналогичным образом, из (1.8) получим уравнение вида

$$A(s, t) \Phi(s, t) - \int_{t_0}^t [A_1 K_1^*(t, u) + A_2(s) K_2^*(t, u)] \Phi(s, u) du = Q_0(s, t) \quad (2.2)$$

где в рассматриваемом случае

$$A_2(s) = s^2 \bar{K}_1(s), \quad \bar{K}_1(s) = \int_{-\infty}^{\infty} K_1(x) e^{isx} dx$$

Для решения уравнения (2.1) меру ползучести материала стрингера и полосы примем в форме [3]

$$C_i(t, u) = \varphi_i(u) [1 - e^{-\gamma(t-u)}] \quad (i = 1, 2) \quad (2.3)$$

где $\varphi_1(u)$ и $\varphi_2(u)$ — функции, определяющие процесс старения материала стрингера и полосы соответственно.

Тогда для $K(t, u)$ будем иметь

$$K(t, u) = -\frac{E'(u)}{E^2(u)} + \varphi'(u) - [\bar{\varphi}'(u) + \gamma\varphi(u)] e^{-\gamma(t-u)} \quad (2.4)$$

Можно показать [2, 3], что решение интегрального уравнения (2.1) в этом случае эквивалентно решению дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами следующего вида:

$$\Phi''(s, t) + \tilde{A}(s, t) \Phi'(s, t) = F(s, t) \quad (2.5)$$

при начальных условиях

$$\Phi(s, t)|_{t=\tau_0} = Q_0(s, \tau_0)/A(s, \tau_0) \quad (2.6)$$

$$\Phi'(s, t)|_{t=\tau_0} = \{Q_0'(s, \tau_0) - \gamma[A_2(s)\varphi_2(\tau_0) + A_1\varphi_1(\tau_0)]\Phi(s, \tau_0)\}/A(s, \tau_0)$$

где

$$\tilde{A}(s, t) = [A'(s, t) + \gamma\{A(s, t) + A_1\varphi_1(t + \rho_1) + A_2(s)\varphi_2(t + \rho_2)\}]/A(s, t)$$

$$F(s, t) = [Q_0'(s, t) + \gamma Q_0(s, t)]/A(s, t)$$

Отметим, что все производные берутся по времени.

Решение дифференциального уравнения (2.5) при начальных условиях (2.6) записывается в виде [2, 3]

$$\begin{aligned} \Phi(s, t) = & \Phi(s, \tau_0) + \Phi'(s, \tau_0) \int_{\tau_0}^t e^{-\gamma(s, u)} du + \\ & + \int_{\tau_0}^t e^{-\gamma(s, u)} du \int_{\tau_0}^u e^{\gamma(s, z)} F(s, z) dz \\ & \eta(s, t) = \int_{\tau_0}^t \tilde{A}(s, u) du \end{aligned} \quad (2.7)$$

Теперь решение исходного уравнения (1.7) будет определяться при помощи обратного преобразования Фурье

$$\varphi'(x, t) = q(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(s, t) e^{-isx} ds \quad (2.8)$$

Отметим, что решение уравнения (2.2) также имеет вид (2.7), только $\bar{K}(s)$ следует заменить функцией $\bar{K}_1(s)$.

Далее, для решения системы интегро-дифференциальных уравнений (1.13) к его обеим частям опять применим преобразование Фурье. Получим

$$\begin{aligned} \bar{K}_{11}(s) \Psi(s, t) + \bar{K}_{12}(s) \Phi(s, t) &= 0 \\ (1 - L_2) \frac{\bar{K}_{21}(s) \Psi(s, t) + \bar{K}_{22}(s) \Phi(s, t)}{E_2^*(t)} &= \\ &= (1 - L_1) \frac{\bar{q}_0(s, t) - 2h_2 \Phi(s, t)}{s^2 A_1 E_1^*(t)} \end{aligned} \quad (2.9)$$

где $\Psi(s, t)$, $\Phi(s, t)$, $\bar{q}_0(s, t)$, $\bar{K}_{ij}(s)$ — трансформанты Фурье соответственно для $p(x, t)$, $\varphi'(x, t)$, $q_0(x, t)$, $K_{ij}(x)$ ($i, j = 1, 2$). Из первого уравнения (2.9) имеем

$$\Psi(s, t) = - \frac{i \operatorname{sign} s}{2p + 1} a_1 \Phi(s, t) = - \frac{\bar{K}_{12}(s)}{\bar{K}_{11}(s)} \Phi(s, t) \quad (2.10)$$

Подставляя выражение $\Psi(s, t)$ из (2.10) в (2.9), после некоторых простых преобразований получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно $\Phi(s, t)$

$$A(s, t) \Phi(s, t) - \int_0^t [A_1 K_1^*(t, u) + A_2(s) K_2^*(t, u)] \Phi(s, u) du = Q_0(s, t) \quad (2.11)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} A_1 &= 2h_1, \quad A_2(s) = \frac{(1 + \nu_2) |s| A_2}{\Delta(s)} \left[(2p + 1) a_2 - \frac{a_1 a_3}{2p + 1} \right] \\ a_1 &= -i(2p + 1) \bar{K}_{12}(s) \operatorname{sign} s / \bar{K}_{11}(s), \quad a_2 = (p + 1) \operatorname{sh} 2\alpha + 2\alpha p \\ a_3 &= (p + 1) (\operatorname{ch} 2\alpha - 1) - 4\alpha^2 p^2 \end{aligned}$$

Если меры ползучести материала струнгера и полосы примем в форме (2.3), то аналогичным образом, как выше, интегральное уравнение (2.11) можно привести к дифференциальному уравнению второго порядка при определенных начальных условиях, решение которого имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi(s, t) &= \Phi(s, \tau_0) + \Phi'(s, \tau_0) \int_{\tau_0}^t e^{-\gamma(s, u)} du + \\ &+ \int_{\tau_0}^t e^{-\gamma(s, u)} du \int_{\tau_0}^u e^{\gamma(s, z)} F(s, z) dz \\ \tilde{\gamma}(s, t) &= \int_{\tau_0}^t \tilde{A}(s, u) du \end{aligned} \quad (2.12)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(s, t)|_{t=\tau_0} &= Q_0(s, \tau_0)/A(s, \tau_0) \\ \Phi'(s, t)|_{t=\tau_0} &= \{Q_0'(s, \tau_0) - \gamma[A_2(s) \varphi_2(\tau_0) + 2h_1 \varphi_1(\tau_0)]\Phi(s, \tau_0)\}/A(s, \tau_0) \\ \tilde{A}(s, t) &= [A'(s, t) + \gamma[A(s, t) + 2h_1 \varphi_1(t + \tau_1) + A_2(s) \varphi_2(t + \tau_2)]]/A(s, t) \\ F(s, t) &= [Q_0'(s, t) + \gamma Q_0(s, t)]/A(s, t) \end{aligned}$$

Функция $\Psi(s, t)$ определяется с помощью (2.10), а решение исходной системы (1.13) будет определяться при помощи обратного преобразования Фурье

$$\begin{aligned} p(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(s, t) e^{-isx} ds \\ q(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(s, t) e^{-isx} ds \end{aligned} \quad (2.13)$$

Следует отметить, что решение системы (1.14) также имеет вид (2.12), только $\bar{K}_{ij}(s)$ нужно заменить функциями $\tilde{K}_{ij}(s)$ ($i, j = 1, 2$).

§ 3. Частные случаи и численный пример

С целью получения более простых результатов рассмотрим некоторые частные случаи.

Рассмотрим частный случай внешней нагрузки, $q_0(x, t) = Q_0 \delta(x) H(t - \tau_0)$, где $\delta(x)$ — функция Дирака, $H(t)$ — единичная функция Хевисайда, то есть в момент времени $t = \tau_0$ к струнгеру прилагается сосредоточенная в начале координат $x = 0$ сила величины Q_0 .

При указанной нагрузке (2.7) примет вид

$$\begin{aligned} \Phi(s, t) &= \\ &= \frac{(1 - \nu_1^2) Q_0}{h E_1(\tau_1) A(s, \tau_0)} \left\{ 1 + \gamma \frac{A_2(s) [E_1(\tau_1) \varphi_1(\tau_1) - E_2(\tau_2) \varphi_2(\tau_2)]}{E_2(\tau_2) A(s, \tau_0)} \int_{\tau_0}^t e^{-\gamma(s, u)} du \right\} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Положим теперь $E_1(t+\rho_1) = E_1 = \text{const}$, $E_2(t+\rho_2) = E_2 = \text{const}$ и $H \rightarrow \infty$. В результате получается соответствующая задача для полуплоскости, решение которой представляется формулой

$$\Phi(s, t) = \frac{\lambda Q_0}{\lambda + |s|} \left\{ 1 + \gamma \frac{|s|}{\lambda + |s|} [E_1 \varphi_1(\tau_1) - E_2 \varphi_2(\tau_2)] \int_{\tau_0}^t e^{-\gamma(s, u)} du \right\}$$

$$\gamma(s, t) = \gamma \int_{\tau_0}^t \left[1 + \frac{\lambda E_1 \varphi_1(u + \rho_1) + |s| E_2 \varphi_2(u + \rho_2)}{\lambda + |s|} \right] du \quad (3.2)$$

$$\lambda = (1 - \nu_1^2) E_2 / 2 (1 - \nu_2^2) E_1 h$$

Формула (3.2) совпадает с результатом Н. Х. Арутюняна [3].

Если деформации ползучести стрингера и полосы, вызванные постоянным напряжением, пропорциональны их упругим деформациям, то есть $E_1(\tau_1) \varphi_1(\tau_1) = E_2(\tau_2) \varphi_2(\tau_2)$, то для контактного напряжения $q(x, t)$ согласно (2.8) и (3.1) получим

$$q(x, t) = \frac{(1 - \nu_1^2) Q_0}{2\pi h E_1(\tau_1)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-isx} ds}{A(s, \tau_0)} \quad (3.3)$$

а из (2.8) и (3.2) получим

$$q(x) = -\frac{\lambda Q_0}{\pi} (\cos \lambda x \operatorname{ci} \lambda x + \sin \lambda x \operatorname{si} \lambda x)$$

$$\lambda = (1 - \nu_1^2) E_2 / 2 (1 - \nu_2^2) E_1 h \quad (3.4)$$

Последнее с точностью коэффициента совпадает с известным решением Мелана [10].

Для функций старения $\varphi_1(u)$ и $\varphi_2(u)$, принимая выражения

$$\varphi_1(u) = C_0 + A_0/u, \quad \varphi_2(u) = \tilde{C}_0 + \tilde{A}_0/u$$

находим, что (3.2) примет вид

$$\Phi(s, t) = \frac{\lambda Q_0}{\lambda + |s|} \left[1 + \gamma |s| \frac{E_1 \varphi_1(\tau_1) - E_2 \varphi_2(\tau_2)}{\lambda + |s|} e^{r\tau_0} \tau_1^{p_1} \tau_2^{p_2} \times \right. \\ \left. \times \int_{\tau_0}^t \frac{e^{-r\tau} d\tau}{(\tau + \rho_1)^{p_1} (\tau + \rho_2)^{p_2}} \right] \quad (3.5)$$

где

$$r = \gamma \left[1 + \frac{\lambda E_1 C_0 + E_2 |s| \tilde{C}_0}{\lambda + |s|} \right], \quad p_1 = \gamma \frac{\lambda E_1 A_0}{\lambda + |s|}, \quad p_2 = \gamma \frac{E_2 |s| \tilde{A}_0}{\lambda + |s|}$$

Из (3.5) и (2.8) после некоторых несложных операций получим

$$q(x, t) = -\frac{\lambda Q_0}{\pi} H(t, \tau_0, \tau_1, \tau_2) [\cos \lambda x \operatorname{ci} \lambda x + \sin \lambda x \operatorname{si} \lambda x] + R(x, t) \quad (3.6)$$

где

$$H(t, \tau_0, \tau_1, \tau_2) = 1 + \gamma [E_1 \bar{\tau}_1(\tau_1) - E_2 \bar{\tau}_2(\tau_2)] \tau_1^{\rho_1} \tau_2^{\rho_2} e^{r_1} r_1^{\rho_1 - 1} \times \\ \times \{ \Phi_0[r_1(t + \rho_1), \rho_0] - \Phi_0(r_1 \tau_2, \rho_0) \}, \quad H(t, \tau_0, \tau_1, \tau_2)|_{t=\tau_0} = 1$$

$r_1 = \gamma(1 + E_2 \bar{C}_0)$, $\rho_0 = \gamma E_2 \bar{A}_0$, $\Phi_0(\zeta, t)$ — неполная гамма-функция, $R(x, t)$ — регулярная функция по x и t , которая имеет вид

$$R(x, t) = \frac{\lambda Q_0}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \gamma [E_1 \bar{\tau}_1(\tau_1) - E_2 \bar{\tau}_2(\tau_2)] \tau_1^{\rho_1} \tau_2^{\rho_2} e^{r_1} \times \right. \\ \times \int_{\tau_1}^t \frac{e^{-u}}{(u + \rho_1)^{\rho_1} (u + \rho_2)^{\rho_2}} - \frac{\lambda + s}{s} [H(t, \tau_0, \tau_1, \tau_2) - 1] \left. \right\} \frac{s \cos sx}{(\lambda + s)^2} ds \\ R(x, t)|_{t=\tau_0} = 0$$

Отметим, что в (3.6) выделена сингулярная часть решения в виде первого слагаемого от регулярной части, описываемой функцией $R(x, t)$. Легко заметить, что при $E_1 \bar{\tau}_1(\tau_1) > E_2 \bar{\tau}_2(\tau_2)$ функция

$$\frac{\lambda Q_0}{\pi} H(t, \tau_0, \tau_1, \tau_2)$$

фактически характеризующая коэффициент интенсивности напряжений в точке $x = 0$, во времени возрастает, а при $E_1 \bar{\tau}_1(\tau_1) < E_2 \bar{\tau}_2(\tau_2)$, наоборот, убывает во времени.

В обсуждаемом частном случае и получены числовые результаты. Для характеристик полуплоскости и стрингера приняты следующие значения [2]:

$$E_1 = E_2 = 2 \cdot 10^5 \text{ (кг/см}^2\text{)}, \quad \nu_1 = \nu_2, \quad h = 0.05 \text{ (см)}$$

$$C_0 = \bar{C}_0 = 0.9 \cdot 10^{-5} \text{ (см}^2\text{/кг)}, \quad A_0 = \bar{A}_0 = 4.82 \cdot 10^{-5} \left(\frac{\text{сутки}}{\text{кг/см}^2} \right)$$

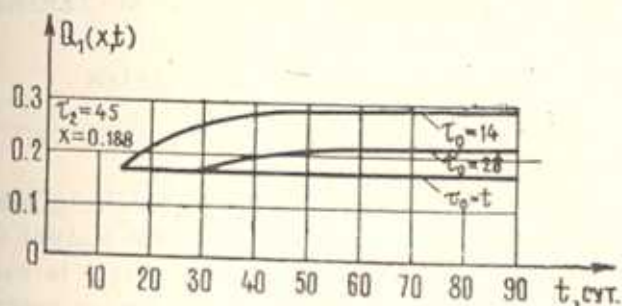
$$\gamma = 0.026 \text{ (сутки}^{-1}\text{)}$$

По формуле (3.6) на ЭВМ «ЕС-1022» были получены значения $q(x, t)$. Построены графики функции $Q_1(x, t) = \frac{\pi q(x, t)}{\lambda Q_0}$ (фиг. 1, 2).

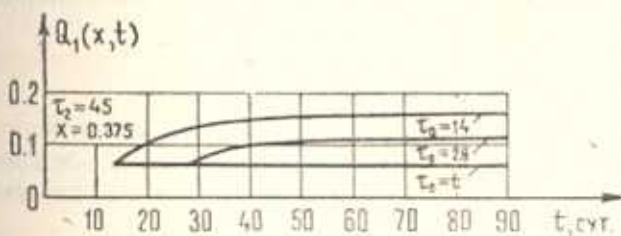
Из приведенных графиков видно, что

1. Учет неоднородного старения приводит к значительному увеличению контактного напряжения.

2. При увеличении координаты x контактное напряжение $q(x, t)$ по сравнению с упругой задачей убывает медленнее.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

3. Чем близки значения возрастов стрингера и полуплоскости, тем меньше значение контактного напряжения и наоборот.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 19 XII 1980

Ս. Ն. ՄԻՐՁՈՅԱՆ, Ս. Մ. ՄԵԻՔԱՐՅԱՆ

ԱՆՎԵՐՋ ՎԵՐԱԳԻՐՆԵՐԻ ԵՎ ՇԵՐՏԵՐԻ ՄԻՋԵՎ ԿՈՆՏԱԿՏԱՑԻՆ
ՓՈՆԱԶԳԻՑՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ԿՆԴԻՐՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ ՆՅՈՒԹԵՐԻ
ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ՆԵՐԱՅՄԱՆ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Անհամաստեղծ ձևերի նյութերի սողքի տեսության [3] շրջանակներում դիտարկված են բարակապատ անվերջ վերադրաներից շերտերին, մասնավորապես կիսահարթություններին, ուժի փոխանցման վերաբերյալ մի քանի հարթ կոնտակտային խնդիրներ: Գիտարկված խնդիրները անհայտ կոնտակտային լարումների նկատմամբ մաթեմատիկորեն ձևակերպված են ինտեգրո-դիֆերենցիալ և Վոլտերայի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարումների տեսքերով: Ստացված են նրանց փակ լուծումները: Բերված է թվային օրինակ:

ON SOME PROBLEMS OF CONTACT INTERACTION BETWEEN INFINITE STRINGERS AND BANDS, TAKING INTO ACCOUNT THE HETEROGENEITY IN AGING MATERIALS

S. E. MIRZOYAN, S. M. MCHITARIAN

S u m m a r y

In terms of the creep theory for heterogeneously aging materials some plane contact problems are considered on transfer of load from infinite thinwalled stringers to bands, to semi-planes in particular. The problems relative to unknown contact stresses are presented as integro-differential equations and those of Volterra of the second kind. The closed solutions thereof are obtained. A numerical example is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. Развитие теории контактных задач в СССР. М., «Наука», 1976.
2. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.—Л., Гостехиздат, 1952.
3. Арутюнян Н. Х. Некоторые задачи теории ползучести для неоднородно стареющих тел. МТТ, 1976, вып. 3.
4. Арутюнян Н. Х. О теории ползучести для неоднородно наследственно-стареющих сред. ДАН СССР, 1976, т. 229, вып. 3.
5. Арутюнян Н. Х. Об уравнениях состояния в нелинейной теории ползучести неоднородно стареющих тел. ДАН СССР, 1976, т. 231, вып. 3.
6. Арутюнян Н. Х. Красная задача теории ползучести для наращиваемого тела. ПММ, 1977, т. 41, вып. 5.
7. Мирзоян С. Е. О построении функций влияния для кусочно-неоднородно наследственно-стареющей полуплоскости. Докл. АН Арм. ССР, 1977, т. 14, № 1.
8. Давтян В. А. О двух задачах кручения усиленного тонким покрытием бесконечного цилиндра в условиях неоднородной ползучести. Докл. АН Арм. ССР, 1979, т. 19, № 1.
9. Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М., Изд. «Наука», 1974.
10. Melan E. Ein Beitrag zur Theorie geschweifter Verbindungen. Ing.-Archiv, 1932, Bd. 3, Heft 2.