ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIV, № 5, 1981 Механика

Е. В. КОВАЛЕНКО

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ОДНОГО ТИПА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Предложен метод исследования интегрального уравнения, к которому приводится ряд квазистатических смешанных задач теории упругости, вязкоупругости и гидромеханики. Особенностью данного уравнения в отличие от ранее рассматривающихся [1] является то, что в левую часть его входят операторы Фредгольма и Вольтерра. Показано, что исходное интегральное уравнение эквивалентно системе трех уравнений (одного однородного и двух неоднородных), а также установлена структура его решения и доказана однозначная разрешимость в определенном классе функций. Приведены примеры приложения рассматриваемого интегрального уравнения к периодическим контактным задачам теории упругости при наличии абразивного износа и к смешанным задачам о тонких полимерных покрытиях.

1. Исследуется интегральное уравнение вида

$$\mu\varphi(x, t) + \int_{-1}^{1} \varphi(\xi, t) K\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi + \int_{0}^{t} \varphi(x, \tau) F(t, \tau)\, d\tau =$$

$$= \pi[\gamma(t) + \beta(t)x - f(x)] \tag{1.1}$$

$$(|x| \leqslant 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant T < \infty, \quad 0 < \lambda, \mu < \infty)$$

$$K(y) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} L(u) e^{iuy} du \quad \left(y = \frac{\xi - x}{\lambda}\right) \tag{1.2}$$

при следующих условиях:

$$P(t) = \int_{-1}^{1} \varphi(x, t)\, dx, \qquad M(t) = \int_{-1}^{1} x\varphi(x, t)\, dx \tag{1.3}$$

Будем считать, что функция $L(u)$ непрерывна, вещественна и четна на действительной оси, а также удовлетворяет соотношениям

$$L(u) > 0 \quad (|u| < \infty), \quad L(u) = A + O(u^2) \quad (u \to 0)$$
$$L(u) = B|u|^{-1}[1 + o(|u|^{-1})] \quad (|u| \to \infty) \tag{1.4}$$

где A, B — положительные постоянные. Предположим еще, что $f(x) \in L_2(-1, 1)$, а $F(t, \tau)$ либо непрерывная функция при $0 \leqslant \tau$, $t \leqslant T < \infty$, либо имеет интегрируемую степенную особенность при $t = \tau$.

Здесь $L_2(-1, 1)$ — пространство суммируемых с квадратом на отрезке $[-1, 1]$ функций с обычной нормой. Ограничения, налагаемые на функции $\gamma(t)$ и $\beta(t)$, будут указаны ниже.

Заметим, что при $t = 0$ интегральное уравнение (1.1), (1.2) принимает известный из теории смешанных задач вид [1]

$$\mu\varphi(x, 0) + \int_{-1}^{1} \varphi(\xi, 0) K\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi = \pi[\gamma(0) + \beta(0)x - f(x)] \quad (1.5)$$

$$(|x| \leqslant 1)$$

Изучим теперь свойства ядра $K(y)$, необходимые в дальнейшем.

Лемма. При $y \to 0$ справедлива оценка $K(y) = O(\ln|y|)$. При $|y| > \varepsilon > 0$ функция $K(y)$ непрерывна.

Доказательство леммы не вызывает затруднений и может быть выполнено с помощью известных теорем из теории интегралов Фурье [2], если воспользоваться асимптотическими формулами (1.4).

Согласно неравенству

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[K\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right)\right]^2 d\xi dx = D^2 < \infty \qquad (D = \text{const}) \qquad (1.6)$$

вытекающему из леммы, докажем теорему.

Теорема 1. Оператор

$$H\varphi = \int_{-1}^{1} \varphi(\xi) K\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi \qquad (0 < \lambda < \infty)$$

является самосопряженным, вполне непрерывным и положительно определенным оператором, действующим из $L_2(-1, 1)$ в $L_2(-1, 1)$.

Первые два утверждения теоремы непосредственно следуют из (1.2) и (1.6). Докажем положительную определенность оператора H. Составим скалярное произведение

$$(\varphi, H\varphi)_{L_2(-1, 1)} = \frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{\infty} L(u\lambda)\,|\Phi(u)|^2\, du$$

$$\Phi(u) = \int_{-1}^{1} \varphi(x) e^{iux} dx$$

В силу первой формулы (1.4) можем утверждать, что $(\varphi, H\varphi)_{L_2(-1, 1)} =$

$=\delta^2>0$ ($\delta=\mathrm{const}$), откуда и следует положительная определенность оператора H.

Перейдем теперь к построению решения исходного интегрального уравнения (1.1) и представим его в форме

$$\varphi(x,\,t)=\varphi_0(x,\,t)+\varphi_1(x,\,t) \tag{1.7}$$

где $\varphi_j(x,\,t)$ $(j=0,\,1)$ определяются, соответственно, из

$$\mu[\varphi_0(x,\,t)-\varphi_0(x,\,0)]+\int\limits_{-1}^{1}[\varphi_0(\xi,\,t)-\varphi_0(\xi,\,0)]K\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)d\xi+$$

$$+\int\limits_0^t\varphi_0(x,\,\tau)F(t,\,\tau)\,d\tau=\pi[\gamma(t)+\beta(t)x-\gamma(0)-\beta(0)x] \tag{1.8}$$

$$\mu[\varphi_1(x,\,t)-\varphi_1(x,\,0)]+\int\limits_{-1}^{1}[\varphi_1(\xi,\,t)-\varphi_1(\xi,\,0)]K\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)d\xi+$$

$$+\int\limits_0^t\varphi_1(x,\,\tau)F(t,\,\tau)\,d\tau=0 \tag{1.9}$$

$$(|x|\leqslant 1,\quad 0\leqslant t\leqslant T<\infty)$$

Нетрудно заметить, что если почленно сложить (1.5), (1.8), (1.9) и воспользоваться представлением (1.7), то придем к исходному интегральному уравнению (1.1).

Изложим теперь алгоритм построения решений (1.8), (1.9), а следовательно, и первоначального уравнения (1.1) в классе функций $L_2(-1,\,1)\times C(0,\,T)$. $C(0,T)$ — пространство непрерывных на отрезке $[0,\,T]$ функций.

2. Пусть $\gamma(t),\,\beta(t)\in C(0,\,T)$. При каждом $t\geqslant 0$ разложим решения $\varphi_j(x,\,t)$ $(j=0,\,1)$ интегральных уравнений (1.8), (1.9) в ряд Фурье по собственным функциям $\{\varphi_k(x)\}$ оператора H

$$\varphi_j(x,\,t)=\sum_{k=1}^{\infty}[a_{2k}^{(j)}(t)\,\varphi_{2k}(x)+a_{2k-1}^{(j)}(t)\,\varphi_{2k-1}(x)] \tag{2.1}$$

$$\alpha_k\int\limits_{-1}^{1}\varphi_k(\xi)\,K\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)d\xi=\varphi_k(x)\quad(|x|\leqslant 1,\quad k\geqslant 1) \tag{2.2}$$

($\varphi_{2k}(x)$, $\varphi_{2k-1}(x)$, соответственно, четные и нечетные функции).

Заметим, что в силу теоремы 1, согласно общей теории самосопряженных, вполне непрерывных, положительно определенных операторов в гильбертовом пространстве [3]: 1) система собственных функций

$\{\varphi_k(x)\}$ $(k \geqslant 1)$ оператора H ортогональна и полна в $L_2(-1, 1)$, 2) все характеристические числа α_k оператора H вещественны, положительны и $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n \leqslant \ldots < \infty$, $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = \infty$.

Подставляя теперь разложения (2.1) в (1.8), (1.9) и приравнивая в полученном соотношении коэффициенты левой и правой частей при собственных функциях оператора H одинакового номера, получим уравнения

$$b_k(t) + \beta_k \int_0^t b_k(\tau) F(t, \tau)\, d\tau = 1 \tag{2.3}$$

$$a_{2k}^{(0)}(t) + \beta_{2k} \int_0^t a_{2k}^{(0)}(\tau) F(t, \tau)\, d\tau = \pi \delta_{2k} \beta_{2k} [\gamma(t) - \gamma(0)] \tag{2.4}$$

$$a_{2k-1}^{(0)}(t) + \beta_{2k-1} \int_0^t a_{2k-1}^{(0)}(\tau) F(t, \tau)\, d\tau = \pi \delta_{2k-1} \beta_{2k-1} [\beta(t) - \beta(0)] \tag{2.5}$$

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{2k} \varphi_{2k}(x), \qquad x = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{2k-1} \varphi_{2k-1}(x)$$

$(k \geqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T < \infty,\ \beta_k = \alpha_k (1 + \mu \alpha_k)^{-1},\ a_k^{(1)}(t) = a_k^{(1)}(0)\, b_k(t))$ которые, согласно условиям, наложенным на $F(t, \tau)$, $\gamma(t)$, $\beta(t)$ однозначно разрешимы в $C(0, T)$ при любых значениях параметров β_k. В (2.4), (2.5) в силу произвола постоянных $a_k^{(0)}(0)$ положено $a_k^{(0)}(0) = 0$.

Не нарушая общности рассуждений, рассмотрим далее четный случай уравнения (1.1) ($f(x)$ — четная функция, $\beta(t) \equiv 0$), имея в виду, что для нечетного случая все может быть проделано аналогично.

Для нахождения собственных функций оператора H воспользуемся методом Ритца [8]. В качестве последовательности координатных элементов возьмем систему ортонормированных полиномов Лежандра

$$\varphi_{2k}(x) = \sum_{m=0}^{N} g_m^{(2k)} P_{2m}^{*}(x), \qquad P_{2m}^{*}(x) = \sqrt{\frac{4m+1}{2}}\, P_{2m}(x) \tag{2.6}$$

Известно [3], что они составляют базис в $L_2(-1, 1)$.

Представляя функцию $K(y)$ в виде

$$K(y) = \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} e_{ij}(\lambda)\, P_{2i}^{*}(\xi)\, P_{2j}^{*}(x) \tag{2.7}$$

и используя интеграл [4]

$$\int_0^1 P_{2n}(x) \cos ux\, dx = (-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{2u}}\, J_{1/2+2n}(u)$$

запишем коэффициенты разложения в (2.7) в форме

$$e_{ij}(\lambda) = (-1)^{i+j}\pi\lambda\sqrt{(4i+1)(4j+1)}\int_0^{\infty} L(u) J_{1/2+2i}\left(\frac{u}{\lambda}\right) J_{1/2+2j}\left(\frac{u}{\lambda}\right) du$$

Подставляя теперь (2.6), (2.7) в (2.2), используя условие ортогональности полиномов Лежандра и приравнивая в полученном соотношении коэффициенты левой и правой частей при многочленах одинакового номера, получим

$$a_{2k}\sum_{m=0}^{N} g_m^{(2k)} e_{jm}(\lambda) = g_j^{(2k)} \qquad (k \geqslant 1, \ \ j = 1, 2, \dots, N) \tag{2.8}$$

Чтобы существовало нетривиальное решение системы (2.8), приравняем нулю ее определитель; придем к уравнению для нахождения первых N характеристических чисел α_{2k} оператора H. Определив α_{2k}, найдем затем $g_m^{(2k)}$, выразив их через $g_0^{(2k)}$

$$g_m^{(2k)} = g_0^{(2k)} h_m^{(2k)} \quad (h_0^{(2k)} = 1) \tag{2.9}$$

В результате получим

$$\varphi_{2k}(x) = g_0^{(2k)}\psi_{2k}(x), \quad \psi_{2k}(x) = \sum_{m=0}^{N} h_m^{(2k)} P_{2m}^{*}(x) \quad (k \geqslant 1) \tag{2.10}$$

Постоянные $g_0^{(2k)}$ в (2.9), (2.10) должны быть подобраны из условия нормировки собственных функций $\varphi_{2k}(x)$ оператора H. Итак, имеем

$$\int_{-1}^{1} \varphi_{2k}(x)\varphi_{2n}(x)\,dx = g_0^{(2k)} g_0^{(2n)} \sum_{m=0}^{N} h_m^{(2k)} h_m^{(2n)} = \delta_k^n \tag{2.11}$$

δ_k^n — символ Кронекера.

После нахождения $g_0^{(2k)}$ из (2.11) будут найдены приближения искомых собственных функций оператора H. Заметим, что согласно теореме 1 процесс Ритца для интегрального уравнения (2.2) будет сходящимся при $N \to \infty$.

Удовлетворим теперь интегральному уравнению (1.5) соответствующим выбором счетного множества постоянных $\alpha_{2k}^{(1)}(0)$ $(k \geqslant 1)$.

Представим $f(x)$ ее рядом Фурье по собственным функциям оператора H

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{2k}\varphi_{2k}(x) \tag{2.12}$$

Подставляя затем

$$\varphi(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{2k}^{(1)}(0)\varphi_{2k}(x)$$

и соотношение (2.12) в уравнение (1.5), используя формулы (2.2) и $\delta_{2k} = \sqrt{2}\, g_0^{(2k)}$, а также приравнивая в полученном выражении коэффициенты левой и правой частей при собственных функциях оператора H одинакового номера, получим

$$a_{2k}^{(1)}(0) = \pi\beta_{2k}[\sqrt{2}\, g_0^{(2k)} \gamma(0) - f_{2k}] \quad (k \geqslant 1) \tag{2.13}$$

После определения $a_{2k}^{(1)}(0)$ из (2.13) будет построена функция $\varphi_1(x, t)$ согласно (2.1) ($j = 1$), а вместе с тем и формальное решение задачи $\varphi(x, t)$ по формуле

$$\varphi(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \{\pi\beta_{2k}[\sqrt{2}\, g_0^{(2k)} \gamma(0) - f_{2k}]\, b_{2k}(t) + a_{2k}^{(0)}(t)\}\, \varphi_{2k}(x) \tag{2.14}$$

Теорема 2. Ряд (2.14) сходится в $L_2(-1, 1)$ равномерно по t на $[0, T]$ при всех $T > 0$ и определяет обобщенное решение [5] уравнения (1.1), если выполнено неравенство

$$\sum_{k=j}^{\infty} \{\pi\beta_{2k}[\sqrt{2}\, g_0^{(2k)} \gamma(0) - f_{2k}]\, b_{2k}(t) + a_{2k}^{0}(t)\}^2 < \varepsilon \quad (j \to \infty) \tag{2.15}$$

Действительно, оценим остаток ряда (2.14)

$$\left\| \sum_{k=j}^{\infty} [a_{2k}^{(1)}(0)\, b_{2k}(t) + a_{2k}^{(0)}(t)]\, \varphi_{2k}(x) \right\|_{L_2(-1,\,1)}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k,\, i=j}^{\infty} [a_{2i}^{(1)}(0)\, b_{2i}(t) + a_{2i}^{(0)}(t)]\, [a_{2k}^{(1)}(0)\, b_{2k}(t) + a_{2k}^{(0)}(t)]\, (\varphi_{2i}, \varphi_{2k})_{L_2(-1,\,1)} =$$

$$= \sum_{k=j}^{\infty} [a_{2k}^{(1)}(0)\, b_{2k}(t) + a^{(0)}(t)]^2$$

Если выполнено неравенство (2.15), то ряд (2.14) сходится в $L_2(-1, 1)$ равномерно по $t \in [0, T]$, $T > 0$ и свойства обобщенного решения (см. [5] стр. 500) выполнены. Теорема доказана.

Заметим, что для проверки неравенства (2.15) необходимо задавать конкретный вид функции $F(t, \tau)$. Это будет проделано дальше.

Отметим также, что из формул (1.3) следует

$$P(t) = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} \{\pi\beta_{2k}[\sqrt{2}\, g_0^{(2k)} \gamma(0) - f_{2k}]\, b_{2k}(t) + a_{2k}^{(0)}(t)\}\, g_0^{(2k)}$$

$$P(0) = \pi\sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{2k}[\sqrt{2}\, g_0^{(2k)} \gamma(0) - f_{2k}]\, g_0^{(2k)}$$

и, таким образом, величина $\gamma(0)$ связана с $P(0)$.

3. Пусть теперь $P(t)$ и $M(t)$ — заданные функции переменной $t \in [0, T]$. В приложениях, как правило, представляет интерес случай $P(t) = P$, $M(t) = M$ (P, M = const), поэтому, не нарушая общности рассуждений, в дальнейшем ограничимся рассмотрением именно этого случая.

Представим функции $\gamma(t)$ и $\beta(t)$ в (1.1) в виде

$$\gamma(t) = \gamma_0(t) + \gamma_1(t), \quad \beta(t) = \beta_0(t) + \beta_1(t) \tag{3.1}$$

и будем по-прежнему искать его решение в форме (1.7). При этом интегральное уравнение (1.5) сохраняет свой вид, а два других (1.8), (1.9) перепишутся следующим образом:

$$\mu[\varphi_j(x, t)-\varphi_j(x, 0)]+\int_{-1}^{1}[\varphi_j(\xi, t)-\varphi_j(\xi, 0)]K\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)d\xi+$$

$$+\int_0^t \varphi_j(x, \tau)F(t, \tau)\,d\tau=\pi[\gamma_j(t)+\beta_j(t)x-\gamma_j(0)-\beta_j(0)x] \qquad (3.2)$$

$$(j=0, 1; \quad |x|\leqslant 1; \quad 0\leqslant t\leqslant T<\infty)$$

Подберем в (3.2) ($j=0$) функции $\gamma_0(t)$ и $\beta_0(t)$ таким образом, чтобы решение его $\varphi_0(x, t)=\varphi_0(x)$ не зависело от t. Очевидно, это можно сделать, положив

$$\int_0^t F(t, \tau)\,d\tau=\gamma_0(t)-\gamma_0(0), \quad \int_0^t F(t, \tau)\,d\tau=\beta_0(t)-\beta_0(0) \qquad (3.3)$$

$$\varphi_0(x)=\pi(C+Ex) \quad (C, E=\mathrm{const})$$

Допустим теперь, что система функций $\{a_k(t)\}$, определяемая из уравнения (2.3), полна в $C(0, T)$ (верхний индекс у $a_k^{(1)}(t)$ будем опускать). Ищем решение уравнения (3.2) ($j=1$) в виде (2.1), полагая $a_k(0)\equiv 1$. Тогда, представляя $\gamma_1(t)$ и $\beta_1(t)$ в форме

$$\gamma_1(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_{2k}a_{2k}(t), \qquad \beta_1(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_{2k-1}a_{2k-1}(t) \qquad (3.4)$$

подставляя (2.1), (3.4) в (3.2) ($j=1$) и учитывая (2.3), получим

$$\alpha_n\int_{-1}^{1}h_n(\xi)K\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)d\xi-h_n(x)=g_n(x) \quad (|x|\leqslant 1; \quad n\geqslant 1) \quad (3.5)$$

$$\varphi_n(x)=\pi\gamma_n\alpha_n h_n(x), \qquad g_n(x)=\begin{cases}1, & n=2m\\ x, & n=2m-1\end{cases}$$

Заметим, что условия (1.3) примут вид

$$P=P_0+\pi\sum_{k=1}^{\infty}P_k\gamma_{2k}\alpha_{2k}a_{2k}(t), \qquad P_0=2\pi C \qquad (3.6)$$

$$M=M_0+\pi\sum_{k=1}^{\infty}M_k\gamma_{2k-1}\alpha_{2k-1}a_{2k-1}(t), \quad M_0=\pi E$$

$$P_k=\int_{-1}^{1}h_{2k}(x)\,dx=0, \qquad M_k=\int_{-1}^{1}xh_{2k-1}(x)\,dx=0 \qquad (k\geqslant 1)$$

Как и выше, рассмотрим далее четный случай уравнения (1.1), имея в виду, что для нечетного случая все может быть проделано аналогично.

Будем искать решение уравнения (3.5) в форме

$$h_{2k}(x) = \sqrt{2} \sum_{m=0}^{\infty} h_m^{(2k)} P_{2m}^*(x) \tag{3.7}$$

Подставляя (3.7), (2.7) ($N \to \infty$) в (3.5), используя свойство ортогональности полиномов Лежандра и приравнивая в полученном соотношении коэффициенты левой и правой частей при многочленах одинакового номера, получим

$$\alpha_{2k} \sum_{m=0}^{\infty} h_m^{(2k)} e_{jm}(\lambda) = h_j^{(2k)} + \delta_0^j \qquad (k \geqslant 1; \quad j = 0, 1, \ldots) \tag{3.8}$$

Согласно неравенству (1.6) можно утверждать, что оператор, стоящий в левой части (3.8), действует из полного пространства квадратично суммируемых последовательностей l_2 в l_2 и является там вполне непрерывным. Таким образом, если основной определитель системы (3.8) Δ отличен от нуля, то к ней применима теорема Гильберта [3] о ее разрешимости.

Кроме того, с учетом (3.7) из (3.6) найдем

$$P_k = 2h_0^{(2k)} = 0, \qquad h_0^{(2k)} = 0 \quad (k \geqslant 1) \tag{3.9}$$

Условие (3.9) служит для определения неизвестных величин α_{2k}. Действительно, из системы (3.8) имеем $h_0^{(2k)} = \Delta_1/\Delta$, где Δ_1 — вспомогательный определитель, получающийся из Δ заменой в нем первой колонны элементами $\{1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots\}$. Определитель Δ_1 — симметричный, поэтому корни его $\alpha = \alpha_{2k}$ $(k \geqslant 1)$ вещественны.

Определив числа α_{2k}, найдем затем из неоднородной системы (3.8) $h_m^{(2k)}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ и, таким образом, построим последовательность функций $\{h_{2k}(x)\}$. Удовлетворим теперь выбором счетного множества постоянных γ_{2k} $(k \geqslant 1)$ интегральному уравнению (1.5). Представляя $f(x)$ в (1.5) в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{2k} P_{2k}^*(x) \tag{3.10}$$

и подставляя (3.10), (2.7) ($N \to \infty$) в (1.5), получим

$$\mu X_{2n} + \sum_{m=0}^{\infty} e_{mn}(\lambda) X_{2m} = \pi[\sqrt{2}\, \delta_0^n \gamma(0) - f_{2n}] \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{3.11}$$

$$X_{2n} = \int_{-1}^{1} \varphi(x, 0) P_{2n}^*(x)\, dx \tag{3.12}$$

Решив бесконечную алгебраическую систему (3.11), из соотношения (3.12) с учетом формулы

$$\varphi(x, 0) = \pi\sqrt{2}\,[CP_0^*(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{2k}\alpha_{2k} \sum_{m=1}^{\infty} h_m^{(2k)} P_{2m}^*(x)]$$

будем иметь

$$X_{2n} = \pi\sqrt{2}\,(C\delta_0^n + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{2k}\alpha_{2k} h_n^{(2k)}) \tag{3.13}$$

Заметим, что в системе (3.11) $\gamma(0)$ можно считать независимым от γ_{2k} $(k \geqslant 1)$, ибо

$$\gamma(0) = \gamma_0(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{2k}$$

Отметим еще, что решения бесконечных алгебраических систем (3.8), (3.11), (3.13) можно получить методом редукции, который для указанных систем тоже можно обосновать.

После их решения функции $\varphi_{2k}(x)$ будут полностью определены, а вместе с ними будет определено и решение задачи $\varphi(x, t)$. Поскольку в ходе решения бесконечных систем (3.11), (3.13) постоянная C выразится через $\gamma(0)$, то постоянную P можно связать с $\gamma(0)$.

4. А. Рассмотрим плоскую контактную задачу теории упругости (плоская деформация) для упругого (G, ν) изотропного слоя толщины h, жестко защемленного по основанию с учетом изнашивания его поверхности, имеющего место при движении цилиндрического штампа ширины $2a$ в направлении своей образующей (зависимость от времени модуля скорости скольжения имеет вид $V = V_0\,|\cos\omega t|$) и при наличии шероховатостей в области контакта [1, 6]. Предполагается, что износ носит абразивный характер, при котором количество удаленного материала пропорционально работе сил трения. Предполагается также, что в процессе изнашивания область контакта не изменяется, штамп не изнашивается, а сила трения связана с контактным давлением законом Кулона. При этом трением в области контакта в направлении, перпендикулярном образующей штампа, при определении упругих деформаций пренебрегаем. Не берем в расчет также инерционные силы, возникающие от движения штампа. Согласно [6, 7] в безразмерных переменных и обозначениях

$$\xi = a\xi', \quad x = ax', \quad \lambda = ha^{-1}, \quad t = a(\pi\varkappa\theta)^{-1}t', \quad \theta = G(1-\nu)^{-1}$$

$$\varkappa = k_1 k_2 V_0, \quad \omega = \pi\varkappa\theta a^{-1}\omega', \quad \mu = a\theta^{-1}\mu', \quad \gamma(t) = a\gamma'(t')$$

$$\beta(t) = \beta'(t'), \quad f(x) = af'(x'), \quad q(\xi, t) = \theta\varphi(\xi', t')$$

$$P(t) = aP'(t'), \quad M(t) = a^2M'(t')$$

(штрихи в дальнейшем опущены), будем иметь уравнение (1.1), в котором $F(t, \tau) = |\cos\omega\tau|$. Здесь $q(x, t)$ — контактное напряжение, возникающее под штампом под действием приложенных к нему силы $P(t)$ и момента $M(t)$, $\gamma(t) + \beta(t)x$ — жесткое перемещение штампа, $f(x)$ — форма его основания, k_1 — коэффициент пропорциональности между работой сил трения и количеством удаленного материала, k_2 — коэффициент трения. При этом в (1.2) следует положить

$$uL(u) = \frac{2\sigma \operatorname{sh} 2u - 4u}{2\sigma \operatorname{ch} 2u + 1 + \sigma^2 + 4u^2} \qquad (\sigma = 3 - 4\nu) \tag{4.1}$$

Решая (2.3), найдем

$$b_i(t) = \exp\left(-\beta_i \int_0^t |\cos \omega\tau|\, d\tau\right) \qquad (i > 1)$$

Предположим, что жесткое перемещение штампа постоянно во времени, то есть $\gamma(t) + \beta(t)x \equiv \gamma_0$ (рассматриваем четный случай) и $f(x) \equiv 0$ (штамп имеет плоское основание). Тогда формула (2.14) принимает вид

$$\varphi(x, t) = \pi\sqrt{2}\,\gamma_0 \sum_{k=1}^{\infty} g_0^{(2k)} \beta_{2k} \varphi_{2k}(x)\, e^{-\beta_{2k}\int_0^t |\cos\omega\tau|\, d\tau} \tag{4.2}$$

Легко проверить, что условие (2.15) выполнено и поэтому ряд (4.2) определяет обобщенное решение задачи.

В случае постоянных усилий, действующих на штамп, будем иметь

$$\begin{gathered} \left.\begin{matrix} \gamma_0(t) - \gamma_0(0) \\ \beta_0(t) - \beta_0(0) \end{matrix}\right\} = \int_0^t |\cos\omega\tau|\, d\tau \\ a_i(t) = \exp\left(-\beta_i \int_0^t |\cos\omega\tau|\, d\tau\right) \end{gathered} \tag{4.3}$$

после чего определим функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x, t)$ по формулам (2.1), (3.3), а вместе с тем построим решение задачи согласно (1.7).

В. Пусть поверхность упругого (G, ν) изотропного слоя толщины h, жестко защемленного по основанию, усилена по всей длине тонким покрытием в виде сцепленного с ней слоя очень малой толщины h^*, физико-механические свойства которого описываются уравнениями [1]

$$v(x, t) = h^* E^{-1}\left[q(x, t) + \int_0^t q(x, \tau) R(t, \tau)\, d\tau\right]$$

$$(|x| \leqslant a, \quad 0 \leqslant t \leqslant T < \infty)$$

где E — мгновенный модуль упругости, $q(x, t)$ — контактное давление (задача о штампе), отличное от нуля при $|x| \leqslant a$, $v(x, t)$ — вертикальное перемещение точек поверхности усиливающего слоя, $R(t, \tau)$ — ядро ползучести (последействия). Предположим, что

$$R(t, \tau) = \chi \frac{e^{-r(t-\tau)}}{(t-\tau)^{\alpha}\Gamma(1-\alpha)} \quad (\chi,\ r,\ \alpha = \mathrm{const}, \quad 0 < \alpha < 1) \qquad (4.4)$$

Тогда в безразмерных переменных и обозначениях, приведенных выше, с учетом

$$t = Ea(\pi h^{*}\theta\chi)^{-1}t', \quad \mu = \pi h^{*}\theta(Ea)^{-1}$$

придем к уравнению (1.1), причем $F(t', \tau') = R(t, \tau)$, (штрих далее опустим), а функция $L(u)$ в представлении ядра (1.2) запишется в форме (4.1). Известно [1], что резольвента ядра (4.4) выражается через дробно-экспоненциальную функцию и имеет вид

$$T(t, \tau) = \chi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{n}(t-\tau)^{n(1-\alpha)-\alpha}}{\Gamma[(1-\alpha)(n+1)]}$$

Тогда непрерывное решение интегрального уравнения (2.3) можно представить

$$b_k(t) = 1 - \frac{\beta_k}{\delta^{\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r\delta)^{n} t^{(1-\alpha)(n+1)}}{\Gamma[1+(1-\alpha)(n+1)]} \qquad (4.5)$$

$$\delta = Ea(\pi h^{*}\theta\chi)^{-1}$$

Предположим далее, как и ранее, $\gamma(t) + \beta(t)x \equiv \gamma_0$, $f(x) \equiv 0$. Тогда перепишем формулу (4.2) в форме

$$\varphi(x, t) = \pi\sqrt{2}\,\gamma_0 \sum_{k=1}^{\infty} g_0^{(2k)} b_{2k}(t)\,\varphi_{2k}(x) \qquad (4.6)$$

где $b_{2k}(t)$ даются формулой (4.5). В силу того, что $g_0^{(2k)}$ — коэффициенты разложения единицы в ряд Фурье по полной в L_2 $(-1, 1)$ системе функций $\{\varphi_n(x)\}$ условие (2.15) выполнено. Тогда ряд (4.6) представляет собой обобщенное решение поставленной задачи.

В случае постоянных усилий, приложенных к штампу, определим

$$\left.\begin{matrix}\gamma_0(t) - \gamma_0(0) \\ \beta_0(t) - \beta_0(0)\end{matrix}\right\} = \frac{r^{\alpha}}{\delta\Gamma(1-\alpha)}\,\gamma(1-\alpha,\ r\delta t)$$

где $\gamma(x, y)$ — неполная гамма-функция, после чего найдем функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x, t)$ согласно (2.1), (3.3), (4.5), а вместе с тем построим решение задачи по формуле (1.7).

Автор выражает благодарность В. М. Александрову за внимание к работе и советы.

Институт проблем
механики АН СССР

Поступила 13 VI 1980

Ե. Վ. ԿՈՎԱԼԵՆԿՈ

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ՄԻ ԴԱՍԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄՈՏԱՎՈՐ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Առաջարկվում է ինտեգրալ հավասարումը ուսումնասիրելու եղանակ, այդ հավասարմանն են բերվում առաձգականության տեսության, մածուցիկ-առաձգականության և հիդրոմեխանիկայի մի շարք կվազիստատիկ խառը խնդիրներ։ Տվյալ հավասարման եզակիությունը հանդիսանում է նրանում, որ նրա ձախ մասում մտնում են Ֆրեդհոլմի և Վոլտերայի օպերատորները։ Ցույց է տրվում, որ սկզբնական ինտեգրալ հավասարումը համարժեք է երեք հավասարումներից բաղկացած սիստեմին (մեկ համասեռ և երկու անհամասեռ)։ Որոշվել է նաև այդ հավասարման լուծման կառուցվածքը և ապացուցվել է նրա միարժեք լուծելիությունը ֆունկցիաների որոշակի դասում։ Բերվում են դիտարկվող ինտեգրալ հավասարման կիրառման օրինակներ առաձգականության տեսության պարբերական կոնտակտային խնդիրների լուծման համար երբ առկա է հղկիչ-մաշվածությունը և խառը խնդիրների համար բարակ պոլիմերային ծածկույթների վերաբերյալ։

ON APPROXIMATE SOLUTION OF ONE TYPE OF INTEGRAL EQUATIONS IN THE THEORY OF ELASTICITY AND MATHEMATICAL PHYSICS

E. V. KOVALENKO

S u m m a r y

A method to examine an integral equation is suggested, to which a number of quasi-state mixed problems in the theory of elasticiy, viscoelasticity and hydromechanics are reduced. The piculiarity of the given equation lies in the fact that Fredholm's and Volterra's operators enter the left side of the equation. The initial integral equation is shown to be equivalent to the system of three equations (one homogeneous and two non-homogeneous), as well as the structure of its solution is found and a single-valued solvability in a certain class of functions is proved. The examples of application of the examined integral equations to the recurring contact problems in the theory of elasticity under abradant wear and to the mixed problems on thin polymer covers are presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. Развитие теории контактных задач в СССР. М., «Наука», 1976.
2. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
3. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М., «Наука», 1977.
4. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., ГИФМЛ, 1963.
5. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М., «Наука», 1976.
6. *Коваленко Е. В.* Об эффективном методе решения контактных задач для линейно-деформируемого основания с тонким усиливающим покрытием. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1979, т. 32, № 2.
7. *Александров В. М., Галин Л. А., Пириев Н. П.* Плоская контактная задача при наличии износа для упругого слоя большой толщины. Изв. АН СССР, МТТ, 1978, № 4.
8. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М., «Наука», 1970.