ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXIV, № 5, 1981 Механика

Р. Е. МКРТЧЯН

ЗАДАЧА БОЛЬШИХ УПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЙ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ИЗГИБА ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА ИЗ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОГО МАТЕРИАЛА

В связи с расширением области применения резины и различных пластмасс в технике за последние 30 лет теория больших упругих деформаций быстро развилась и приобрела довольно компактную форму. Больших успехов достигла эта теория в области исследования идеально-упругого несжимаемого материала, что обусловливается широким применением вулканизированной резины и сравнительной простотой поставленных проблем.

Однако, несмотря на обилие точных и приближенных общих решений различных важных проблем, которые в какой-то мере опираются на физические законы между напряжениями и деформациями, сами эти законы невозможно считать достаточно исследованными для широкого диапазона деформаций многих сжимаемых материалов, допускающих большие упругие деформации. Например, конкретные выражения потенциальной энергии для сжимаемых упругих материалов известны только в рамках теории упругости второго и третьего порядка [1, 2]. Этот факт, по-видимому, связан со сложностью экспериментов, которые должны охватывать весь диапазон деформаций.

В связи с этим в работе [3] предлагается кусочно-линейный закон связи между напряжениями и деформациями, который опирается на ограниченное число экспериментальных данных, необязательно охватывающих весь диапазон деформаций, или на заранее известный закон. Суть этого закона заключается в том, что непрерывная функция, связывающая напряжения с деформациями, аппроксимируется дискретной моделью, представляющей собой множество значений указанной функции в некотором конечном числе точек области ее определения в совокупности с кусочно-линейными аппроксимациями этой функции на некотором конечном числе подобластей.

В настоящей работе определяются упругие постоянные для упругого сжимаемого материала при кусочно-линейном законе связи между напряжениями и деформациями при больших деформациях и приводится пример составления каталога для этих постоянных. Рассматривается задача цилиндрического изгиба прямоугольного параллелепипеда. Получены простые соотношения для определения деформированного и напряженного состояний. В качестве численного примера решается задача изгиба параллелепипеда в круглую цилиндрическую трубу.

§ 1. В практически возможном диапазоне деформаций данного упругого сжимаемого материала по главным направлениям деформаций фиксируется конечное число узловых точек с идентификационным номером (α, β, γ), характеризующихся главными удлинениями $\lambda^{(\alpha)}, \lambda^{(\beta)}, \lambda^{(\gamma)}$, которые определяются [3]

$$\lambda^{(\delta)} = (1 + e \operatorname{sign} \delta)^{2|\delta|}$$

$$(\delta = -m, \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots, n)$$

где m и n — натуральные числа, e — малая величина, квадратами и высшими степенями которой в условиях поставленной задачи можно пренебречь относительно e. Диапазон деформаций разделяется на то же число подобластей с теми же идентификационными номерами (α, β, γ), так что

$$1 - e \leqslant \frac{\lambda_1}{\lambda^{(\alpha)}}, \quad \frac{\lambda_2}{\lambda^{(\beta)}}, \quad \frac{\lambda_3}{\lambda^{(\gamma)}} \leqslant 1 + e \tag{1.1}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — главные удлинения, соответствующие подобласти (α, β, γ).

В узловых точках даются главные значения напряжений, которые находятся экспериментальным, либо теоретическим путем (если известен закон состояния данного материала), и называются глобальными напряжениями. Затем на основании глобальных напряжений строится кусочно-линейный закон связи между напряжениями и деформациями, так что в каждой подобласти (α, β, γ) напряжения определяются следующими простыми выражениями [3]:

$$\sigma_i^{(\alpha, \beta, \gamma)} = B_i^{(\alpha, \beta, \gamma)} + b_{ij}^{(\alpha, \beta, \gamma)} e_j \tag{1.2}$$

где $B_i^{(\alpha, \beta, \gamma)}$ — глобальные напряжения подобласти (α, β, γ), $b_{ij}^{(\alpha, \beta, \gamma)}$ — упругие постоянные, которые определяются выражениями

$$b_{i1}^{(\alpha, \beta, \gamma)} = \frac{\operatorname{sign} \alpha}{e} \left(2 \sum_{k=0}^{\alpha} (-1)^k B_i^{(\alpha-k, \beta, \gamma)} - B_i^{(\alpha, \beta, \gamma)} - (-1)^\alpha B_i^{(0, \beta, \gamma)} \right) +$$
$$+ (-1)^\alpha (\lambda_0 + 2\delta_{i1}\mu_0)$$

$$b_{i2}^{(\alpha, \beta, \gamma)} = \frac{\operatorname{sign} \beta}{e} \left(2 \sum_{k=0}^{\beta} (-1)^k B_i^{(\alpha, \beta-k, \gamma)} - B_i^{(\alpha, \beta, \gamma)} - (-1)^\beta B_i^{(\alpha, 0, \gamma)} \right) +$$
$$+ (-1)^\beta (\lambda_0 + 2\delta_{i2}\mu_0) \tag{1.3}$$

$$b_{i3}^{(\alpha, \beta, \gamma)} = \frac{\operatorname{sign} \gamma}{e} \left(2 \sum_{k=0}^{\gamma} (-1)^k B_i^{(\alpha, \beta, \gamma-k)} - B_i^{(\alpha, \beta, \gamma)} - (-1)^\gamma B_i^{(\alpha, \beta, 0)} \right) +$$
$$+ (-1)^\gamma (\lambda_0 + 2\delta_{i3}\mu_0)$$

где δ_{ij} — символы Кронекера. Для фиксированных значений (α, β, γ) имеем

$$B_1^{(\alpha, \beta, \gamma)} = B_1^{(\alpha, \gamma, \beta)} = B_2^{(\beta, \alpha, \gamma)} = B_2^{(\gamma, \alpha, \beta)} = B_3^{(\beta, \gamma, \alpha)} = B_3^{(\gamma, \beta, \alpha)}$$

Из (1.3) вытекает

$$b_{i1}^{(0,\beta,\gamma)}=\lambda_0+2\delta_{i1}\mu_0,\quad b_{i2}^{(\alpha,0,\gamma)}=\lambda_0+2\delta_{i2}\mu_0,\quad b_{i3}^{(\alpha,\beta,0)}=\lambda_0+2\delta_{i3}\mu_0 \tag{1.4}$$

Выражения (1.3) и (1.4) позволяют для исследуемых конкретных материалов составить каталоги определения упругих постоянных $b_{ij}^{(\alpha,\beta,\gamma)}$. Для иллюстрации в табл. 1 приводится пример составления каталога, где при определении глобальных напряжений $B_i^{(\alpha,\beta,\gamma)}$ использованы формула Мурнагана с коэффициентами, соответствующими полистиролу [1, 2], и решение задачи однородного растяжения упругого изотропного тела при больших деформациях [4].

Приведенные в табл. 1 постоянные соответствуют выбранной нумерации главных направлений. При ином выборе нумерации индексы постоянных $B_i^{(\alpha,\beta,\gamma)}$ и $b_{ij}^{(\alpha,\beta,\gamma)}$ меняются соответствующим образом. Например, если в таблице даны значения постоянных, соответствующие подобласти с номером (α, β, γ), то для подобласти (β, α, γ), где α, β, γ — фиксированные числа, они определяются следующим образом:

$$B_1^{(\beta,\alpha,\gamma)}=B_2^{(\alpha,\beta,\gamma)},\quad B_2^{(\beta,\alpha,\gamma)}=B_1^{(\alpha,\beta,\gamma)},\quad B_3^{(\beta,\alpha,\gamma)}=B_3^{(\alpha,\beta,\gamma)}$$

$$b_{11}^{(\beta,\alpha,\gamma)}=b_{22}^{(\alpha,\beta,\gamma)},\quad b_{12}^{(\beta,\alpha,\gamma)}=b_{21}^{(\alpha,\beta,\gamma)},\quad b_{13}^{(\beta,\alpha,\gamma)}=b_{23}^{(\alpha,\beta,\gamma)} \text{ и т. д.}$$

Рассматриваемый кусочно-линейный закон позволяет:

1. Получить конкретные выражения физической связи между напряжениями и деформациями для упругих сжимаемых материалов, допускающие деформации, выходящие за пределы теории упругости второго или третьего порядка.

2. Упростить соотношения теории упругости с помощью ввода простого линейного физического закона.

3. Для определения упругих постоянных использовать известные физические законы или экспериментальные данные, необязательно охватывающие весь диапазон деформаций, что позволяет исходить из имеющихся возможностей.

§ 2. Предположим, что упругий прямоугольный параллелепипед в системе прямоугольных декартовых координат (X_1, X_2, X_3) занимает область

$$X_1 = a_1, \qquad X_1 = a_2 = a_1 + h$$

$$X_2 = \pm b, \quad X_3 = \pm c$$

Пусть параллелепипед деформируется в цилиндрическую панель, которая в цилиндрических координатах (r, θ, z) определяется выражениями

$$r = r(X_1), \qquad \theta = \frac{X_2}{\lambda k}, \qquad z = \lambda X_3 \tag{2.1}$$

где λ — постоянный коэффициент растяжения в направлении X_3, k — постоянная.

…ՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
…ՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
…ԱԴԵՄԻԱՅԻ
…ՂԵԿԱԳԻՐ

…ЗВЕСТИЯ
…АДЕМИИ НАУК
…МЯНСКОЙ ССР

ISSN 0002—3051

Таблица 1

№ п/п	№ подобласти	№ главн. направ. i	Главные удлинен. λ_i	Глобальн. напряж. B_i 10^{-3} н/см²	Коэффициенты b_{ij} 10^{-3} н/см²		
					b_{i1}	b_{i2}	b_{i3}
1	0, 0, 0	1 2 3	1 1 1	0 0 0	27 14 14	14 27 14	14 14 27
2	1, 0, 0	1 2 3	1.21 1 1	5.0 4.4 4.4	23 30 30	14 27 14	14 14 27
3	2, 0, 0	1 2 3	1.4641 1 1	12.0 9.0 9.0	47 16 16	14 27 14	14 14 27
4	—1, 0, 0	1 2 3	0.81 1 1	— 3.0 — 2.4 — 2.4	3 10 10	14 27 14	14 14 27
5	—2, 0, 0	1 2 3	0.6561 1 1	— 7.9 — 7.0 — 7.0	46 36 36	14 27 14	14 14 27
6	0, 1, 1	1 2 3	1 1.21 1.21	6.4 10.6 10.6	27 14 14	6 35 42	6 42 35
7	0, 1, 2	1 2 3	1 1.21 1.4641	10.6 15.0 16.5	27 14 14	2 33 31	36 2 24
8	0, —1, —1	1 2 3	1 0.81 0.81	— 4.9 — 6.4 — 6.4	27 14 14	11 13 20	11 20 13
9	0, —1, —2	1 2 3	1 0.81 0.6561	— 9.2 —10.5 —11.5	27 14 14	8 8 22	32 21 38
10	0, 1, —1	1 2 3	1 1.21 0.81	0.8 1.4 — 0.3	27 14 14	18 11 13	22 22 20
11	0, 1, —2	1 2 3	1 1.21 0.6561	— 3.0 — 2.4 — 2.4	27 14 14	26 19 10	16 16 30
12	0, 2, —1	1 2 3	1 1.4641 0.81	5.0 9.0 2.9	27 14 14	24 65 21	26 16 34
13	1, 1, —1	1 2 3	1.21 1.21 0.81	6.3 6.3 2.7	28 35 16	35 28 16	29 29 10
14	1, 1, —2	1 2 3	1.21 1.21 0.6561	2.2 2.2 — 1.0	25 32 31	32 25 31	12 12 27
15	—1, —1, 1	1 2 3	0.81 0.81 1.21	— 3.4 — 3.4 — 1.7	15 17 17	17 15 17	16 16 5
16	—1, —1, 2	1 2 3	0.81 0.81 1.4641	1.0 1.0 5.4	13 5 22	5 13 22	28 28 66
17	—1, 1, 2	1 2 3	0.81 1.21 1.4641	6.1 12.1 14.4	18 15 7	18 44 40	18 23 53

Тензор деформации γ_{ij} и главные удлинения деформации λ_i определяются следующими выражениями [5]

$$\gamma_{11}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{(r')^2}\right),\quad \gamma_{22}=\frac{1}{2}(r^2-\lambda^2k^2),\quad \gamma_{33}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

$$\gamma_{12}=\gamma_{23}=\gamma_{31}=0,\quad r'=\frac{dr(X_1)}{dX_1} \tag{2.2}$$

$$\lambda_1=r',\quad \lambda_2=\frac{r}{\lambda k},\quad \lambda_3=\lambda \tag{2.3}$$

Если в какой-то точке деформированного тела λ_i находится в пределах

$$\begin{aligned}\lambda^{(\alpha)}(1-e)&\leqslant\lambda_1\leqslant\lambda^{(\alpha)}(1+e)\\ \lambda^{(\beta)}(1-e)&\leqslant\lambda_2\leqslant\lambda^{(\beta)}(1+e)\\ \lambda^{(\gamma)}(1-e)&\leqslant\lambda_3\leqslant\lambda^{(\gamma)}(1+e)\end{aligned} \tag{2.4}$$

то деформированное состояние в этой точке соответствует подобласти $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$. Тогда относительные удлинения e_i, соответствующие этой подобласти, выражаются следующим образом:

$$\begin{gathered}e_1=\frac{\lambda_1}{\lambda^{(\alpha)}}-1=\frac{r'}{\lambda^{(\alpha)}}-1,\qquad e_2=\frac{\lambda_2}{\lambda^{(\beta)}}-1=\frac{r}{\lambda^{(\beta)}k\lambda}-1\\ e_3=\frac{\lambda}{\lambda^{(\gamma)}}-1,\ \text{причем}\ -e\leqslant e_1,\ e_2,\ e_3\leqslant e\end{gathered} \tag{2.5}$$

Подставляя эти значения e_i в (1.2), можно найти выражения физических компонентов напряжений в виде

$$\begin{gathered}\sigma_i=\frac{b_{i1}}{\lambda^{(\alpha)}}r'+\frac{b_{i2}}{\lambda^{(\beta)}k\lambda}r+\frac{b_{i3}}{\lambda^{(\gamma)}}\lambda+D_i\\ D_i=B_i-b_{i1}-b_{i2}-b_{i3}\end{gathered} \tag{2.6}$$

где, для упрощения, идентификационные метки $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ опущены.

Подставляя соответствующие значения σ_i из (2.6) в уравнение равновесия

$$\frac{d\sigma_1}{dr}+\frac{\sigma_1-\sigma_2}{r}=0 \tag{2.7}$$

и принимая во внимание, что $\dfrac{d}{dr}=\dfrac{1}{r'}\dfrac{d}{dX_1}$, можно найти

$$rr''+A_1(r')^2+A_2r'+A_3r'r=0 \tag{2.8}$$

где

$$A_1 = \frac{b_{11} - b_{21}}{b_{11}}$$

$$A_2 = \frac{\lambda^{(\alpha)}}{b_{11}} \left((b_{13} - b_{23}) \frac{\lambda}{\lambda^{(\gamma)}} + B_1 - B_2 - b_{11} + b_{21} - b_{12} + b_{22} - b_{13} + b_{23} \right)$$

$$A_3 = \frac{\lambda^{(\alpha)}}{\lambda^{(\beta)} k \lambda} \frac{2b_{12} - b_{22}}{b_{11}}, \quad r'' = \frac{d^2 r(X_1)}{dX_1} \tag{2.9}$$

После разрешения уравнения (2.8) относительно r' получается

$$r' = cr^{-A_1} - A_4 r - A_5 \tag{2.10}$$

откуда

$$X_1(r) = \int \frac{dr}{cr^{-A_1} - A_4 r - A_5} + c_1$$

где

$$A_4 = \frac{A_2}{A_1 + 1}, \quad A_5 = \frac{A_3}{A_1} \tag{2.11}$$

c и c_1 — постоянные интегрирования.

Таким образом, задача определения деформированного состояния (нахождения функции $r(X_1)$) в подобласти (α, β, γ) приводится к решению уравнения (2.10) с соответствующими граничными условиями (значения r и r') в одной из границ подобласти (α, β, γ).

Если известны конкретные граничные условия деформированного тела, то задача решается последовательным определением деформированных состояний и границ получившихся подобластей, начиная с той граничной цилиндрической поверхности панели, где известны значения $r = r'$ и нормального давления $\sigma_1 = P_1$. При этом выбор номера первой подобласти (α, β, γ) производится следующим образом. Для граничной точки этой подобласти по формуле (2.3) вычисляются значения λ_2 и λ_3 и с помощью выражений (2.4) определяются $\lambda^{(\beta)}$ и $\lambda^{(\gamma)}$. Потом, принимая какое-то ориентировочное значение для $\lambda^{(\alpha)}$, по формуле (2.6), соответствующей принятой подобласти (α, β, γ), вычисляется значение $r' = \lambda_1$ для граничной точки первой подобласти. Если найденное значение λ_1 соответствует принятому значению $\lambda^{(\alpha)}$, то есть выполняется условие $\lambda^{(\alpha)}(1 - e) \leqslant \lambda_1 < \lambda^{(\alpha)}(1 + e)$, то выбранный номер подобласти (α, β, γ) правильный. В противном случае исправляется принятое значение $\lambda^{(\alpha)}$ и повторяются указанные действия для доказательства правильности выбора первой зоны.

Напряженное состояние определяется с помощью (2.6).

Решение задачи иллюстрируется в следующем пункте на численном примере.

3. Пусть прямоугольный параллелепипед из упругого изотропного материала, который при применении кусочно-линейного закона характери-

зуется упругими постоянными, приведенными в табл. 1, в системе прямоугольных декартовых координат (X_1, X_2, X_3) определяется

$$X_1 = a_1 = 0, \qquad X_1 = a_2 = 10 \text{ см}$$
$$X_2 = \pm b = \pm 50 \text{ см}, \quad X_3 = \pm c = \pm 50 \text{ см}$$

Параллелепипед деформируется в круглую цилиндрическую трубу с внутренним радиусом $r_1 = 12$ *см*, на внутренней цилиндрической поверхности которой действует нормальное давление $P_1 = 1000$ *н/см*^{2} и в направлении своей оси труба растягивается с коэффициентом растяжения $\lambda = 1.21$.

Выражения физических компонентов напряжений (2.6) принимают следующий вид:

$$\sigma_i = \frac{b_{i1}}{\lambda^{(\alpha)}} r' + \frac{b_{i2} r}{15.9155 \lambda^{(\beta)}} + D_i \tag{3.1}$$
$$D_i = B_i - b_{i1} - b_{i2}$$

Здесь подставлены значения $\lambda^{(\gamma)} = \lambda^{(1)} = \lambda = 1.21$, $\lambda k = 15.91555$ (последнее вычисляется из второго выражения (2.1) при значениях $X_2 = 50$ *см* и $\theta = \pi$).

Для определения номера первой подобласти, которая начинается с внутренней поверхности трубы ($r_1 = 12$ *см*), для точки этой поверхности из (2.3) вычисляется $\lambda_2 = r/\lambda k = 0.75398$. Следовательно, $\lambda^{(\beta)} = \lambda^{(-1)} = 0.81$, так как выполняется условие $(1-0.1)\,0.81 \leqslant 0.75398 \leqslant (1+0.1)0.81$. Принимая, что $\lambda^{(\alpha)} = 1$ и что первой подобласти соответствует номер $(0, -1, 1)$, согласно табл. 1 берутся следующие постоянные:

$$\begin{array}{llll} B_1 = 0.8 & b_{11} = 27 & b_{12} = 22 & b_{13} = 18 \\ B_2 = -0.3 & b_{21} = 14 & b_{22} = 20 & b_{23} = 13 \\ B_3 = 1.4 & b_{31} = 14 & b_{32} = 22 & b_{33} = 11 \end{array} \tag{3.2}$$

умноженные на 10^{-3} *н/см*^{2}.

Подставляя эти значения в (3.1), можно найти

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 27000\, r' + 1706.54\, r - 48200 \\ \sigma_2 &= 14000\, r' + 1551.40\, r - 34300 \\ \sigma_3 &= 14000\, r' + 1706.54\, r - 34600 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Подставляя в первое уравнение (3.3) $r = 12$ *см* и $\sigma_1 = -P_1 = -1000$ *н/см*^{2}, находим $\lambda_1 = r'|_{X_1=0} = 0.989686$, а этому значению соответствует $\lambda^{(\alpha)} = 1$. Следовательно, выбранный номер $(0, -1, 1)$ для первой зоны правильный. Тогда уравнение (2.10) принимает следующий вид:

$$r' - c r^{-0.48148} + 0.046542\, r - 1.06924 = 0 \tag{3.4}$$

Здесь подставлены значения постоянных $A_3 = 0.48148$, $A_4 = 0.046542$, $A_5 = -1.06924$, которые вычисляются из (2.9) и (2.10). Постоянная $c = 1.58451$ вычисляется из условия $r' = 0.989686$ при $r = 12$ *см*.

Затем, принимая во внимание, что $r = 12$ *см* при $X_1 = 0$, численным методом интегрируется уравнение (3.4) по X_1 до получения таких значений r и r', которые являются граничными для зоны (0, —1, 1). Результаты вычислений приведены в табл. 2. На основании (2.3) и (2.4) вычисляются граничные значения для λ_1 и λ_2: для подобласти (0, —1, 1) граничным является значение $r' = \lambda_1 = \lambda^{(\alpha)} \ (1-\varepsilon) = 1-0.1 = 0.9$, после чего начинается другая подобласть с номером (—1, —1, 1).

Заметим, что в табл. 2, для упрощения составления таблицы, границы подобластей незначительно смещены. Например, подобласть (—1, —1, 1) начинается со значения $r' = 0.89857$ вместо $r' = 0.9$. Такие очень малые отклонения при выборе границ областей несущественно влияют на результаты вычислений и при условиях приближенности применяемого физического закона вполне допустимы.

Из табл. 1, определяя упругие постоянные и проведя соответствующие вычисления для подобласти (—1, —1, 1), можно получить

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 18518.50\,r' + 1318.70\,r - 35400 \\ \sigma_2 &= 20987.65\,r' + 1163.55\,r - 35400 \\ \sigma_3 &= 20987.65\,r' + 1318.70\,r - 35700 \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$r' - 1.507274\,r^{0.13333} - 0.091831\,r = 0 \tag{3.6}$$

причем при $X_1 = 1.5$ *см*, $r = 13.4191$ *см*.

Поступая аналогичным образом, интегрируем уравнение (3.6) до границы зон (—1, —1, 1) и (—1, 0, 1), где λ_2 достигает своего предельного значения $\lambda_2 = 0.9$ и $r = \lambda_2 k \lambda = 14.3240$ *см*. Для подобласти (—1, 0, 1) получаем

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 24691.40\,r' + \ \ 879.65\,r - 34300 \\ \sigma_2 &= 27160.50\,r' + 1696.46\,r - 48200 \\ \sigma_3 &= 27160.50\,r' + \ \ 879.65\,r - 34600 \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$r' - 3.645\,r^{0.1} + 0.002827\,r - 5.6295 = 0 \tag{3.8}$$

при $X_1 = 2.6$ *см*, $r = 14.37313$ *см*.

В подобласти (—1, 0, 1) λ_1 и λ_2 почти в одном месте достигают своих предельных значений $\lambda_1 = r' = 0.729$ и $\lambda_2 = 0.729$, ($r = 17.507$), и поэтому после подобласти (—1, 0, 1) сразу начинается подобласть (—2, 1, 1), для которой

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 41152.26\,r' + 1609.74\,r - 59000 \\ \sigma_2 &= 18289.89\,r' + 1298.18\,r - 34800 \\ \sigma_3 &= 18289.89\,r' + 1661.67\,r - 41800 \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$r' - 0.95024\,r^{-0.55555} + 0.030013\,r - 1.05851 = 0$$

при $X_1 = 6.6$ *см*, $r = 17.4845$ *см*.

Напряжения определяются из выражений (3.3), (3.5), (3.7) и (3.9).

Из табл. 2 определяются нормальное давление $P_2 = 574.3$ $н/см^2$, действующее на внешней цилиндрической поверхности $r = 19.8177$ $см$, и результирующая сила $N = 9303$ $н$, действующая на торцевых плоскостях трубы.

Таблица 2

№ подобл.	X_1 *см*	r *см*	r'	Напряжения в 10^{-3} $н/см^2$		
				σ_1	σ_2	σ_3
	0.0	12.00000	0.98970	−1.00000	−1.82740	−0.26620
	0.2	12.19730	0.97678	−1.01225	−1.70219	−0.11038
	0.4	12.39201	0.96411	−1.02206	−1.57750	0.04450
	0.6	12.58420	0.95168	−1.02970	−1.45335	0.19846
0, −1, 1	0.8	12.77393	0.93949	−1.03506	−1.32966	0.35157
	1.0	12.96122	0.92753	−1.03837	−1.20654	0.50374
	1.2	13.14614	0.91579	−1.03978	−1.08402	0.69495
	1.4	13.32870	0.90426	−1.03955	−0.96221	0.80507
	1.5	13.41910	0.89857	−1.03891	−0.90163	0.87967
	1.5	13.41910	0.89857	−1.06410	−0.92805	0.85460
	1.6	13.50895	0.89221	−1.06340	−0.95700	0.83960
	1.8	13.68676	0.87960	−1.06240	−1.01480	0.80942
−1, −1, 1	2.0	13.86206	0.86713	−1.06210	−1.07250	0.77887
	2.2	14.03486	0.85480	−1.06260	−1.13024	0.74797
	2.4	14.20521	0.84261	−1.06370	−1.18788	0.71677
	2.6	14.37313	0.83055	−1.06560	−1.24560	0.68510
	2.6	14.37313	0.83055	−1.14923	−1.25841	0.60147
	2.8	14.53894	0.82463	−1.14882	−1.13774	0.58680
	3.0	14.70357	0.81879	−1.14220	−1.01706	0.57307
	3.2	14.86704	0.81305	−1.14601	−0.89550	0.56110
	3.4	15.02937	0.80741	−1.14263	−0.77347	0.55054
	3.6	15.19057	0.80187	−1.13818	−0.65109	0.54125
	3.8	15.35065	0.79638	−1.13237	−0.52802	0.53357
	4.0	15.50967	0.79099	−1.12542	−0.40447	0.52723
−1, 0, 1	4.2	15.66760	0.78568	−1.11767	−0.28084	0.52185
	4.4	15.82447	0.78046	−1.10856	−0.15649	0.51808
	4.6	15.98031	0.77531	−1.09863	−0.03198	0.51530
	4.8	16.13511	0.77022	−1.08813	0.09240	0.51323
	5.0	16.28891	0.76522	−1.07629	0.21751	0.51273
	5.2	16.44170	0.76029	−1.06351	0.34293	0.51335
	5.4	16.59351	0.75543	−1.05006	0.46836	0.51479
	5.6	16.74436	0.75063	−1.03588	0.59392	0.51712
	5.8	16.89425	0.74590	−1.02081	0.71973	0.52052
	6.0	17.04319	0.74123	−1.00508	0.84554	0.52472
	6.2	17.19121	0.73663	−0.98846	0.97176	0.52998
	6.4	17.33830	0.73209	−0.97117	1.09800	0.53607
	6.6	17.48450	0.72760	−0.95337	1.22412	0.54278
	6.6	17.48450	0.72760	−0.91209	1.20618	0.56180
	6.8	17.62975	0.72235	−0.89432	1.29872	0.70714
	7.0	17.77395	0.71716	−0.87578	1.39100	0.85183
	7.2	17.91713	0.71004	−0.85697	1.48250	0.99290
	7.4	18.05928	0.70690	−0.83869	1.57371	1.13831
	7.6	18.20040	0.70184	−0.81976	1.66441	1.28026
	7.8	18.34052	0.69683	−0.80037	1.75468	1.42146
	8.0	18.47964	0.69187	−0.78054	1.84457	1.56192
−2, 1, 1	8.2	18.61776	0.68694	−0.76109	1.93370	1.70126
	8.4	18.75491	0.68206	−0.74113	2.02250	1.83991
	8.6	18.89108	0.67727	−0.71905	2.11167	1.97857
	8.8	19.02628	0.67244	−0.70017	2.19886	2.11491
	9.0	19.16053	0.66769	−0.67955	2.28625	2.25110
	9.2	19.29383	0.66298	−0.65880	2.37315	2.38646
	9.4	19.42619	0.65831	−0.63791	2.45957	2.52099
	9.6	19.55762	0.65368	−0.61650	2.54567	2.65485
	9.8	19.68813	0.64909	−0.59568	2.63099	2.78762
	10.0	19.81772	0.64454	−0.57432	2.71600	2.91974

Заметим, что развитая в [3] теория предусматривает небольшие разрывы напряжений на границах соседних подобластей, так как при определении упругих постоянных использовались условия непрерывности напряжений лишь в определенных местах этих границ.

Точность решения задач зависит от величин этих разрывов, которые в свою очередь зависят от выбора малой величины ε. В нашем примере разность соответствующих напряжений не превышает 10% от этих напряжений.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 25 IX 1980

Ռ. Ե. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

ԿՏՈՐ ԱՌ ԿՏՈՐ ԳԾԱՅԻՆ ՆՅՈՒԹԻՑ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ԶՈՒԳԱՀԵՌԱՆԻՍՏԻ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԾՌՄԱՆ ՀԱՄԱՐ ՄԵԾ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆԵՐԻ ԽՆԴԻՐԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Կատարվում է առաձգական, սեղմելի նյութի առաձգական հաստատունների որոշման ուսումնասիրությունը լարումների և դեֆորմացիաների միջև կտոր առ կտոր գծային կապի և մեծ դեֆորմացիաների առկայության պայմաններում և բերվում է այդ հաստատունների համար կատալոգ կազմելու օրինակ։

Դիտարկվում է ուսումնասիրվող նյութից պատրաստված ուղղանկյուն զուգահեռանիստի գլանային ծռման խնդիրը մինչև նրա դեֆորմացված և լարվածային վիճակների որոշման համար պարզ առնչությունների ստանալը։ Որպես թվային օրինակ, լուծվում է զուգահեռանիստի մինչև կլոր գլանային խողովակի վերածման խնդիրը։

THE PROBLEM OF LARGE ELASTIC DEFORMATIONS FOR CYLINDRICAL FLEXURE OF A CUBOID FROM PIECEWISE LINEAR MATERIAL

K. E. MKRTCHIAN

S u m m a r y

The investigation to determine the elastic constants for elastic compressible material, considering the piecewise linear law of relations between stresses and strains, is being continued and an example of compiling a catalogue for these constants is presented.

The problem for a cylindrical flexure of a cuboid from the above material is considered up to deriving simple expressions to define the

strain-stress states. The problem for flexure of a cuboid to a circular cylindrical tube is solved as a numerical example.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье А. И.* Теория упругости. М., Изд. «Наука», 1970.
2. *Заремба Л. К., Красильников В. А.* Введение в нелинейную акустику. М., Изд. «Наука», 1966.
3. *Мкртчян Р. Е.* Кусочно-линейный закон связи между напряжениями и деформациями при больших деформациях. Изв. АН Армянской ССР, Механика, 1973, т. 26, № 3.
4. *Green A. E., Zerna W.* Theoretical Elasticity. Oxford, Clarendon Press, 1954.
5. *Грин А., Адкинс Дж.* Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М., Изд. «Мир», 1965.