ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIV, № 4, 1981 Механика

А. Д. ЛИЗАРЕВ

О РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И УСТОЙЧИВОСТИ ТОКОНЕСУЩЕЙ ПЛАСТИНЫ

Задача теории устойчивости токонесущей пластины-полосы шириной a $(0 \leqslant x \leqslant a,\ -\infty < y < \infty)$, помещенной в поперечное магнитное поле, в случае, если деформации не зависят от координаты y, сводится к уравнению [1, 2]

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{2h}{cD} J_0 H_0 \frac{d}{dx}\left(x \frac{dw}{dx}\right) = 0 \tag{1.1}$$

где $2h$ — постоянная толщина пластины, D — цилиндрическая жесткость, J_0 — плотность равномерно распределенного тока, H_0 — вектор напряженности внешнего магнитного поля, перпендикулярный срединной плоскости пластины, c — электродинамическая постоянная. Действующая на пластину постоянная объемная сила $J_0 H_0/c$ приводит к возникновению неоднородного поля нормальных напряжений $\sigma = J_0 H_0 x/c$.

Переходя к безразмерным координатам $\xi = x/a$, умножая все члены уравнения (1.1) на ξ^4 и полагая $a^3 h J_0 H_0/cD = k$, перепишем (1.1) в виде

$$\xi^4 w^{IV} + 2k\xi^5 w'' + 2k\xi^4 w' = 0 \tag{1.2}$$

Уравнение (1.2) принадлежит классу дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

$$\sum_{i=0}^{q+1} z^i (a_i - b_i z^\delta - c_i z^{m\delta}) \frac{d^i w}{dz^i} = 0 \tag{1.3}$$

рассмотренному в [3—5]. Здесь a_i, b_i, c_i, δ — действительные числа, $i = 0, 1, \ldots, q+1$; $m \geqslant 2$ — целое число. К уравнениям класса (1.3) сводятся многие задачи теории колебаний и устойчивости неоднородных механических систем, свойства которых описываются непрерывными функциями координат [3—5]. Будем относить к таким системам стержни, пластины и оболочки, физически и геометрически неоднородные или же с начальными неоднородными полями напряжений. Физическая неоднородность вызывается переменными физико-механическими свойствами материала — модулем упругости, коэффициентом Пуассона и плотностью. Геометрически неоднородными системами будем называть стержни переменного поперечного сечения, пластины и оболочки переменной толщины. Начальная неоднородность напряжений может быть обусловлена, например, различной интенсивностью распределенных сил, приложенных по краям пластины, центробежными силами, влиянием собственного веса, температурными и электромагнитными полями. Возможно наличие нескольких неоднородностей в одном объекте, например, вертикально поставленный изотропный стержень переменного сечения неоднороден геометрически, а напряжения в таком стержне от собственного веса зависят от осевой координаты.

У различных объектов (стержень, пластина, оболочка) при различном характере неоднородности (физическая, геометрическая или же начальное неоднородное поле напряжений) формы колебаний и потери устойчивости описываются уравнениями класса (1.3), которые в разных задачах отличаются только постоянными коэффициентами a_i, b_i, c_i и показателем δ. Так, к уравнениям класса (1.3) приводятся задачи об устойчивости стержня переменного сечения с учетом собственного веса [6], об устойчивости кольцевой пластины при неоднородном поле напряжений [7], о колебаниях кольцевой пластины переменной толщины [8] и многие другие. Полная математическая аналогия обнаруживается между задачами об устойчивости призматического стержня при действии собственного веса [9] и об устойчивости токонесущей пластины. Обе эти задачи сводятся к уравнению вида (1.2).

Построение решений уравнений класса (1.3) для случая, когда все $c_i = 0$, рассмотрено в [4]. Введем параметры

$$\alpha_{il} = \frac{x_i - u_l}{\delta}, \qquad \beta_{ij} = \frac{x_i - x_j}{\delta} + 1 \tag{1.4}$$

где $i \neq j$, x_i и u_l — корни определяющих уравнений параметров знаменателя и числителя

$$a_0 + \sum_{i=1}^{q+1} a_i \prod_{j=1}^{i} (x - j + 1) = 0 \tag{1.5}$$

$$b_0 + \sum_{i=1}^{p} b_i \prod_{j=1}^{i} (u - j + 1) = 0 \tag{1.6}$$

Если среди корней уравнения (1.5) отсутствуют кратные корни, а также корни, разность которых равна числу, кратному δ, то при любом целом или дробном $\delta > 0$ фундаментальную систему решений уравнения (1.3) можно представить в виде суммы произведений степенных и обобщенных гипергеометрических функций

$$w_i = z^{x_i} {}_pF_q(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{ip}; \beta_{i1}, \beta_{i2}, \ldots, \beta_{iq}; \psi) \tag{1.7}$$

причем аргумент ψ определяется формулой

$$\psi = \frac{b_p}{a_{q+1}} \frac{z^{\delta}}{\delta^{q-p+1}}$$

где b_p — коэффициент со старшим индексом p среди отличных от нуля коэффициентов b_i в уравнении (1.3).

При одном или нескольких значениях $\beta_{ij} = 0, -1, -2, \ldots$ уравнение (1.3) имеет соответствующее число частных решений, содержащих $\ln z$ в первой и более высоких степенях.

Уравнение (1.2) принадлежит классу (1.3), причем $p = 2$, $q = 3$;

$$\delta = 3; \quad a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0, \quad a_4 = 1; \quad b_0 = b_3 = b_4 = 0$$

$$b_1 = b_2 = -2k; \quad c_i = 0; \quad \psi = -\frac{2}{9}k\xi^3$$

Определяющее уравнение параметров знаменателя (1.5) имеет корни $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, определяющее уравнение параметров числителя (1.6) — корни $u_1 = u_2 = 0$. Разность корней $x_4 - x_1$ кратна $\delta = 3$, однако частное решение w_4 может быть записано в форме (1.7), так как частное решение w_1 — постоянная величина. Общее решение уравнения (1.2) имеет вид

$$w = C_1 + C_2\xi F_2 + C_3\xi^2 F_3 + C_4\xi^3 F_4 \tag{1.8}$$

где C_i — постоянные, зависящие от граничных условий,

$$F_2 = {}_1F_2\left(\frac{1}{3};\ \frac{2}{3},\ \frac{4}{3};\ \psi\right)$$

$$F_3 = {}_1F_2\left(\frac{2}{3};\ \frac{5}{3},\ \frac{4}{3};\ \psi\right)$$

$$F_4 = {}_2F_3\left(1,\ 1;\ 2,\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{3};\ \psi\right)$$

Пусть пластина жестко защемлена по краю $\xi = 1$, а край $\xi = 0$ свободен, что соответствует граничным условиям

$$w''(0) = w'''(0) = w(1) = w'(1) = 0$$

Используя обычную процедуру приравнивания нулю определителя четвертого порядка, составленного из коэффициентов при C_i, получим уравнение устойчивости

$$w_2'(1) = 0 \tag{1.9}$$

Если пластина жестко защемлена по краю $\xi = 1$, а край $\xi = 0$ шарнирно оперт, то

$$w(0) = w''(0) = w(1) = w'(1) = 0$$

а уравнение устойчивости имеет вид

$$w_2(1)\,w_4'(1) - w_2'(1)\,w_4(1) = 0 \tag{1.10}$$

Наконец, если края пластины $\xi = 0$ и $\xi = 1$ жестко защемлены, то

$$w(0) = w'(0) = w(1) = w'(1) = 0$$

Уравнение устойчивости принимает вид

$$w_2(1)\, w_4'(1) - w_3'(1)\, w_4(1) = 0 \qquad (1.11)$$

Функции w_2, w_3, w_4 удовлетворяют зависимости

$$\frac{d}{d\xi}\left[\xi^{\beta}{}_{p}F_{q}\left(\mu, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_p;\ \mu+1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_q;\ a\xi^{\beta/\mu}\right)\right] =$$

$$= \beta\xi^{\beta-1}{}_{p-1}F_{q-1}\left(\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_p;\ \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_q;\ a\xi^{\beta/\mu}\right)$$

поэтому уравнения устойчивости (1.9)—(1.11) можно упростить, подставив в них выражения

$$w_2(1) = {}_0F_1\left(\frac{2}{3};\ \psi\right) \qquad (1.12)$$

$$w_3'(1) = 2\,{}_0F_1\left(\frac{4}{3};\ \psi\right)$$

$$w_4'(1) = 3\,{}_1F_2\left(1;\ \frac{4}{3}, \frac{5}{3};\ \psi\right), \qquad \psi = -\frac{2}{9}k$$

Используя зависимость (1.12), а также соотношение

$$I_\nu(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}\,{}_0F_1\left(\nu+1;\ \frac{z^2}{4}\right)$$

где $I_\nu(z)$ — функция Бесселя, $\Gamma(\nu)$ — гамма-функция, можно показать, что уравнение (1.9) эквивалентно уравнению $I_{-1/3}\left(\frac{4}{3}\right) = 0$, приведенному в [1, 2].

Решение с помощью ЭВМ уравнений (1.9)—(1.11) дало следующие значения критических параметров: $k_1 = 3.9186$, $k_2 = 26.2503$, $k_3 = 37.3143$. Отметим, что при решении уравнения, соответствующего (1.10), методом Бубнова—Галёркина, который, как известно, дает приближенные верхние оценки критических сил, в [2] получено первое приближение $k_2 = 29.03$. Как указано в [10], результаты экспериментальных исследований позволяют принять теоретические значения критических параметров за верхний предел при оценке устойчивости токонесущей пластины.

Построим еще аналитическое решение задачи о колебаниях токонесущей пластины, описываемых дифференциальным уравнением [1, 11]

$$\frac{d^4w}{dx^4} - \frac{\alpha}{D}\frac{d}{dx}\left[\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\frac{dw}{dx}\right] - \lambda^2 w = 0 \qquad (1.13)$$

где λ^2 — частотный параметр, $\alpha = 2aJ_y^2/c^2$.

Снова переходя к безразмерным координатам $\xi = x/a$ и умножая все члены уравнения (1.13) на ξ^4, получим

$$\xi^4 w^{IV} - \mu (1 - \xi^2) \xi^4 w'' + 2\mu\xi^5 w' - \lambda^2\xi^4 w = 0 \tag{1.14}$$

где $\mu = \alpha/a^2D$.

Уравнение (1.4) принадлежит классу (1.3), причем $p = 2$, $s = 2$, $q = 3$; $\delta = 2$, $m = 2$; $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$, $a_4 = 1$; $b_0 = b_1 = b_3 = b_4 = 0$; $b_2 = \mu$; $c_0 = \lambda^2$, $c_1 = -2\mu$, $c_2 = -\mu$, $c_3 = c_4 = 0$.

Стандартная процедура построения решений уравнений (1.3) с отличными от нуля коэффициентами c_i рассмотрена в [5]. Снова введем параметры α_{ij} и β_{ij}, определяемые формулами (1.4), а также параметр

$$\gamma_{in} = (x_i - v_n)\,\delta^{-1} \qquad (n = 1, 2, \dots, s) \tag{1.15}$$

где s — порядок старшей производной, при которой коэффициент c_i в уравнении (1.3) отличен от нуля, а v_n — корни определяющего уравнения

$$f_m(v) = c_0 + \sum_{i=1}^{s} c_i \prod_{j=1}^{i} (v - j + 1) = 0 \tag{1.16}$$

Если среди корней x_i уравнения (1.5) отсутствуют кратные корни, а также корни, разность которых равна числу, кратному δ, то частные решения уравнения (1.3), в котором хотя бы один из коэффициентов c_i отличен от нуля, представляют собой произведения степенных функций и ${}_{p,\,s}H_q$-функций:

$$w_i = z^{x_i}\ {}_{p,\,s}H_q \begin{pmatrix} \alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{ip}; & \\ \gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \dots, \gamma_{is}; & \psi \\ \beta_{i1}, \beta_{i2}, \dots, \beta_{iq}; & \end{pmatrix} \tag{1.17}$$

$${}_{p,\,s}H_q(\psi) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} D_k \frac{\psi^k}{k!} \tag{1.18}$$

$$\psi = \frac{1}{a_{q+1}} \frac{z^{\delta}}{\delta^{q+1}}$$

Условия сходимости ряда (1.18) рассмотрены в [5]. Коэффициенты D_k в этом ряде при $k \geqslant 3$ можно представить в виде трехдиагональных определителей k-го порядка, которые вычисляются с помощью рекуррентных зависимостей

$$D_k = D_{k-1}\, g_k + D_{k-m}\, h_k \tag{1.19}$$

причем $D_0 = 1$, $D_1 = g_1$

$$g_k = b_p \delta^p \frac{\prod\limits_{l=1}^{p} (\alpha_{il} + k - 1)}{\prod\limits_{j=1}^{q+1} (\beta_{ij} + k - 1)}, \qquad h_k = c_s C_{km} \frac{\prod\limits_{n=1}^{s} (\gamma_{in} + k - m)}{\prod\limits_{j=1}^{q+1} (\beta_{ij} + k - 1)}$$

$C_{km} = a_{q+1}^{m-1} (k - m + 1)_{m-1} \delta^{s+(q+1)(m-1)}$, $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha + n - 1)$ — символ Похгаммера, $i \neq j$.

Обобщенный гипергеометрический ряд ${}_pF_q$ является частным случаем ряда (1.18). Это следует из того, что если в уравнении (1.3) все коэффициенты $c_i = 0$, то в рекуррентных зависимостях (1.19) все $h_k = 0$, а определитель D_k равен тогда произведению элементов, стоящих на главной диагонали.

Определяющее уравнение (1.5) в рассматриваемой задаче имеет корни $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, уравнение (1.6) — корни $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, уравнение (1.16) — корни

$$v_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\lambda^2}{\mu}}\right), \quad \mu \neq 0$$

Хотя разности корней $x_3 - x_1 = x_4 - x_2$ кратны $\delta = 2$, однако логарифмические решения не требуются, так как корни x_1 и x_2 удовлетворяют определяющему уравнению (1.6) и поэтому можно положить $D_1(x_1) = C_1$, $D_1(x_2) = C_2$, где C_i — любые постоянные числа. С учетом этих равенств при $k > 1$ определяются все коэффициенты $D_k(x_1)$ и $D_k(x_2)$ в рядах (1.18), и тогда все частные решения уравнения (1.14) имеют вид (1.17). Аналогичный случай при построении обобщенного степенного ряда рассмотрен в [12].

Таким образом, процедура построения аналитических решений уравнений класса (1.3) в общем случае сводится к решению определяющих уравнений (1.5), (1.6), (1.16), вычислению параметров α_{il}, β_{ij}, γ_{in} по формулам (1.4), (1.15) и аргумента ψ. При численной реализации аналитических решений с помощью ЭВМ для определения коэффициентов D_k ряда (1.18) может быть использован, например, аппарат цепных дробей.

При удовлетворении граничным условиям решений, найденных по описанной процедуре, необходимо определять их производные до n-го порядка. Производные произведения $w_i = z^{x_i}{}_{p,s}H_q(\psi)$ имеют вид

$$\frac{d^n w_i}{dz^n} = z^{x_i - n} \sum_{k=1}^{\infty} (x_i + k\delta + 1 - n)_n D_k \frac{\psi^k}{k!}$$

где D_k — те же коэффициенты, что и в ряде (1.18).

Числовые результаты, полученные при реализации предложенных аналитических решений в ${}_pF_q$- и ${}_{p,s}H_q$ — функциях, могут быть использованы в качестве эталонных при оценке точности различных приближенных методов.

Институт механики металлополимерных
систем АН БССР

Поступила 5 VI 1980

Ա. Դ. ԼԻԶԱՐԵՎ

ՀՈՍԱՆՔԱՏԱՐ ՍԱԼԻ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ԵՎ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Ցույց է տրվում, որ հոսանքատար սալ-շերտի տատանումների և կայունության տեսության խնդիրները բերվում են նախկինում ուսումնասիրված բազմանդամային գործակիցներով դիֆերենցիալ հավասարումներին։

Այդ հավասարումների համար կառուցվել են հատուկ ֆունկցիաներ պարունակող ճշգրիտ անալիտիկ լուծումներ։

Հոսանքատար սալի կայունության մասին խնդրի համար տարբեր եզրային պայմանների դեպքում բերվում են թվային արդյունքներ։

ON SOLUTION FOR PROBLEMS IN THE VIBRATION AND STABILITY THEORY FOR CURRENT-CARRYING PLATES

A. D. LIZAREV

Summary

The problems in the vibration and stability theory are shown to be reduced to the previously described class of differential equations with polynomial coefficients. Exact analytical solutions for these equations are constructed in the form of peculiar functions. Numerical results are given for the problem of stability of the current-carrying plate under different boundary conditions.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Колебания и устойчивость токонесущей пластинки в поперечном магнитном поле. Докл. АН Арм.ССР, 1973, т. 57, № 5, с. 276—281.
2. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М., Наука, 1977, 272 с.
3. *Лизарев А. Д., Кленов В. И.* О решениях одного класса уравнений устойчивости упругих систем. Тез. докл. V Всесоюзной конф. по проблемам устойчивости в строительной механике. Л., 1977, с. 16—17.

4. *Лизарев А. Д., Кленов В. И.* Об одном обобщении гипергеометрического уравнения. Дифференциальные уравнения, 1976, т. 12, № 12, с. 2170—2174.
5. *Лизарев А. Д., Кленов В. И.* Аналитические решения одного класса уравнений с полиномиальными коэффициентами. Дифференциальные уравнения, 1978, т. 11, № 12, с. 2158—2163.
6. *Лизарев А. Д., Кленов В. И.* Устойчивость стержней переменного сечения при действии собственного веса. Изв. вузов, Строительство и архитектура, 1978, № 6, с. 37—41.
7. *Лизарев А. Д., Кузьменцов В. П.* Об устойчивости тонкого диска, посаженного на вал. Изв. вузов, Машиностроение, 1979, № 11, с. 17—20.
8. *Лизарев А. Д., Кузьменцов В. П.* Свободные колебания кольцевых пластин переменной толщины. Проблемы прочности, 1980, № 4, с. 96—99.
9. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем. М., Наука, 1967, 984 с.
10. *Оваакимян Р. Н., Косакян Ю. И., Мартиросян Р. М.* Экспериментальное исследование устойчивости токонесущей пластинки в магнитном поле. Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1974, 27, № 6, с. 68—73.
11. *Амбарцумян С. А., Белубекян М. В.* К задаче колебаний токонесущей пластинки-полосы. В кн.: Тр. X Всесоюзной конф. по теории оболочек и пластин. Тбилиси, Мецниереба, 1975, с. 3—10.
12. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики, т. 3, ч. 2. М., «Наука», 1974, 672 с.