ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXIV, № 4, 1981 Механика

А. В. БЕРДАКЧИЕВ

ТРЕХМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ СВЯЗАННОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ БРУСА ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

Постановка связанных задач механики сплошной среды в общем виде дана в [1]. Задачам связанной термоупругости посвящены обзоры [2—5]. В настоящей работе при некоторых граничных условиях даны решения квазистатических задач связанной термоупругости для бруса прямоугольного сечения.

В случае линейной изотропной однородной термоупругой среды при малых деформациях уравнения равновесия и уравнение притока тепла имеют вид [5]

$$\mu\Delta u_i + (\lambda + \mu)\, e_{,i} + X_i = \gamma\theta_{,i} \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{1.1}$$

$$\Delta\theta - \frac{1}{x}\dot{\theta} - \eta\dot{e} + Q = 0 \tag{1.2}$$

$$e = u_{k,k}, \quad x = \frac{\lambda^0}{c_s}, \quad \eta = \frac{\gamma T_0}{\lambda^0}, \quad Q = \frac{w}{\lambda^0}, \quad \gamma = (3\lambda + 2\mu)\,\alpha_0$$

где u_i — вектор перемещения; $\theta = T - T_0$ — перепад температуры (то есть разность между текущей температурой T и некоторой равновесной T_0); λ и μ — постоянные Ламе; λ^0 — коэффициент теплопроводности; c_s — теплоемкость при постоянной деформации; w — количество тепла, возникающего в единице объема в единицу времени; α_0 — коэффициент теплового расширения. Поскольку случай произвольных объемных сил всегда сводится к случаю, когда объемные силы имеют потенциал [7], то будем считать, что $X_i = C_{,i}$. Компоненты тензора напряжений σ_{ij} и тензора деформаций ε_{ij}:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + (\lambda e - \gamma\theta)\,\delta_{ij}, \qquad 2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}$$

Начальные условия:

$$u_i\big|_{t=0} = f_i(x_k), \qquad \theta\big|_{t=0} = h(x_k) \tag{1.3}$$

где $f_i(x_k)$, $h(x_k)$ — заданные функции координат x_k $(k = 1, 2, 3)$, t — время. Квазистатическая задача связанной термоупругости состоит в интегрировании системы уравнений (1.1), (1.2) при удовлетворении начальным условиям (1.3) и некоторым граничным условиям для u_i и θ, которые мы пока не будем конкретизировать. Интегрируя (1.2) по времени от 0 до t с учетом (1.3), получим

$$\frac{\theta}{\varkappa} = \int_0^t \Delta\theta d\tau - \eta e + L, \qquad \left(L \equiv \frac{h}{\varkappa} + \eta f_{k,k} + \int_0^t Q d\tau\right) \tag{1.4}$$

Подставляя выражение для θ (1.4) в (1.1), найдем

$$\mu\Delta u_i + (\lambda_1 + \mu) e_{,i} = \gamma\varkappa \int_0^t (\Delta\theta)_{,i} d\tau + (\gamma\varkappa L - G)_{,i} \tag{1.5}$$

где $\lambda_1 = \lambda + \eta\gamma\varkappa$. Представим u_i в виде $u_i = v_i + w_i$, $e = e_v + e_w$, $e_v = v_{k,k}$, $e_w = w_{k,k}$, где v_i — решение системы

$$\mu\Delta v_i + (\lambda_1 + \mu) e_{v,i} = 0 \tag{1.6}$$

а w_i — любое частное решение системы (1.5). Будем искать w_i в виде $w_i = \Phi_{,i}$. Подставляя это выражение в (1.5) и учитывая, что

$$\Delta(\operatorname{grad}\Phi) = \operatorname{grad}\operatorname{div}(\operatorname{grad}\Phi) - \operatorname{rot}\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\Phi) = \operatorname{grad}\Delta\Phi$$

найдем Φ в виде

$$\Phi = \gamma_1 \int_0^t \theta d\tau + F, \qquad \gamma_1 \equiv \frac{\gamma\varkappa}{\lambda_1 + 2\mu}$$

где F — любое частное решение уравнения $(\lambda_1 + 2\mu)\Delta F = \gamma\varkappa L - G$.

Таким образом,

$$u_i = v_i + \gamma_1 \int_0^t \theta_{,i} d\tau + F_{,i} \tag{1.7}$$

Из (1.7) следует, что

$$e = e_v + \gamma_1 \int_0^t \Delta\theta d\tau + \Delta F \tag{1.8}$$

Подставляя (1.8) в (1.4), получим

$$\theta - k^2 \int_0^t \Delta\theta d\tau = M - \eta\varkappa e_v \tag{1.9}$$

$$k^2 \equiv \frac{\varkappa(\lambda + 2\mu)}{\lambda_1 + 2\mu}, \qquad M \equiv \frac{\varkappa[(\lambda + 2\mu) L + \eta G]}{\lambda_1 + 2\mu}$$

Исключая $\int_0^t \Delta\theta d\tau$ из (1.8) и (1.9), найдем более простое выражение для e

$$(\lambda + 2\mu) e = (\lambda_1 + 2\mu) e_v + \gamma\theta - G \tag{1.10}$$

Из (1.9) следует

$$\dot\theta - k^2\Delta\theta = M - \eta\varkappa\dot e_v \tag{1.11}$$

В некоторых задачах v_i, а следовательно, и e_v удается найти, не используя уравнение (1.11). Тогда подставляя найденное значение e_v в (1.11), получим для θ уравнение (1.11) с известной правой частью и с некоторым граничным условием. Найдя θ, по формуле (1.7) определим u_i.

В прямоугольной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ компоненты тензора напряжений:

$$\sigma_{11} = 2\mu\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \lambda e - \gamma\theta = (\lambda + 2\mu)e - \gamma\theta - 2\mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) \tag{1.12}$$

$$\sigma_{22} = 2\mu\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \lambda e - \gamma\theta, \qquad \sigma_{33} = 2\mu\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \lambda e - \gamma\theta \tag{1.13}$$

$$\sigma_{12} = \mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right), \qquad \sigma_{13} = \mu\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)$$
$$\sigma_{23} = \mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \tag{1.14}$$

Систему (1.6) можно записать в форме

$$\varkappa_1\frac{\partial e_v}{\partial x_1} = \frac{\partial\omega_{v3}}{\partial x_2} - \frac{\partial\omega_{v2}}{\partial x_3}, \qquad \varkappa_1\frac{\partial e_v}{\partial x_2} = \frac{\partial\omega_{v1}}{\partial x_3} - \frac{\partial\omega_{v3}}{\partial x_1} \tag{1.15}$$

$$\varkappa_1\frac{\partial e_v}{\partial x_3} = \frac{\partial\omega_{v2}}{\partial x_1} - \frac{\partial\omega_{v1}}{\partial x_2}, \qquad \left(\varkappa_1 = 2 + \frac{\lambda_1}{\mu}\right) \tag{1.16}$$

$$e_v = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}, \qquad \omega_{v1} = \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \tag{1.17}$$

$$\omega_{v2} = \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \qquad \omega_{v3} = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \tag{1.18}$$

Пусть дан бесконечный брус прямоугольного поперечного сечения, ось которого параллельна оси Ox_3. В плоскости x_1Ox_2 получим прямоугольник $ABCD$ — поперечное сечение бруса. $x_1 = 0$, $x_1 = a$, $x_2 = 0$, $x_2 = b$ — соответственно уравнения граней AD, BC, AB, CD бруса, которые мы будем именовать так же, как соответствующие стороны прямоугольника $ABCD$. Будем считать, что внешние воздействия симметричны относительно плоскости x_1Ox_2 и периодичны с периодом $2c$ в направлении оси Ox_3. Далее будут даны точные решения задач, когда на одних гранях бруса заданы нормальные смещения, касательные усилия и тепловой поток, а на других — касательные смещения, нормальные усилия и температура. Решение каждой такой задачи будет получено в виде суммы решений более простых задач, которые мы рассмотрим в первую очередь.

Задача 1. На гранях AB и CD заданы граничные условия

$$u_2\big|_{x_2=0}=0,\quad \sigma_{12}\big|_{x_2=0}=0,\quad \sigma_{23}\big|_{x_2=0}=0,\quad \frac{\partial\theta}{\partial x_2}\Big|_{x_2=0}=0 \qquad (1.19)$$

$$u_2\big|_{x_2=b}=0,\quad \sigma_{12}\big|_{x_2=b}=0,\quad \sigma_{23}\big|_{x_2=b}=0,\quad \frac{\partial\theta}{\partial x_2}\Big|_{x_2=b}=0 \qquad (1.20)$$

Учитывая наше предположение о характере внешних воздействий, искомые функции разложим в ряды Фурье вида

$$u_1=\sum_{m,\,n=0}^{+\infty}u_{1mn}(x_1,\,t)\cos\alpha_m x_2\cos\beta_n x_3$$

$$u_2=\sum_{m,\,n=0}^{+\infty}u_{2mn}(x_1,\,t)\sin\alpha_m x_2\cos\beta_n x_3$$

$$u_3=\sum_{m,\,n=0}^{+\infty}u_{3mn}(x_1,\,t)\cos\alpha_m x_2\sin\beta_n x_3$$

$$\theta=\sum_{m,\,n=0}^{+\infty}\theta_{mn}(x_1,\,t)\cos\alpha_m x_2\cos\beta_n x_3$$

где $\alpha_m=\dfrac{\pi m}{b}$, $\beta_n=\dfrac{\pi n}{c}$. Граничные условия (1.19), (1.20) удовлетворены. Аналогичные разложения легко выписать и для заданных функций и мы этого делать не будем. Соответствующие коэффициенты разложений будем снабжать индексами m, n, причем в последующих соотношениях суммирование по повторяющимся индексам m и n не производится. Для каждых m, n с учетом (1.10) в (1.12) вместо (1.12)—(1.18) получим

$$\sigma_{11mn}=(\lambda_1+2\mu)e_{vmn}-G_{mn}-2\mu(\alpha_m u_{2mn}+\beta_n u_{3mn}) \qquad (1.21)$$

$$\sigma_{22mn}=2\mu\alpha_m u_{2mn}+\lambda e_{mn}-\gamma\theta_{mn},\qquad \sigma_{33mn}=2\mu\beta_n u_{3mn}+\lambda e_{mn}-\gamma\theta_{mn} \qquad (1.22)$$

$$\sigma_{12mn}=\mu\left(\frac{\partial u_{2mn}}{\partial x_1}-\alpha_m u_{1mn}\right),\qquad \sigma_{13mn}=\mu\left(\frac{\partial u_{3mn}}{\partial x_1}-\beta_n u_{1mn}\right)$$

$$\sigma_{23mn}=-\mu(\beta_n u_{2mn}+\alpha_m u_{3mn})$$

$$\varkappa_1\frac{\partial e_{vmn}}{\partial x_1}=\Omega_{vmn},\qquad (\Omega_{vmn}=\alpha_m\omega_{v3mn}-\beta_n\omega_{v2mn}) \qquad (1.23)$$

$$\varkappa_1\alpha_m e_{vmn}=\frac{\partial\omega_{v3mn}}{\partial x_1}-\beta_n\omega_{v1mn} \qquad (1.24)$$

$$\varkappa_1\beta_n e_{vmn}=\alpha_m\omega_{v1mn}-\frac{\partial\omega_{v2mn}}{\partial x_1} \qquad (1.25)$$

$$e_{vmn}=\frac{\partial v_{1mn}}{\partial x_1}+\alpha_m v_{2mn}+\beta_n v_{3mn},\qquad \omega_{v1mn}=\beta_n v_{2mn}-\alpha_m v_{3mn} \qquad (1.26)$$

$$\omega_{v2mn} = -\frac{\partial v_{3mn}}{\partial x_1} - \beta_n v_{1mn}, \qquad \omega_{v3mn} = \frac{\partial v_{2mn}}{\partial x_1} + \alpha_m v_{1mn} \quad (1.27)$$

Соотношения (1.7), (1.11) и (1.3) дают

$$u_{1mn} = v_{1mn} + \gamma_1 \int\limits_0^t \frac{\partial \theta_{mn}}{\partial x_1} d\tau + \frac{\partial F_{mn}}{\partial x_1} \quad (1.28)$$

$$u_{2mn} = v_{2mn} - \gamma_1 \alpha_m \int\limits_0^t \theta_{mn} d\tau - \alpha_m F_{mn} \quad (1.29)$$

$$u_{3mn} = v_{3mn} - \gamma_1 \beta_n \int\limits_0^t \theta_{mn} d\tau - \beta_n F_{mn} \quad (1.30)$$

$$\dot\theta_{mn} - k^2 \left(\frac{\partial^2 \theta_{mn}}{\partial x_1^2} - \lambda_{mn}^2 \theta_{mn} \right) = \dot M_{mn} - \gamma_1 \varkappa \dot e_{vmn}, \quad \theta_{mn}|_{t=0} = h_{mn} \quad (1.31)$$

где $\lambda_{mn}^2 \equiv \alpha_m^2 + \beta_n^2$. Умножая (1.24) и (1.25) соответственно на α_m и β_n и складывая, получим

$$\varkappa_1 \lambda_{mn}^2 e_{vmn} = \frac{\partial \Omega_{vmn}}{\partial x_1} \quad (1.32)$$

Подставляя Ω_{vmn} из (1.23) в (1.32), найдем

$$e_{vmn} = c_{1mn}(t) \exp(-\lambda_{mn} x_1) + c_{2mn}(t) \exp(\lambda_{mn} x_1) \quad (1.33)$$

$$\Omega_{vmn} = \varkappa_1 \lambda_{mn} [-c_{1mn}(t) \exp(-\lambda_{mn} x_1) + c_{2mn}(t) \exp(\lambda_{mn} x_1)] \quad (1.34)$$

где $c_{imn}(t)$ $(i = 1, 2)$ (и далее для $i = 3, 4, 5, 6$) — неизвестные функции времени. Выражая Ω_{vmn} через перемещения с помощью (1.27), получим

$$e_{vmn} = \frac{\partial v_{1mn}}{\partial x_1} + R_{mn}, \qquad \Omega_{vmn} = \lambda_{mn}^2 v_{1mn} + \frac{\partial R_{mn}}{\partial x_1} \quad (1.35)$$

где $R_{mn} \equiv \alpha_m v_{2mn} + \beta_n v_{3mn}$. Поэтому

$$v_{1mn} = \frac{1}{\lambda_{mn}^2} \left(\Omega_{vmn} - \frac{\partial R_{mn}}{\partial x_1} \right), \qquad \frac{\partial^2 R_{mn}}{\partial x_1^2} - \lambda_{mn}^2 R_{mn} = \frac{\partial \Omega_{vmn}}{\partial x_1} - \lambda_{mn}^2 e_{vmn}$$

Откуда с учетом (1.33), (1.34) находим

$$R_{mn} = \lambda_{mn} \varkappa_2 x_1 [c_{1mn}(t) \exp(-\lambda_{mn} x_1) - c_{2mn}(t) \exp(\lambda_{mn} x_1)] +$$
$$+ c_{3mn}(t) \exp(-\lambda_{mn} x_1) + c_{4mn}(t) \exp(\lambda_{mn} x_1), \quad (2\varkappa_2 \equiv 1 - \varkappa_1) \quad (1.36)$$

$$v_{1mn}(x_1, t) = (\varkappa_2 x_1 - \varkappa_3)\, c_{1mn}(t) \exp(-\lambda_{mn} x_1) +$$

$$+ (\varkappa_2 x_1 + \varkappa_3)\, c_{2mn}(t) \exp(\lambda_{mn} x_1) + \frac{1}{\lambda_{mn}} c_{3mn}(t) \exp(-\lambda_{mn} x_1) -$$

$$- \frac{1}{\lambda_{mn}} c_{4mn}(t) \exp(\lambda_{mn} x_1), \quad (2\lambda_{mn} \varkappa_3 \equiv 1 + \varkappa_1) \tag{1.37}$$

Умножая (1.24) и (1.25) соответственно на β_n и α_m и почленно вычитая, найдем

$$\omega_{v1mn} = \frac{1}{\lambda_{mn}^2} \left(\alpha_m \frac{\partial \omega_{v2mn}}{\partial x_1} + \beta_n \frac{\partial \omega_{v3mn}}{\partial x_1} \right) \tag{1.38}$$

Подставляя (1.27) в (1.38), получим

$$\frac{\partial^2 \omega_{v1mn}}{\partial x_1^2} - \lambda_{mn}^2 \omega_{v1mn} = 0$$

$$\omega_{v1mn} = c_{5mn}(t) \exp(-\lambda_{mn} x_1) + c_{6mn}(t) \exp(\lambda_{mn} x_1) \tag{1.39}$$

Так как

$$\alpha_m v_{2mn} + \beta_n v_{3mn} = R_{mn} \quad \text{и} \quad \beta_n v_{2mn} - \alpha_n v_{3mn} = \omega_{v1mn}$$

то используя (1.36) и (1.39), найдем

$$\lambda_{mn}^2 v_{2mn} = \alpha_m \lambda_{mn} \varkappa_2 x_1 [c_{1mn}(t) \exp(-\lambda_{mn} x_1) - c_{2mn}(t) \exp(\lambda_{mn} x_1)] +$$

$$+ \alpha_m [c_{3mn}(t) \exp(-\lambda_{mn} x_1) + c_{4mn}(t) \exp(\lambda_{mn} x_1)] +$$

$$+ \beta_n [c_{5mn}(t) \exp(-\lambda_{mn} x_1) + c_{6mn}(t) \exp(\lambda_{mn} x_1)] \tag{1.40}$$

$$\lambda_{mn}^2 v_{3mn} = \beta_n \lambda_{mn} \varkappa_2 x_1 [c_{1mn}(t) \exp(-\lambda_{mn} x_1) - c_{2mn}(t) \exp(\lambda_{mn} x_1)] +$$

$$+ \beta_n [c_{3mn}(t) \exp(-\lambda_{mn} x_1) + c_{4mn}(t) \exp(\lambda_{mn} x_1)] -$$

$$- \alpha_m [c_{5mn}(t) \exp(-\lambda_{mn} x_1) + c_{6mn}(t) \exp(\lambda_{mn} x_1)] \tag{1.41}$$

Далее при условиях (1.19), (1.20) мы рассмотрим три вида граничных условий на гранях AD и BC.

Задача 1а. Граничные условия имеют вид (1.19), (1.20) и

$$u_1|_{x_1=0} = \delta_1, \qquad \sigma_{12}|_{x_1=0} = S_1, \qquad \sigma_{13}|_{x_1=0} = T_1, \qquad \left.\frac{\partial \theta}{\partial x_1}\right|_{x_1=0} = q_1 \tag{1.42}$$

$$u_1|_{x_1=a} = \delta_2, \qquad \sigma_{12}|_{x_1=a} = S_2, \qquad \sigma_{13}|_{x_1=a} = T_2, \qquad \left.\frac{\partial \theta}{\partial x_1}\right|_{x_1=a} = q_2 \tag{1.43}$$

где правые части в (1.42), (1.43) являются заданными функциями от x_2, x_3, t. Для каждых m, n с учетом (1.22) вместо (1.42), (1.43) получим

$$u_{1mn}|_{x_1=0} = \delta_{1mn}(t), \qquad u_{1mn}|_{x_1=a} = \delta_{2mn}(t) \tag{1.44}$$

$$\mu\left(\frac{\partial u_{2mn}}{\partial x_1} - \alpha_m u_{1mn}\right)\bigg|_{x_1=0} = S_{1mn}(t)$$

$$\mu\left(\frac{\partial u_{3mn}}{\partial x_1} - \beta_n u_{1mn}\right)\bigg|_{x_1=0} = T_{1mn}(t) \tag{1.45}$$

$$\mu\left(\frac{\partial u_{2mn}}{\partial x_1} - \alpha_m u_{1mn}\right)\bigg|_{x_1=a} = S_{2mn}(t)$$

$$\mu\left(\frac{\partial u_{3mn}}{\partial x_1} - \beta_n u_{1mn}\right)\bigg|_{x_1=a} = T_{2mn}(t) \tag{1.46}$$

$$\frac{\partial \theta_{mn}}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=0} = q_{1mn}(t), \qquad \frac{\partial \theta_{mn}}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=a} = q_{2mn}(t) \tag{1.47}$$

Непосредственным подсчетом на основе (1.29), (1.30) найдем

$$\beta_n u_{2mn} - \alpha_m u_{3mn} = \beta_n v_{2mn} - \alpha_m v_{3mn} = \omega_{v1mn} \tag{1.48}$$

Откуда с учетом (1.44)—(1.46) получим

$$\mu \frac{\partial \omega_{v1mn}}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=0} = \beta_n S_{1mn} - \alpha_m T_{1mn}$$

$$\mu \frac{\partial \omega_{v1mn}}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=a} = \beta_n S_{2mn} - \alpha_m T_{2mn} \tag{1.49}$$

Подставляя (1.39) в (1.49), найдем $c_{5mn}(t)$ и $c_{6mn}(t)$. Непосредственным подсчетом на основе (1.28)—(1.30) и (1.35) найдем

$$\lambda_{mn}^2 u_{1mn} + \frac{\partial}{\partial x_1}(\alpha_m u_{2mn} + \beta_n u_{3mn}) = \lambda_{mn}^2 v_{1mn} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_1}(\alpha_m v_{2mn} + \beta_n v_{3mn}) = \lambda_{mn}^2 v_{1mn} + \frac{\partial R_{mn}}{\partial x_1} = \Omega_{vmn}$$

Откуда, используя (1.44)—(1.46), получим

$$\mu \Omega_{vmn}\big|_{x_1=0} = \alpha_m S_{1mn} + \beta_n T_{1mn} + 2\mu\lambda_{mn}^2 \delta_{1mn} \tag{1.50}$$

$$\mu \Omega_{vmn}\big|_{x_1=a} = \alpha_m S_{2mn} + \beta_n T_{2mn} + 2\mu\lambda_{mn}^2 \delta_{2mn} \tag{1.51}$$

Подставляя (1.34) в (1.50), (1.51), найдем $c_{1mn}(t)$ и $c_{2mn}(t)$. Далее условия (1.44) с учетом (1.28) и (1.47) дают

$$\left[v_{1mn} + \gamma_1 \int_0^t q_{1mn}(\tau)\, d\tau + \frac{\partial F_{mn}}{\partial x_1}\right]\bigg|_{x_1=0} = \delta_{1mn}(t) \tag{1.52}$$

$$\left[v_{1mn} + \gamma_1 \int_0^t q_{2mn}(\tau)\, d\tau + \frac{\partial F_{mn}}{\partial x_1}\right]\bigg|_{x_1=a} = \delta_{2mn}(t) \tag{1.53}$$

Подставляя (1.37) в (1.52), (1.53) и учитывая, что $c_{1mn}(t)$ и $c_{2mn}(t)$ уже известны, найдем $c_{3mn}(t)$ и $c_{4mn}(t)$. Введем новую искомую функцию $\widetilde{\theta}_{mn}(x_1, t)$ с помощью соотношения

$$\theta_{mn}(x_1, t) = \widetilde{\theta}_{mn}(x_1, t)\exp(-k^2\lambda_{mn}^2 t) + q_{1mn}(t)\,x_1 + \\ + \frac{x_1^2}{2a}\,[q_{2mn}(t) - q_{1mn}(t)] \tag{1.54}$$

Подставляя (1.54) в (1.31) и (1.47), получим

$$\dot{\widetilde{\theta}}_{mn} = k^2\frac{\partial^2\widetilde{\theta}_{mn}}{\partial x_1^2} + \widetilde{M}_{mn} - \eta\varkappa\exp(k^2\lambda_{mn}^2 t)\,\dot{e}_{vmn} \tag{1.55}$$

$$\left.\frac{\partial\widetilde{\theta}_{mn}}{\partial x_1}\right|_{x_1=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial\widetilde{\theta}_{mn}}{\partial x_1}\right|_{x_1=a} = 0, \qquad \widetilde{\theta}_{mn}\big|_{t=0} = \widetilde{\theta}_{mn}^0 \tag{1.56}$$

где $\widetilde{M}_{mn}$, $\widetilde{\theta}_{mn}^0$ известны, e_{vmn} нами найдена. Решение задачи (1.55), (1.56) известно [8]. Далее $u_{imn}(x_1, t)$ $(i = 1, 2, 3)$ найдем по (1.28)–(1.30) с учетом (1.37), (1.40), (1.41). Задача решена.

Задача 1b. Граничные условия имеют вид (1.19), (1.20) и

$$u_2\big|_{x_1=0} = g_1, \quad u_3\big|_{x_1=0} = h_1, \quad \sigma_{11}\big|_{x_1=0} = p_1, \quad \theta\big|_{x_1=0} = \theta_1 \tag{1.57}$$

$$u_2\big|_{x_1=a} = g_2, \quad u_3\big|_{x_1=a} = h_2, \quad \sigma_{11}\big|_{x_1=a} = p_2, \quad \theta\big|_{x_1=a} = \theta_2 \tag{1.58}$$

где правые части в (1.57), (1.58) являются заданными функциями от x_2, x_3, t. Для каждых m, n с учетом (1.21) получим

$$u_{2mn}\big|_{x_1=0} = g_{1mn}(t), \qquad u_{3mn}\big|_{x_1=0} = h_{1mn}(t) \tag{1.59}$$

$$u_{2mn}\big|_{x_1=a} = g_{2mn}(t), \qquad u_{3mn}\big|_{x_1=a} = h_{2mn}(t) \tag{1.60}$$

$$(\lambda_1 + 2\mu)\,e_{vmn}\big|_{x_1=0} = p_{1mn}(t) + 2\mu\,[\alpha_m g_{1mn}(t) + \beta_n h_{1mn}(t)] + G_{mn}\big|_{x_1=0} \tag{1.61}$$

$$(\lambda_1 + 2\mu)\,e_{vmn}\big|_{x_1=a} = p_{2mn}(t) + 2\mu\,[\alpha_m g_{2mn}(t) + \beta_n h_{2mn}(t)] + G_{mn}\big|_{x_1=a} \tag{1.62}$$

$$\theta_{mn}\big|_{x_1=0} = \theta_{1mn}(t), \qquad \theta_{mn}\big|_{x_1=a} = \theta_{2mn}(t) \tag{1.63}$$

Подставляя (1.33) в (1.61), (1.62), найдем $c_{1mn}(t)$ и $c_{2mn}(t)$. Далее из (1.48), (1.59), (1.60) получим

$$\omega_{v1mn}\big|_{x_1=0} = \beta_n g_{1mn}(t) - \alpha_m h_{1mn}(t) \tag{1.64}$$

$$\omega_{v1mn}\big|_{x_1=a} = \beta_n g_{2mn}(t) - \alpha_m h_{2mn}(t) \tag{1.65}$$

Подставляя (1.39) в (1.64), (1.65), найдем $c_{5mn}(t)$, $c_{6mn}(t)$. Далее на основе (1.29), (1.30) найдем

$$\alpha_m u_{2mn} + \beta_n u_{3mn} = R_{mn} - \lambda_{mn}^2 \left(\gamma_1 \int_0^t \theta_{mn} d\tau + F_{mn} \right)$$

Поэтому с учетом (1.59), (1.60), (1.63) получим

$$R_{mn}\big|_{x_1=0} = \lambda_{mn}^2 \left(F_{mn}\big|_{x_1=0} + \gamma_1 \int_0^t \theta_{1mn}(\tau)\, d\tau \right) + \alpha_m g_{1mn}(t) + \beta_n h_{1mn}(t) \tag{1.66}$$

$$R_{mn}\big|_{x_1=a} = \lambda_{mn}^2 \left(F_{mn}\big|_{x_1=a} + \gamma_1 \int_0^t \theta_{2mn}(\tau)\, d\tau \right) + \alpha_m g_{2mn}(t) + \beta_n h_{2mn}(t) \tag{1.67}$$

Подставляя (1.36) в (1.66), (1.67) и учитывая, что $c_{1mn}(t)$ и $c_{2mn}(t)$ уже известны, найдем $c_{3mn}(t)$ и $c_{4mn}(t)$. Введем новую искомую функцию $\widehat{\theta}_{mn}(x_1, t)$ с помощью соотношения

$$\theta_{mn}(x_1, t) = \widehat{\theta}_{mn}(x_1, t) \exp(-k^2 \lambda_{mn}^2 t) + \theta_{1mn}(t) + \\ + \frac{x_1}{a} [\theta_{2mn}(t) - \theta_{1mn}(t)] \tag{1.68}$$

Подставляя (1.68) в (1.31) и (1.63), получим

$$\dot{\widehat{\theta}}_{mn} = k^2 \frac{\partial^2 \widehat{\theta}_{mn}}{\partial x_1^2} + \widehat{M}_{mn} - \eta \varkappa \exp(k^2 \lambda_{mn}^2 t)\, e_{vmn} \tag{1.69}$$

$$\widehat{\theta}_{mn}\big|_{x_1=0} = 0, \qquad \widehat{\theta}_{mn}\big|_{x_1=a} = 0, \qquad \widehat{\theta}_{mn}\big|_{t=0} = \widehat{\theta}_{mn}^0 \tag{1.70}$$

где $\widehat{M}_{mn}$, $\widehat{\theta}_{mn}^0$ известны, e_{vmn} нами найдена. Решение задачи (1.69), (1.70) известно [8]. Далее $u_{imn}(x_1, t)$ $(i = 1, 2, 3)$ найдем по (1.28)—(1.30) с учетом (1.37), (1.40), (1.41).

Задача 1с. Граничные условия имеют вид (1.19), (1.20), (1.42), (1.58). Тогда для каждых m, n получим как и ранее первое из соотношений (1.49), (1.50), (1.52) и затем (1.62), (1.65), (1.67). Подставляя (1.39) в первое из соотношений (1.49) и в (1.65), найдем $c_{5mn}(t)$, $c_{6mn}(t)$. Затем, подставляя (1.34) в (1.50) и (1.33) в (1.62), найдем $c_{1mn}(t)$, $c_{2mn}(t)$. Далее, подставляя (1.37) в (1.52) и (1.36) в (1.67) и учитывая, что $c_{1mn}(t)$ и $c_{2mn}(t)$ уже известны, найдем $c_{3mn}(t)$ и $c_{4mn}(t)$. Граничные условия для $\theta_{mn}(t)$

$$\left.\frac{\partial \theta_{mn}}{\partial x_1}\right|_{x_1=0} = q_{1mn}(t), \qquad \theta_{mn}\big|_{x_1=a} = \theta_{2mn}(t) \tag{1.71}$$

Введем новую искомую функцию $\widehat{\theta}_{mn}(x_1, t)$ с помощью соотношения

$$\theta_{mn}(x_1, t) = \widehat{\theta}_{mn}(x_1, t) \exp(-k^2 \lambda_{mn}^2 t) + \theta_{2mn}(t) + (x_1 - a)\, q_{1mn}(t) \tag{1.72}$$

Подставляя (1.72) в (1.31) и (1.71), получим

$$\breve{\theta}_{mn} = k^2 \frac{\partial^2 \breve{\theta}_{mn}}{\partial x_1^2} + \breve{M}_{mn} - \eta\varkappa \exp(k^2 \lambda_{mn}^2 t)\, e_{vmn} \qquad (1.73)$$

$$\left.\frac{\partial \breve{\theta}_{mn}}{\partial x_1}\right|_{x_1=0} = 0, \qquad \breve{\theta}_{mn}\big|_{x_1=a} = 0, \qquad \breve{\theta}_{mn}\big|_{t=0} = \breve{\theta}^0_{mn} \qquad (1.74)$$

где $\breve{M}_{mn}$, $\breve{\theta}^0_{mn}$ известны, e_{vmn} нами найдена. Решение задачи (1.73), (1.74) известно [8]. Далее $u_{imn}(x_1, t)$ $(i = 1, 2, 3)$ найдем по (1.28)—(1.30) с учетом (1.37), (1.40), (1.41).

Задача 2. На гранях AD и BC заданы граничные условия вида

$$u_1\big|_{x_1=0} = 0, \quad \sigma_{12}\big|_{x_1=0} = 0, \quad \sigma_{13}\big|_{x_1=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial \theta}{\partial x_1}\right|_{x_1=0} = 0 \qquad (1.75)$$

$$u_1\big|_{x_1=a} = 0, \quad \sigma_{12}\big|_{x_1=a} = 0, \quad \sigma_{13}\big|_{x_1=a} = 0, \quad \left.\frac{\partial \theta}{\partial x_1}\right|_{x_1=a} = 0 \qquad (1.76)$$

Учитывая наше предположение о характере внешних воздействий, искомые функции разложим в ряды Фурье вида

$$u_1 = \sum_{m,\, n=0}^{+\infty} u^{(2)}_{1mn}(x_2, t) \sin \gamma_m x_1 \cos \beta_n x_3$$

$$u_2 = \sum_{m,\, n=0}^{+\infty} u^{(2)}_{2mn}(x_2, t) \cos \gamma_m x_1 \cos \beta_n x_3$$

$$u_3 = \sum_{m,\, n=0}^{+\infty} u^{(2)}_{3mn}(x_2, t) \cos \gamma_m x_1 \sin \beta_n x_3$$

$$\theta = \sum_{m,\, n=0}^{+\infty} \theta^{(2)}_{mn}(x_2, t) \cos \gamma_m x_1 \cos \beta_n x_3$$

где $\gamma_m \equiv \dfrac{\pi m}{a}$; $\beta_n = \dfrac{\pi n}{c}$. Аналогичные разложения для известных функций легко выписать. Условия (1.75), (1.76) удовлетворены. Так же, как и в первой задаче, точные решения можно получить в следующих случаях.

Задача 2а. Граничные условия имеют вид (1.75), (1.76) и

$$u_2\big|_{x_2=0} = \delta_3, \quad \sigma_{12}\big|_{x_2=0} = S_3, \quad \sigma_{23}\big|_{x_2=0} = T_3, \quad \left.\frac{\partial \theta}{\partial x_2}\right|_{x_2=0} = q_3 \qquad (1.77)$$

$$u_2\big|_{x_2=b} = \delta_4, \quad \sigma_{12}\big|_{x_2=b} = S_4, \quad \sigma_{23}\big|_{x_2=b} = T_4, \quad \left.\frac{\partial \theta}{\partial x_2}\right|_{x_2=0} = q_4 \qquad (1.78)$$

Задача 2b. Граничные условия имеют вид (1.75), (1.76) и

$$u_1\big|_{x_2=0} = g_3, \quad u_3\big|_{x_2=0} = h_3, \quad \sigma_{22}\big|_{x_2=0} = p_3, \quad \theta\big|_{x_2=0} = \theta_3 \qquad (1.79)$$

$$u_1\big|_{x_2=b} = g_4, \quad u_3\big|_{x_2=b} = h_4, \quad \sigma_{22}\big|_{x_2=b} = p_4, \quad \theta\big|_{x_2=b} = \theta_4 \qquad (1.80)$$

Правые части в (1.77)—(1.80) являются заданными функциями от x_1, x_3, t.

Задача 2c. Граничные условия имеют вид (1.75), (1.76) и (1.78), (1.79). Задачи 2a, 2b, 2c решаются так же, как задачи 1a, 1b, 1c.

Задача 3. На гранях AB и CD заданы граничные условия

$$u_1\big|_{x_2=0} = 0, \quad u_3\big|_{x_2=0} = 0, \quad \sigma_{22}\big|_{x_2=0} = 0, \quad \theta\big|_{x_2=0} = 0 \qquad (1.81)$$

$$u_1\big|_{x_2=b} = 0, \quad u_3\big|_{x_2=b} = 0, \quad \sigma_{22}\big|_{x_2=b} = 0, \quad \theta\big|_{x_2=b} = 0 \qquad (1.82)$$

С учетом нашего предположения о характере внешних воздействий искомые функции разложим в ряды Фурье вида

$$u_1 = \sum_{m,\,n=0}^{+\infty} u_{1mn}^{(3)}(x_1, t) \sin \alpha_m x_2 \cos \beta_n x_3$$

$$u_2 = \sum_{m,\,n=0}^{+\infty} u_{2mn}^{(3)}(x_1, t) \cos \alpha_m x_2 \cos \beta_n x_3$$

$$u_3 = \sum_{m,\,n=0}^{+\infty} u_{3mn}^{(3)}(x_1, t) \sin \alpha_m x_2 \sin \beta_n x_3$$

$$\theta = \sum_{m,\,n=0}^{+\infty} \theta_{mn}^{(3)}(x_1, t) \sin \alpha_m x_2 \cos \beta_n x_3$$

где $\alpha_m = \dfrac{\pi m}{b}$, $\beta_n = \dfrac{\pi n}{c}$. Условия (1.81), (1.82) удовлетворены. Точные решения можно получить в следующих случаях.

Задача 3a. Граничные условия имеют вид (1.81), (1.82), (1.42), (1.43).

Задача 3b. Граничные условия имеют вид (1.81), (1.82), (1.57), (1.58).

Задача 3c. Граничные условия имеют вид (1.81), (1.82), (1.42), (1.58).

Задача 4. На гранях AD и BC заданы граничные условия вида

$$u_2\big|_{x_1=0} = 0, \quad u_3\big|_{x_1=a} = 0, \quad \sigma_{11}\big|_{x_1=0} = 0, \quad \theta\big|_{x_1=0} = 0 \qquad (1.83)$$

$$u_2\big|_{x_1=a} = 0, \quad u_3\big|_{x_1=a} = 0, \quad \sigma_{11}\big|_{x_1=a} = 0, \quad \theta\big|_{x_1=a} = 0 \qquad (1.84)$$

Искомые функции разложим в ряды Фурье вида

$$u_1 = \sum_{m,\,n=0}^{+\infty} u_{1mn}^{(4)}(x_2, t) \cos \gamma_m x_1 \cos \beta_n x_3$$

$$u_2 = \sum_{m,\,n=0}^{+\infty} u_{2mn}^{(4)}(x_2, t) \sin \gamma_m x_1 \cos \beta_n x_3$$

$$u_3 = \sum_{m,\,n=0}^{+\infty} u_{3mn}^{(4)}(x_2,\ t)\sin\gamma_m x_1 \sin\beta_n x_3$$

$$\theta = \sum_{m,\,n=0}^{+\infty} \theta_{mn}^{(4)}(x_2,\ t)\sin\gamma_m x_1 \cos\beta_n x_3$$

где $\gamma_m = \frac{\pi m}{a}$, $\beta_n = \frac{\pi n}{c}$. Условия (1.83), (1.84) удовлетворены. Точные решения можно получить в следующих случаях.

Задача 4a. Граничные условия имеют вид (1.83), (1.84), (1.77), (1.78).

Задача 4b. Граничные условия имеют вид (1.83), (1.84), (1.79), (1.80).

Задача 4c. Граничные условия имеют вид (1.83), (1.84), (1.78), (1.79).

Задача 5. На гранях *AD* и *BC* заданы граничные условия вида (1.75), (1.84). Искомые функции разложим в ряды Фурье вида

$$u_1 = \sum_{m,\,n=0}^{+\infty} u_{1mn}^{(5)}(x_2,\ t)\sin\zeta_m x_1 \cos\beta_n x_3$$

$$u_2 = \sum_{m,\,n=0}^{+\infty} u_{2mn}^{(5)}(x_2,\ t)\cos\zeta_m x_1 \cos\beta_n x_3$$

$$u_3 = \sum_{m,\,n=0}^{+\infty} u_{3mn}^{(5)}(x_2,\ t)\cos\zeta_m x_1 \sin\beta_n x_3$$

$$\theta = \sum_{m,\,n=0}^{+\infty} \theta_{mn}^{(5)}(x_2,\ t)\cos\zeta_m x_1 \cos\beta_n x_3$$

где $\zeta_m = \frac{(2m+1)\pi}{2a}$, $\beta_n = \frac{\pi n}{c}$. Аналогичные разложения для известных функций легко выписать, используя соотношения

$$\int_0^a \sin\zeta_m x \sin\zeta_k x dx = \int_0^a \cos\zeta_m x \cos\zeta_k x dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq k \\ \frac{a}{2} & \text{при } m = k \end{cases} \quad (1.85)$$

Граничные условия (1.75), (1.84) удовлетворены. Точные решения можно получить в следующих случаях.

Задача 5a. Граничные условия имеют вид (1.75), (1.84), (1.77), (1.78).

Задача 5b. Граничные условия имеют вид (1.75), (1.84), (1.79), (1.80).

Задача 5c. Граничные условия имеют вид (1.75), (1.84), (1.78), (1.79).

Задача 6. На гранях *AB* и *CD* заданы граничные условия (1.81), (1.20). Искомые функции разложим в ряды Фурье вида

$$u_1 = \sum_{m,\, n=0}^{+\infty} u_{1mn}^{(6)}(x_1,\ t) \sin \zeta_m x_2 \cos \beta_n x_3$$

$$u_2 = \sum_{m,\, n=0}^{+\infty} u_{2mn}^{(6)}(x_1,\ t) \cos \zeta_m x_2 \sin \beta_n x_3$$

$$u_3 = \sum_{m,\, n=0}^{+\infty} u_{3mn}^{(6)}(x_1,\ t) \sin \zeta_m x_2 \sin \beta_n x_3$$

$$\theta = \sum_{m,\, n=0}^{+\infty} \theta_{mn}^{(6)}(x_1,\ t) \sin \zeta_m x_2 \cos \beta_n x_3$$

где $\zeta_m = \frac{(2m+1)\pi}{2b}$, $\beta_n = \frac{\pi n}{c}$. Используя соотношения, аналогичные (1.85), легко выписать соответствующие разложения и для известных функций. Точные решения можно получить в следующих случаях.

Задача 6a. Граничные условия имеют вид (1.81), (1.20), (1.42), (1.43).

Задача 6b. Граничные условия имеют вид (1.81), (1.20), (1.57), (1.58).

Задача 6c. Граничные условия имеют вид (1.81), (1.20), (1.42), (1.58).

Далее, если заданы нормальные смещения, касательные усилия и тепловой поток, то такие граничные условия будем называть граничными условиями первого вида. Если же заданы касательные смещения, нормальные усилия и температура, то такие граничные условия будем называть граничными условиями второго вида. В настоящей работе получены решения для следующих качественно различных видов граничных условий.

1. На всех гранях бруса заданы граничные условия первого вида. Решение такой задачи получим, суммируя решения задач 1a и 2a (причем в одной из этих задач следует взять нулевые X_i и Q).

2. На всех гранях бруса заданы граничные условия второго вида. Решение такой задачи получим как сумму решений задач 3b и 4b.

3. На одной грани, например, AD заданы граничные условия первого вида, а на трех остальных — второго вида. Решение получим, суммируя решения задач 3c и 5b.

4. На одной грани, например, BC, заданы граничные условия второго вида, а на трех остальных — первого вида. Решение получим как сумму решений задач 1c и 5a.

5. На двух противоположных гранях, например, AB и CD заданы граничные условия первого вида, а на двух других — второго вида. Здесь надо взять сумму решений задач 1b и 4a.

6. На двух соседних гранях, например, AD и DC, заданы граничные условия первого вида, а на двух других — второго вида. Надо взять сумму решений задач 5c и 6c.

Автор благодарен профессору механико-математического факультета МГУ Б. Е. Победре за внимание к работе.

Казанский филиал Московского
энергетического института

Поступила 7 V 1980

Ա. Վ. ԲԵՐԴԱԿՉԻԵՎ

ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆԱՁԵՎ ԿՏՐՎԱԾՔՈՎ ՀԵԾԱՆԻ ՀԱՄԱՐ ՋԵՐՄԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ԿԱՊԱԿՑՎԱԾ ԽՌԱՉԱՓ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Մի քանի եզրային պայմանների դեպքում տրվում են ուղղանկյունաձև կտրվածքով հեծանի համար կապակցված ջերմաառաձգականության քվազիստատիկ խնդիրների լուծումները։

THREE-DIMENSIONAL PROBLEMS OF BOUND THERMOELASTICITY FOR A BEAM OF RECTANGULAR CROSSECTION

A. V. BERDAKCHIYEV

S u m m a r y

For the case of certain boundary conditions the solutions for quasistatic problems of thermoelasticity for a beam of rectangular crossection are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Победря Б. Е.* О связанных задачах механики сплошной среды. В сб.: «Упругость и неупругость», вып. 2. М., изд-во МГУ, 1971, с. 224—253.
2. *Новацкий В.* Обзор работ по динамическим проблемам термоупругости. Сб. переводов «Механика», 1966, № 6, с. 101—142.
3. *Шачнев В. А.* О новых результатах в теории сопряженной термоупругости. Приложение к книге [6], с. 237—250.
4. *Коляно Ю. М.* Обобщенная термомеханика. В сб.: «Математические методы и физико-механические поля», вып. 2. Киев, «Наукова думка», 1975, с. 42—47.
5. *Новацкий В.* Теория упругости. М., «Мир», 1975, 872 с.
6. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. М., «Мир», 1970, 256 с.
7. *Гродский Г. Д.* Интегрирование общих уравнений равновесия изотропного упругого тела при помощи ньютоновых потенциалов и гармонических функций. Изв. АН СССР, отд. мат. и естеств. н., 1935, № 1, с. 587—614.
8. *Бабич В. М. и др.* Линейные уравнения математической физики. СМБ. Под редакцией С. Г. Михлина. М., «Наука», 1964, 368 с.