ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIV, № 4, 1981 Механика

А. Г. БАГДОЕВ, А. В. ШЕКОЯН

ТРЕХМЕРНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В ПЬЕЗОДИЭЛЕКТРИКАХ И ПЬЕЗОПОЛУПРОВОДНИКАХ

Распространение звуковых волн в разных средах изучено в работах [1—3, 21].

Опубликовано много работ, в которых изучали акустические волны в пьезоэлектриках (см., напр., обзоры, монографии [4—10]). В большинстве этих работ [4—9] ограничиваются рассмотрением одномерного приближения. В результате остаются вне поля зрения представляющие интерес вопросы о пространственном распределении звуковых волн, зарядов, о фокусировке (дефокусировке), о самофокусировке (самодефокусировке) звуковых волн и о некоторых других эффектах.

В статье [10] выведены трехмерные уравнения для амплитуды акустической волны, однако вторые пространственные производные по поперечным координатам, которые при пространственно ограниченных волнах (например, при звуковых пучках) часто того же порядка, что и первая производная по продольной координате, там не сохранены.

Распространение звуковых волн в пьезоэлектриках описывается уравнениями теории упругости и Максвелла [4—10]. Эти уравнения с учетом нелинейностей (упругой, геометрической, электрострикционной и электронно-концентрационной) имеют следующий вид:

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=\frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} \tag{1}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E}'=-\mu'_{ik}\left(\frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t_1^2}+\frac{\partial \vec{j}}{\partial t_1}\right) \tag{2}$$

$$\operatorname{div}\vec{D}=-qn \tag{3}$$

$$j_i=\sigma^0_{ik}E'_k+qd_{ik}\frac{\partial n}{\partial x_k} \tag{4}$$

$$D_i=\varepsilon_{ik}E'_k+e_{ikl}S_{kl}+a_{iklm}E'_m S_{lm} \tag{5}$$

$$\sigma'_{ik}=\frac{\partial}{\partial\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)}\left[\frac{1}{2}S_{ij}S_{kl}+\frac{1}{6}C_{ijklmn}S_{ij}S_{kl}S_{mn}\right]-e_{lik}E'_l-a_{iklm}E'_m E'_l \tag{6}$$

$$S_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_p}{\partial x_i}\frac{\partial u_p}{\partial x_j}\right) \tag{7}$$

$$\sigma^0_{ik}=\sigma_{ik}+\sigma^{нел}_{ik}=q\mu_{ik}(n_0+n) \tag{8}$$

где u_i — компонента смещения, ρ — плотность, $\partial/\partial t$ и $\partial/\partial t_1$ — производные по времени при лагранжевом и эйлеровом описании, σ'_{ik} — тензор напряжения, $\vec{E}$ и $\vec{D}$ — векторы электрического напряжения и смещения, q — заряд электрона, n_0 и n — равновесная и возмущенная звуковой волной концентрация электронов, $\vec{j}$ — вектор плотности электрического тока, σ^0_{ik}, σ_{ik}, $\sigma^{нел}_{ik}$ — общий, линейный и нелинейный тензоры электропроводности, d_{ik} и μ_{ik} — тензоры коэффициента диффузии и подвижности носителей заряда, c_{iklm}, C_{ijklmn}, e_{ikl}, a_{iklm}, ε_{ik} и μ'_{ik} — соответственно, тензоры модуля линейной и нелинейной упругости, пьезомодуля, электрострикции, диэлектрической и магнитной проницаемостей, S_{kl} — тензор деформации. Электрическое поле $E'_m = E_m+E^0_m$, где E_m — переменное поле, обусловленное пьезосвойством среды, а E^0_m — постоянное поле, создаваемое внешними источниками.

Для сокращения записи уравнения (1)—(8) выписаны в таком виде, чтобы они были верны как для пьезодиэлектрика, так и для пьезополупроводника.

Уравнения (2) и (3) написаны в переменных Эйлера, а остальные — в переменных Лагранжа.

Будем предполагать, что звуковая волна распространяется в полубесконечной среде. Выберем ортогональную координатную систему x_1, x_2, x_3 так, чтобы плоскость $x_3=0$ совпала с поверхностью среды. Нормаль к фронту звуковой волны совпадает с осью x_3. В направлении $x_3>0$ распространяется звуковая волна. Предполагается, что в плоскости $x_3=0$, $u_1=u_2=0$, а в ограниченной ее части $u_3\neq 0$.

Для простоты выбираем направление распространения волны (ось x_3) совпадающим с осью симметрии кристалла и рассмотрим гексагональную ($6\,mm$) и тетрагональную ($4\,mm$) систему, в которых отличны от нуля [8, 11]: модули упругости $c_{11}=c_{22}$, $c_{12}=c_{21}$, $c_{31}=c_{13}=c_{23}=c_{32}$, $c_{44}=c_{55}$, c_{33}, c_{66}, (в гексагональной $c_{66}=(c_{11}-c_{12})/2$), пьезомодули $e_{15}=e_{24}$, $e_{31}=e_{32}$, e_{33}, диэлектрические проницаемости $\varepsilon_{11}=\varepsilon_{22}$, ε_{33}, нелинейные упругие модули C_{111}, C_{112}, C_{114}, C_{124}, C_{144}, C_{133}, C_{134}, C_{155}, C_{222}, C_{333}, C_{344}. У электрострикционного тензора отличны от нуля те же члены, что и у тензора модуля упругости. Здесь и далее будем пользоваться тензорной формой записи, используя общепринятые обозначения [7, 8, 12].

Будет рассмотрен случай, когда E^0_3 параллельно оси x_3.

Переходим во всех уравнениях (1)—(8) к переменным Лагранжа. Тогда система (1)—(8) примет следующий вид:

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = c_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + c_{12} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + c_{13} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3 \partial x_1} + c_{66} \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right) +$$

$$+ c_{44} \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right) - e_{15} \frac{\partial E_1}{\partial x_3} - e_{31} \frac{\partial E_3}{\partial x_1} \tag{9}$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = c_{11} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + c_{12} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + c_{13} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} + c_{44} \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \right) +$$

$$+ c_{66} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} \right) - e_{15} \frac{\partial E_2}{\partial x_3} - e_{31} \frac{\partial E_3}{\partial x_2} \tag{10}$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = (c_{13} + c_{44}) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3} \right) + c_{44} \Delta_\perp u_3 + c_{33} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} -$$

$$- e_{15} \left(\frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} \right) - \left(e_{33} + 2a_{33} E_3^0 \right) \frac{\partial E_3}{\partial x_3} - 2a_{33} E_3 \frac{\partial E_3}{\partial x_3} +$$

$$+ (2c_{44} + C_{344}) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) +$$

$$+ (2c_{33} + C_{333}) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + c_{44} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \Delta_\perp u_3 \tag{11}$$

$$\frac{\partial^2 E_2}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 E_1}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 E_1}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 E_3}{\partial x_1 \partial x_3} = - \mu_{11}' \left[e_{15} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) + \right.$$

$$\left. + \varepsilon_{11} \frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2} + \sigma_{11} \frac{\partial E_1}{\partial t} + q d_{11} \frac{\partial^2 n}{\partial x_1 \partial t} \right] \tag{12}$$

$$\frac{\partial^2 E_1}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 E_2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 E_2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 E_3}{\partial x_2 \partial x_3} = - \mu_{11}' \left[e_{15} \left(\frac{\partial^3 u_2}{\partial t^2 \partial x_3} + \frac{\partial^3 u_3}{\partial t^2 \partial x_2} \right) + \right.$$

$$\left. + \varepsilon_{11} \frac{\partial^2 E_2}{\partial t^2} + \sigma_{11} \frac{\partial E_2}{\partial t} + q d_{11} \frac{\partial^2 n}{\partial x_2 \partial t} \right] \tag{13}$$

$$\frac{\partial^2 E_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 E_2}{\partial x_2 \partial x_3} - \Delta_\perp E_3 = - \mu_{33}' \left[e_{31} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + \right.$$

$$(e_{33} + a_{33} E_3^0) \left(\frac{\partial^3 u_3}{\partial t^2 \partial x_3} - 2 \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_3^2 \partial t} \frac{\partial u_3}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \right) +$$

$$+ \varepsilon_{33} \frac{\partial^2 E_3}{\partial t^2} - 2\varepsilon_{33} \frac{\partial^2 E_3}{\partial x_3 \partial t} \frac{\partial u_3}{\partial t} - \varepsilon_{33} \frac{\partial E_3}{\partial x_3} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} +$$

$$+ a_{33}\left(E_3 \frac{\partial^3 u_3}{\partial t^2 \partial x_3} + 2\frac{\partial^2 u_3}{\partial t \partial x_3}\frac{\partial E_3}{\partial t} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\frac{\partial^2 E_3}{\partial t^2}\right) +$$

$$+ (e_{33} + a_{33}E_3^0)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2 + \varepsilon_{33}\frac{\partial E_3}{\partial t} + q\mu_{33}E_3^0\frac{\partial n}{\partial t} +$$

$$+ q\mu_{33}n\frac{\partial E_3}{\partial t} + q\mu_{33}E_3\frac{\partial n}{\partial t} + qd_{33}\frac{\partial^2 n}{\partial t \partial x_3}\Bigg] \tag{14}$$

$$e_{15}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + e_{15}\Delta_\perp u_3 + e_{31}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + e_{33}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} +$$

$$+ \varepsilon_{11}\left(\frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2}\right) + \varepsilon_{33}\frac{\partial E_3}{\partial x_3} = -qn \tag{15}$$

где $\Delta_\perp = \frac{\partial^2}{\partial x_1} + \frac{\partial^2}{\partial x_2}$.

В уравнениях (9), (10), (12), (13), (15) опущены, а в (11), (14) упрощены нелинейные члены, сохранены только те члены, в которые входят E_3, u_3 и n. В пьезополупроводниках будем пренебрегать геометрической нелинейностью, тогда можно отождествлять переменные Лагранжа и Эйлера. Поэтому в уравнениях (9)—(15) члены, обусловленные пьезополупроводниковыми свойствами, не изменились после перехода к описанию Лагранжа.

В пьезодиэлектриках и пьезополупроводниках звуковая волна распространяется совершенно различным образом, поэтому рассмотрим их раздельно.

1. *Пьезодиэлектрики.* В этой среде $n = j = 0$. Тогда основными типами нелинейности будут упругая, геометрическая и электрострикционная. Уравнения, описывающие распространение звуковых волн в такой среде, — это (9)—(14) с учетом вышеуказанных условий.

Если ограничиться одномерным приближением, то связанная система уравнений (9)—(14) расщепляется на пары уравнений (9), (12), (10), (13) и (11), (14), то есть волновые движения, обусловленные $(E_1\ u_1)$, $(E_2\ u_2)$ и $(E_3\ u_3)$ распространяются раздельно, не взаимодействуя друг с другом.

Из системы (9)—(14) видно, что в трехмерном случае волновые движения взаимосвязаны и раздельно распространяться не могут.

В том случае, когда в среде распространяется гармоническая плоская продольная волна, в линейном приближении скорость ее имеет следующий вид:

$$v^2 = \frac{c_{33}}{\rho} + \frac{e_{33}^2}{\rho\varepsilon_{33}} + \frac{2a_{33}e_{33}E_3^0}{\rho\varepsilon_{33}} + \frac{a_{33}(E_3^0)^2}{\rho\varepsilon_{33}} \tag{1.1}$$

Если подставить в выражение (1.1) $E_3^0 = 0$, то v^2 совпадает со скоростью, которая была получена ранее для случая распространения звуковой волны с пьезодиэлектриках в одномерном приближении [4—8]

Как видно из (1.1), при $e_{33} = 0$ среда под действием E_3^0 как бы приобретает пьезосвойство [5].

Систему (9)—(14) удобно изучить в координатной системе, движущейся со скоростью волны,

$$\delta\tau' = \tau = t - \frac{x_3}{v}, \qquad x_1 = \delta^{-1/2} x_1, \qquad x_2 = \delta^{-1/2} x_2$$

где δ — малый параметр, который характеризует порядок малости нормальной к волне скорости частиц. Порядки $x_{1,2}$ выбраны [1, 14] такими же, как в газодинамике.

Ввиду того, что у входа в среду создаются только продольные смещения, разумно предполагать, что поперечные смещения и электрические поля малы по сравнению с продольными. Поэтому отношение смещений и электрических полей u_1, u_2, E_1, E_2, u_3 и E_3 к их характерным величинам имеют порядки малости $\delta^{3/2}$, $\delta^{3/2}$, δ^2 и δ, соответственно. Учитывая это, в уравнениях (9), (10), (12) и (13) отбрасываем члены по порядку малости выше $\delta^{3/2}$, а в уравнениях (11) и (14) — выше, чем δ. Далее последовательно исключаем величины u_1, u_2, E_1, E_2 и E_3. В членах, где E_3 стоит под знаком дифференцирования по координатам x_1 и x_2, а также в нелинейных членах E_3 исключается с помощью выражения, которое связывает главные члены уравнения (14) и имеет следующий вид:

$$E_3 = \frac{e_{33} + a_{33}E_3^0}{v\varepsilon_{33}} \frac{\partial u_3}{\partial \tau} \tag{1.2}$$

Под главными членами подразумеваем те члены, которые в данном уравнении по порядку — наибольшие.

Члены, которые содержат отношение скорости упругой волны к скорости света, как малые, пренебрегаются. Тогда для смещения u_3 получается следующее уравнение:

$$-\frac{\partial^2 u_3}{\partial\tau\partial x_3} + D\Delta_\perp u_3 + G\frac{\partial^2 u_3}{\partial\tau^2}\frac{\partial u_3}{\partial\tau} = 0 \tag{1.3}$$

Для дальнейших исследований удобно уравнение (1.3) преобразовать к виду

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_3} - G\Psi\frac{\partial\Psi}{\partial\tau}\right) = D\Delta_\perp\Psi \tag{1.4}$$

где $\Psi = \partial u_3/\partial\tau$,

$$G = \left\{\frac{3c_{33} + C_{333}}{v^2} + \frac{2\,(e_{33} + a_{33}E_3^0)^2}{v^2\varepsilon_{33}}\left(1 + \frac{3a_{33}}{2\varepsilon_{33}}\right)\right\}\Big/2c_{33} \tag{1.5}$$

$$
D=\frac{v}{2c_{33}}\left\{\frac{(c_{13}+c_{44})^2}{\rho v_p^2}+c_{44}+\left[\frac{(e_{31}+e_{15})(c_{13}+c_{44})}{\rho v_p^2}+e_{15}\right]\frac{(e_{33}+a_{33}E_3^0)}{\varepsilon_{33}}+\right.
$$

$$
\left.+\left[\left(e_{31}+\frac{\mu_{11}' e_{15}}{\mu_{33}'}\right)\frac{(c_{13}+c_{44})}{\rho v_p^2}+\frac{\mu_{11}' e_{15}}{\mu_{33}'}\right]\frac{(e_{33}+2a_{33}E_3^0)}{\varepsilon_{33}}\right\} \tag{1.6}
$$

$$
v_p^2 = v^2 - c_{44}/\rho
$$

В выражении (1.6) было пренебрежено малыми членами, содержащими пьезомодули, возведенные в степень выше второй. Из (1.5) видно, что когда $E_3^0 = -e_{33}/a_{33}$ среда ведет себя как чисто упругая с точки зрения нелинейных свойств.

Уравнение (1.4) по своей математической форме совпадает с уравнением нелинейной акустики, выведенным в работах [13, 14] для ограниченных звуковых пучков, распространяющихся в жидких и газообразных средах без диссипации, а также с уравнениями, выведенными в [15, 16], если пренебречь в них диссипацией и дисперсией. Существенное различие заключается в том, что коэффициенты G и D могут быть $G \leqslant 0$, $D < 0$, что приводит к существенно новым свойствам. $G = 0$ означает, что хотя в среде распространяется интенсивная волна, электрострикционная и упругая нелинейности компенсируют друг друга, и волна распространяется как линейная.

Сперва рассмотрим случай, когда $G = 0$. Тогда для аксиально-симметричного и плоского случаев в безразмерных величинах уравнение (1.4) примет вид

$$
\frac{\partial^2 R}{\partial\tau\,\partial x'} = \frac{N_1}{4}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{\partial R}{\partial\xi}\right) \tag{1.7}
$$

где $x' = kx_3$, $N_1 = 4D/k^2a^2$, $R = E_3/E_0$, $\xi = r/a$, E_0 — амплитуда волны, а a — поперечный размер пучка при $x' = 0$, ω — частота, r — радиальная координата, которая в плоском случае совпадает с x_1 или x_2.

Предполагая, что при $x_3 = 0$

$$
R = e^{-\xi^2}\sin\theta \tag{1.8}
$$

и применяя метод разделения переменных для плоского и цилиндрического случаев, для R получим выражение (IX.2.14) и (IX.2.17) работы [14]. При $N_1 > 0$ все происходит так, как в газодинамике, то есть из-за дифракции звуковая волна расходится, первоначальный плоский фронт при больших N_1x' переходит в цилиндрическую или сферическую волну в смысле затухания решения, а поверхности волны являются эллипсами. В отличие от газодинамики при $N_1 < 0$, хотя амплитуда продолжает оставаться такой же, как и для расходящейся волны, при больших N_1x' фронт волны имеет форму гиперболы.

Когда нелинейные эффекты проявляются сильнее, чем дифракционные, уравнение (1.4) в безразмерных переменных примет вид

$$
\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\alpha R\frac{\partial R}{\partial\theta}\right)=0 \tag{1.9}
$$

где $\theta = \omega\tau$, $x = GE_0\omega x_3$, $\alpha = 1$ или -1 в зависимости от знака G. Предположим, что остается в силе условие (1.8). Когда $\alpha = 1$, звуковая волна распространяется, как в газах и жидкостях. При малых $0 < x < 1$ решение уравнения (1.9) можно представить в виде формулы (IX.3.1) из [14], которое при $x > 1$ переходит в пилообразную волну сжатия. Когда $\alpha = -1$, при больших x в среде распространяется пилообразная волна разрежения. В обоих случаях ширина пучка звуковой энергии остается неизменной.

В общем случае при наличии дифракции и нелинейности изучение для больших и малых $N = 2D/\omega^2\rho v GE_0 a^2$ уравнения (1.4) дает результаты близкие тем, что были получены выше [14].

Когда распространяется ограниченный в пространстве в виде пучка импульс сжатия или разрежения, ограничиваясь приближением нелинейной геометрической акустики, подобно [14] можно показать, что при $G < 0$ импульс сжатия, распространяясь, становится сходящимся, увеличивается длительность импульса, а импульс разрежения расходится, длительность импульса уменьшается. В газах и жидкостях при $G > 0$ имеет место обратный характер распространения пучка.

Уравнение типа (1.4) можно вывести также тогда, когда звуковая волна распространяется в кристалле ромбической кристаллической системы с симметрией $(2mm)$ вдоль оси второго порядка. В этой кристаллической системе все постоянные, отличные от нуля, остаются те же, что и в гексагональной и тетрагональной системах, только некоторые равенства модулей, приведенных выше, здесь не осуществляются [8, 11]. Это приводит к тому, что правая часть уравнения (1.4) имеет вид:

$$D_1 \frac{\partial^2 E_3}{\partial x_1^2} + D_2 \frac{\partial^2 E_3}{\partial x_2^2}$$

где $D_1 = D$, а D_2 получается из D заменой c_{44}, c_{13}, e_{13}, e_{15}, ε_{11} на c_{55}, c_{23} e_{24}, ε_{22}, соответственно. Это означает, что аксиально симметричный пучок в этой кристаллической системе осуществить невозможно. Однако после перехода к координатной системе $x_1 = (\pm D_1)^{-1/2} x_1$, $x_2 = \pm D_2^{-1/2} x_2$, получим уравнение (1.4), если в нем положить $D = \pm 1$.

До сих пор мы рассматривали однородную среду. В неоднородной среде для произвольной волны старшие производные от u_3 не меняются [17] и только должно быть добавлено в (1.3) слагаемое, содержащее производную первого порядка $\partial u_3/\partial\tau$, которое того же порядка, что и остальные члены. Не проводя выкладок, можно утверждать, что следует в (1.3) прибавить $\dfrac{\partial u_3}{\partial\tau} d(\ln\varphi)/dx_3$, φ — одномерное по x_3 (нормали к волне) линейное лучевое решение для $\dfrac{\partial u_3}{\partial t}$. Значение φ можно определить по уравнению, выражающему сохранение возмущенной энергии волны $\rho v_1^2 \sigma v = \text{const}$, выведенному в [18, 19], $\varphi \simeq v_1$ — скорость частиц, σ — площадь фронта волны внутри выбранной лучевой трубки.

2. *Пьезополупроводники.* В этих средах имеются свободные подвижные заряды, которые могут создавать электрический ток. Для простоты будем рассматривать электронный полупроводник. Полученные результаты легко обобщить также на дырочные полупроводники.

Под воздействием звуковой волны происходит перераспределение концентрации электронов, в результате чего первоначальная равновесная концентрация n_0 (независящая от координат и времени) изменяется и концентрация становится зависящей от координат и времени [4—9].

Наличие электронной подсистемы приводит к поглощению и дисперсии звуковой волны. Кроме того, основной является электронная концентрационная нелинейность [4, 5, 9], которая выявляется при меньших интенсивностях, чем другие нелинейности, как например, упругая, электрострикционная. Поэтому в уравнениях (9)—(15) надо пренебрегать всеми нелинейными членами, кроме тех, которые обусловлены концентрационной нелинейностью.

Уравнения (11), (14) и (15) после перехода в них к одномерному приближению и после линеаризации совпадают с ранее полученными уравнениями для пьезополупроводников [4—8].

Упростим уравнения (9)—(15), вводя, как в случае пьезодиэлектриков, малый параметр δ. Величины n и t имеют порядок δ. Отбрасываем в уравнениях (9) и (10) члены выше $\delta^{3/2}$, в (12) и (13) — выше $\delta^{-1/2}$, а в уравнениях (11), (14) и (15) — выше δ. Решение полученной системы уравнений ищем в следующем виде:

$$u_1, u_2, E_1, E_2 = \frac{1}{2}\{[u_{01}(x_1, x_2, x_3),\ u_{02}(x_1, x_2, x_3),\ E_{01}(x_1, x_2, x_3),$$

$$E_{02}(x_1, x_2, x_3)]\exp[i(\omega_1 t - kx_3)] + \text{к. с.}\}$$

$$u_3, E_3, n = \frac{1}{2}\{[u_{03}(x_1, x_2, x_3),\ E_{03}(x_1, x_2, x_3),\ n_{01}(x_1, x_2, x_3)]\times$$

$$\times\exp[i(\omega_1 t - kx_3)] + [u'_{03}(x_1, x_2, x_3),\ E'_{03}(x_1, x_2, x_3),\ n'_{01}(x_1, x_2, x_3)]\times$$

$$\times\exp[2i(\omega_1 t - kx_3)] + \text{к. с.}\} \tag{2.1}$$

где $\omega_1 = \omega + i\alpha$, ω_1 — комплексная частота, α — коэффициент поглощения.

После подстановки (2.1) в упрощенную систему уравнений (9) — (15) получим новую систему дифференциальных уравнений для амплитуд. При выводе этих амплитудных уравнений предполагается, что для амплитуд выполняется неравенство типа

$$\left|\frac{\partial^2 u_{03}}{\partial x_3^2}\right| \ll k\left|\frac{\partial u_{03}}{\partial x_3}\right|$$

Последовательно исключаем амплитуды u_{01}, u_{02}, E_{01}, E_{02}, n_{01}, u'_{03}, E'_{03}, n'_{01} и их комплексно-сопряженные величины. При этом амплитуды E_{03} и n_{01}, стоящие под знаком дифференцирования, а также все амплитуды в нелинейных членах, исключаются с использованием главных членов соответствующих уравнений. Тогда получается следующее уравнение для амплитуды u_{03}:

$$A\Delta_\perp u_{03} - 2ikB\frac{\partial u_{03}}{\partial x_3} + Pu_{03} = Cu_{03}|u_{03}|^2 \tag{2.2}$$

Коэффициенты A, B, P и C — комплексные. Если бы $A=B=1$, $P=0$, а C было действительной величиной, то уравнение (2.2) совпало бы с известным уравнением нелинейной оптики [20], а при переходе к одномерному приближению ($\Delta_\perp = 0$) — с уравнением интенсивности звуковой волны [4, 9].

Аналогичным образом, как в пьезодиэлектриках, уравнение (2.2) можно обобщить для ромбических кристаллов с симметрией ($2\,mm$), однако после замены переменных из-за комплексности коэффициентов новые переменные будут также комплексными.

Соотношение $P = 0$ дает дисперсионное уравнение. Оно комплексное и третьей степени относительно ω_1. Решаем его методом последовательного приближения, считая, что поглощение и дисперсия малы. В качестве нулевого приближения берем частоту звуковой волны в упругой среде $\omega_0^2 = c_{33}k^2/\rho$. Тогда для частоты и поглощения получим

$$\omega = \left(\frac{k^2c_{33}}{\rho}\right)^{1/2}\left\{1 + \frac{e_{33}^2k^2}{2c_{33}\varepsilon_{33}}\,\frac{(v_0-v_d)^2 + (k^2d_{33} + \sigma_{33}/\varepsilon_{33})\,d_{33}}{k^2(v_0-v_d)^2 + (k^2d_{33} + \sigma_{33}/\varepsilon_{33})^2}\right\} \tag{2.3}$$

$$\alpha = \frac{e_{33}^2kv_0}{2c_{33}\varepsilon_{33}}\,\frac{k\,(v-v_d)\,\sigma_{33}/\varepsilon_{33}}{k^2(v_0-v_d)^2 + (k^2d_{33} + \sigma_{33}/\varepsilon_{33})^2} \tag{2.4}$$

где $v_d = -\mu_{33}E_3^0$.

Из (2.4) видно, что при $v_0 - v_d < 0$, $\alpha < 0$, то есть звуковая волна усиливается. Это совпадает с полученным ранее результатом [4—8].

В общем виде коэффициенты A, B и C очень громоздки, поэтому надо их упростить. Во-первых, как малыми величинами пренебрежем членами, которые содержат отношение скорости звуковой волны к скорости света. Кроме того, в выражениях для A, B и C можно пренебречь членами, содержащими электромеханическую постоянную $e_{33}^2/2c_{33}\,\varepsilon_{33}$ во всех тех случаях, пока это пренебрежение не приведет к равенству нулю коэффициентов A, B и C. Электропроводность и коэффициент диффузии также малы, поэтому в суммах сохраняем только члены, содержащие их первый порядок. После этих упрощений, деля уравнение на коэффициент B и отделяя мнимые и действительные части в коэффициентах, получим

$$(A_1 + iA_2)\Delta_\perp u_{03} - 2ik\frac{\partial u_{03}}{\partial x_3} = (C_1 + iC_2)\,u_{03}|u_{03}|^2 \tag{2.5}$$

где а) $v_0 - v_d$ немало

$$A_1 = \frac{1}{M}\left\{(\sigma_{33} + k^2\varepsilon_{33}d_{33})^2\left[c_{44} + (c_{13} + c_{44})^2/(c_{33} - c_{44})\right] + \right.$$

$$\left. + \varepsilon_{33}^2 k^2 (v_0 - v_d)^2 \left[c_{44} - (c_{13} + c_{44})/(c_{33} - c_{44})\right]\right\} \tag{2.6}$$

$$A_2 = -\frac{1}{M}\left[2\varepsilon_{33}k(v_0 - v_d)(\sigma_{33} + k^2\varepsilon_{33}d_{33})(c_{13} + c_{44})^2/(c_{33} - c_{44})\right] \tag{2.7}$$

где

$$M = c_{33}\left[(\sigma_{33} + k^2\varepsilon_{33}d_{33})^2 + k^2\varepsilon_{33}^2(v_0 - v_d)^2\right]$$

при

$$k^2\varepsilon_{33}(v_0 - v_d)^2 \gg (\sigma_{33} + k^2\varepsilon_{33}d_{33})$$

$$C_1 = -9p_1k^3(v_0 - v_d)^2(\sigma_{33} + k^2\varepsilon_{33}d_{33})\left[\varepsilon_{33}(v_0 - v_d) + \right.$$

$$\left. + 2kd_{33}(\sigma_{33} + k^2\varepsilon_{33}d_{33})\right]T^{-1}$$

$$C_2 = -18p_1k^3\varepsilon_{33}(v_0 - v_d)^3T^{-1} \tag{2.8}$$

где

$$T = 4c_{33}(\sigma_{33} + k^2\varepsilon_{33}d_{33})\left\{\left[\varepsilon_{33}(v_0 - v_d) + 2kd_{33}(\sigma_{33} + k^2\varepsilon_{33}d_{33})\right]^2 + \right.$$

$$\left. + 4(v_0 - v_d)^2(\sigma_{33} + k^2\varepsilon_{33}d_{33})^2\right\}$$

когда

$$k^2\varepsilon_{33}^2(v_0 - v_d) \ll (\sigma_{33} + k^2\varepsilon_{33}d_{33})$$

$$C_1 = 3p_1k^3\varepsilon_{33}^2\left[v_0(2\sigma_{33} + k^2\varepsilon_{33}d_{33}) - v_d\sigma_{33}\right]D^{-1}$$

$$C_2 = -9p_1k^4\sigma_{33}v_0(v_0 - v_d)\varepsilon_{33}D^{-1} \tag{2.9}$$

где

$$D = 8c_{33}\varepsilon_{33}^4(v_0 - v_d)^2\left[(v_d\sigma_{33} + v_0k^2\varepsilon_{33}d_{33})^2 + v_0^2k^2\varepsilon_{33}^2(v_0 - v_d)^2\right]$$

$$p_1 = e_{33}^4\mu_{33}^{-2}e^{-2\alpha t}$$

б) в случае $v_0 - v_d = 0$

$$A_1 = \frac{c_{44}}{c_{33}} + \frac{(c_{13} + c_{44})^2}{c_{33}(c_{33} - c_{44})}, \quad A_2 = 0 \tag{2.10}$$

$$C_1 = \frac{1}{p}e_{33}^4k^5\mu_{33}^2d_{33}\sigma_{33} \tag{2.11}$$

$$C_2 = \frac{1}{2}C_1\sigma_{33}(\sigma_{33} + 4v_0k\varepsilon_{33}) \tag{2.12}$$

где

$$p = 2c_{33}(\sigma_{33} + k^2d_{33}\varepsilon_{33})^4\left[4\sigma_{33} + (4v_0k\varepsilon_{33} + \sigma_{33})^2\right]$$

Решение уравнения (2.5) будем искать в следующем виде:

$$u_{03} = a\exp(iS) \tag{2.13}$$

где a — действительная часть амплитуды, а S — эйконал. После подстановки (2.13) в (2.5), отделяя мнимые и действительные части, получим

$$A_1\Delta_\perp a - A_1 a(\nabla_\perp S)^2 - 2A_2(\nabla_\perp a)(\Delta_\perp S) - A_2 a\Delta_\perp S + 2ak\frac{\partial S}{\partial x_3} = C_1 a^3 \quad (2.14)$$

$$A_2\Delta_\perp a - A_2 a(\nabla_\perp S)^2 + 2A_1(\Delta_\perp a)(\nabla_\perp S) + A_1 a\Delta_\perp S - 2k\frac{\partial a}{\partial x_3} = C_2 a^3 \quad (2.15)$$

где $\nabla_\perp$ — градиент по x_1 и x_2.

Решение этой системы ищем в виде

$$a = a_0(x_3) + a_1(x_1, x_2, x_3), \qquad S = S_0(x_3) + S_1(x_1, x_2, x_3) \quad (2.16)$$

где a_0 и S_0 — медленно меняющиеся амплитуда и эйконал одномерной нелинейной невозмущенной волны. В силу того, что $|\omega_1 t - kx_3|$ намного меньше kx_3 и $\omega_1 t$, можно в выражениях (2.8), (2.9), (2.11) и (2.12) в малом выражении αt в экспоненте положить $t \approx \frac{x_3}{v}$. Как видно, переменные коэффициенты в уравнении (2.5) мало меняются по длине волны.

Подставляя (2.16) в (2.14) и (2.15), исключая S_0, линеаризуя уравнения, получим систему уравнений:

$$A_1\Delta_\perp a_1 - A_2 a_0\Delta_\perp S_1 + 2ka_0\frac{\partial S_1}{\partial x_3} - 2a_0^2 C_1 a_1 = 0 \quad (2.17)$$

$$A_2\Delta_\perp a_1 + A_1 a_0\Delta_\perp S_1 - 2k\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - 3C_2 a_0^2 a_1 = 0 \quad (2.18)$$

Поскольку функции a_0, C_2 и C_1 медленно меняются по длине возмущенной волны $2\pi/k_3'$, решения уравнений (2.17) и (2.18) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1' \exp[i(k_3' x_3 + k_2' x_2 + k_1' x_1)] \\ S &= S_1' \exp[i(k_3' x_3 + k_2' x_2 + k_1' x_1)] \end{aligned} \quad (2.19)$$

Подставляя (2.19) в (2.17) и (2.18), получим систему алгебраических уравнений относительно a_1' и S_1', которые имеют ненулевое решение, если детерминант равняется нулю. Из последнего условия находим выражение для k_3', имеющее вид

$$k_3' = \frac{1}{4k}\{i(2A_2k_\perp^2 + 3a_0^2C_2) \pm [-(2A_2k_\perp^2 + 3a_0^2C_2)^2 + 4k_\perp^2[k_\perp^2(A_2^2 + A_1^2) + a_0^2(3A_2C_2 + 2A_1C_1)]]^{1/2}\} \quad (2.20)$$

где $k_\perp^2 = (k_1')^2 + (k_2')^2$.

Условие устойчивости волны имеет вид: $\mathrm{Im}\, k_3' \geqslant 0$ $(x_3 > 0)$. Теперь видно, что в случае б), когда $A_1 > 0$ и $C_1 > 0$, звуковая волна устойчива.

В случае а) пусть $2A_2k_\perp^2+3a_0^2C_2>0$, тогда имеет место устойчивость при $k_\perp^2\,(A_2^2+A_1^2)+a_0^2(3A_2C_2+2A_1C_1)>0$, при обратном знаке имеется неустойчивость. Если же $2A_2k_\perp^2+3a_0^2C_2<0$, имеется неустойчивость. Допустим $v_0-v_d>0$, тогда усиленное условие неустойчивости будет иметь вид: $k^4a_0^2/k_\perp^2<-2A_2k^4/3c_2'$, где c_2' получается из выражения C_2, если подставить в него $\exp(-2\alpha t)\approx 1$. Для CdS, когда $k=2\cdot 10^{-2}$ *м*, а $\sigma_{33}=10^{-2}$ *ом*$^{-1}\cdot$*м*$^{-1}$, $k^4a_0^2/k_\perp^4<4\cdot 10^{-16}$, то есть уменьшение амплитуды a_0 усиливает явление неустойчивости.

Продольная неустойчивость ($k_1=0$) всегда имеет место при $C_2>0$ и не имеет места при $C_2<0$. Амплитуда a_0 не влияет на устойчивость.

Для безразмерной ширины осесимметричных пучков решение имеет вид

$$f^2=\left(\frac{A_1}{R^2}+\frac{c_2E_0^2A_1}{kR}+\frac{A_1c_1E_0^2}{k^2r_0^2}+4A_1^2/R_x^2\right)x_3^2+2(A_1/R+c_2E_0^2/2k)x_3+1.$$

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 22 IX 1980

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ, Ա. Վ. ՇԵԿՈՅԱՆ

ԵՌԱՉԱՓ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԱԼԻՔՆԵՐԸ ՊՅԵԶՈԴԻԷԼԵԿՏՐԻԿՆԵՐՈՒՄ ԵՎ ՊՅԵԶՈԿԻՍԱՀԱՂՈՐԴԻՉՆԵՐՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ու մ

Արտածված են կարճ ալիքների տարածման հավասարումները եռաչափ պյեզոդիէլեկտրիկ միջավայրի համար։ Հաշվի են առնվում երկրաչափական, առաձգական և էլեկտրոստրիկցիոն ոչ գծայնությունները։ Ցույց է տրվում, որ կարող են առաջանալ խտացման և նոսրացման հարվածային ալիքներ։

Եռաչափ դեպքի համար արտածված են նաև մոդուլացված ալիքների հավասարումները պյեզոկիսահաղորդիչ միջավայրի համար։

Ուսումնասիրված են ալիքների կայունության պայմանները։

THE THREE-DIMENSIONAL NONLINEAR WAVES IN PIEZODIELECTRICS AND PIEZOSEMICONDUCTORS

A. G. BAGDOEV, A. V. SHEKOYAN

S u m m a r y

The derivation of short waves equations in tree-dimensional case when the elastic wave propagates in piezodielectric with geometrical elastic and electrostrictional nonlinearities is presented. It is shown that

rarefaction and compression shock waves may be generated. The derivation of the modulation equation in three-dimensional case for piezosemiconductor is given. The stability condition for quasimonochromatic wave is examined.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рыжов О. С.* Распространение волн в неоднородных средах. ПМТФ, 1961, № 2.
2. *Нигул У. К., Энгельбрехт Ю. К.* Нелинейные и линейные переходные волновые процессы деформации в термоупругих и упругих телах. Изд. АН Эстонской ССР, Институт кибернетики, Таллин, 1972.
3. *Багдоев А. Г.* Определение окрестности фронтов волн в пространственной задаче. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1977, т. 28, № 6.
4. *Гуревич В. Л.* Теория акустических свойств пьезоэлектрических полупроводников. ФТП, 1968, т. 2, № 11.
5. *Пустовойт В. И.* Взаимодействие электронных потоков с упругими волнами решетки. УФН, 1969, т. 97, № 2.
6. *Мак-Фи Дж.* Распространение и усиление звуковых волн в пьезоэлектрических полупроводниках. В кн. «Физическая акустика» под ред. У. Мэзона, т. IV, часть А. М., Изд. «Мир», 1969.
7. *Труэлл Р., Эльбаум Ч., Чик Б.* Ультразвуковые методы в физике твердого тела. М., Изд. «Мир», 1972.
8. *Такер Дж., Рэмптон В.* Гиперзвук в физике твердого тела. М., Изд. «Мир», 1975.
9. *Гуляев Ю. В.* К нелинейной теории усиления звука в полупроводниках. ФТТ, 1970, т. 12, № 12.
10. *Левин В. М., Пустовойт В. И.* Теория взаимодействия акустических волн в полупроводниках. ЖЭТФ, 1969, т. 56, № 6.
11. *Берлинкур Д., Керан Д., Жаффе Г.* Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях. В кн. «Физическая акустика» под ред. Мэзона, т. I, часть, А. М., «Мир», 1966.
12. *Най Дж.* Физические свойства кристаллов. М., Изд. «Мир», 1967.
13. *Заболотская Е. А., Хохлов Р. В.* Квазиплоские волны в нелинейной акустике ограниченных пучков. Акуст. ж., 1969, т. 15, № 1.
14. *Руденко О. С., Солуян С. И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М., Изд. «Наука», 1975.
15. *Багдоев А. Г., Оганян Г. Г.* Распространение модулированных нелинейных волн в релаксирующей газожидкостной смеси. Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа, 1980, № 1.
16. *Оганян Г. Г.* Распространение слабых волн в релаксирующей газожидкостной смеси. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1979, т. XXX, № 2.
17. *Багдоев А. Г., Даноян З. Н.* Исследование движения среды в окрестности точки касания ударных волн в линейной и нелинейной постановке. Жур. вычисл. математ. и мат. физики, 1972, т. XII, № 6.
18. *Bretherton F. P., Garrett J. R.* Wavetrains inhomogenues moving media. Proc. Roy Soc., 1968, vol. A 302, № 1471.
19. *Бабич В. М.* Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов в случае упругой неоднородной анизотропной среды. В сб. «Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Л., Изд. ЛГУ, 1961.
20. *Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В.* Самофокусировка и дифракция света в нелинейной среде. УФН, 1967, т. 93, № 1.
21. *Федоров Ф. И.* Теория упругих волн в кристаллах. М., «Наука», 1965.