ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIV, № 3, 1981 Механика

В. М. СМОЛЬСКИЙ

ОЦЕНКА ХАРАКТЕРИСТИК ВРЕМЕНИ ДО РАЗРУШЕНИЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЛУЧАЙНЫХ НАГРУЗОК ДЛЯ УПРОЩЕННОЙ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТРЕЩИНЫ

Задача оценки надежности, долговечности и ресурса летательного аппарата, подверженного в процессе эксплуатации случайному нагружению, обычно разбивается на следующие важные задачи: определение спектра случайных нагрузок, действующих на летательный аппарат; определение переходной функции наиболее «опасного» элемента конструкции летательного аппарата как линейной колебательной системы; определение характеристик времени до разрушения этого элемента конструкции от действия случайного нагружения.

Концепция наиболее «опасного» элемента естественна при оценке ресурса и долговечности конструкции в целом, так как расчет на прочность и проектирование конструкции осуществляется по предельным статическим, а не динамическим нагрузкам, поэтому конструкция летательного аппарата является относительно равнопрочной, в то время как по критериям долговечности и ресурса содержит «узкие места».

Первая из перечисленных задач является задачей измерения и успешно решается экспериментально [1]; для решения второй задачи, которая является задачей теории колебаний, имеются испытанные расчетные методы [2, 3]; третья задача непосредственно связана с процессом разрушения, ей и посвящена настоящая работа.

Задачей оценки характеристик времени до разрушения под действием случайной нагрузки интенсивно занимаются с 60-х годов нашего века. Первые работы в этом направлении связаны с эвристическими подходами: подмечались закономерности при разрушении от циклических нагрузок различной амплитуды и осуществлялся прямой перенос их на разрушение при случайном нагружении, при этом подмеченные эмпирические закономерности высказывались в виде гипотез. Наиболее часто употребляемой из них является гипотеза линейного суммирования повреждений. Зная кривую усталости материала и пользуясь гипотезой линейного суммирования повреждений, можно связать среднее время до разрушения конструкции с параметрами случайной нагрузки и экспериментально определяемыми постоянными. Хотя этот подход применяется на практике и в настоящее время, результаты его применения нельзя считать надежными для оценки долговечности элемента конструкции.

Другой эвристический подход связан с идентификацией процесса накопления повреждений дискретным марковским процессом с конечным числом состояний [4]. С течением времени повреждения необратимо переходят из одного состояния в другое, и изменяется вероятность перехода из текущего состояния в конечное. При таком подходе требуется осуществлять вычисление степеней матриц, порядок которых равен числу состояний, в то время как накопление повреждения в первом порядке происходит вдоль траектории некоторого дифференциального уравнения. В связи с этим в последнее время успешно развиваются подходы, связанные с идентификацией процесса накопления повреждений непрерывной марковской переменной. Для случая процесса, однородного по временной и пространственной координатам, в [5] определена плотность вероятности времени до разрушения. Однако, процесс накопления повреждений является ограниченным и, следовательно, не является однородным по пространственной координате.

В 70-х годах с помощью механики разрушения удалось вскрыть механизм усталостного разрушения и важность «усталостной» части кинетической диаграммы при действии случайных нагрузок. Установлено [6], что при размерах дефектов, характерных для усталостного разрушения, влияние случайных выбросов значительно весомее, чем на ранней стадии зарождения трещины. Поэтому в настоящей работе уравнение скорости роста усталостной трещины, полученное в [7], приближенно заменено стохастическим дифференциальным уравнением с белым шумом, для которого аналитически выписаны моменты и плотность вероятности времени достижения трещиной критической длины. Для выяснения границ применимости предлагаемого упрощения распределение времени до разрушения сравнивается с логарифмически нормальным распределением.

В [7] для усталостного распространения трещины в пластине при случайных нагрузках получена формула

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{l}\right) = \begin{cases} \dfrac{2\beta\pi^2}{K_C^4}\xi^3\dot{\xi}, & \xi > 0 \wedge \dot{\xi} > 0 \\ 0, & \xi \leqslant 0 \vee \dot{\xi} \leqslant 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Здесь $2l$ — длина растущей трещины, много меньшая длины и ширины пластины, $\xi(t)$ — нормально действующая к трещине случайная нагрузка, K_C и β — постоянные материала пластины. Нам требуется определить характеристики времени первого достижения процессом $\xi(t)$ другого случайного процесса $K_C/\sqrt{\pi l}$. С целью упрощения уравнения (1.1) введем обозначения

$$I = I_1,\ D^2 = \frac{4D_1^3}{D_2},\ D_1 = I_2 - I_1^2,\ D_2 = I_4 - I_3^2 \tag{1.2}$$

$$I_k = B\int_0^\infty\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty f_k(x, y, z)\,p(x, y, z)\,dz\,dy\,dx,\ k = 1, 2, 3, 4,$$

$$B = \frac{2\beta\pi^2}{K_C^4},\ f_1 = x^3y,\ f_3 = 3x^2y^2 + x^3z,\ f_{2n} = Bf_{2n-1}^2,\quad n = 1,\ 2,$$

где $p(x, y, z)$ — совместная плотность вероятности процесса $\xi(t)$ и его двух первых производных.

Приближенно заменим уравнение с кусочной правой частью (1.1) следующим стохастическим уравнением:

$$\frac{du}{dt} = -I - \sqrt{D}\, w(t) \quad \left(u = \frac{1}{l}\right) \tag{1.3}$$

где I и D определяются соотношениями (1.2), а $w(t)$ — белый шум ($K_w(\tau) = D\delta(\tau)$, $Mw = 0$). Тогда плотность вероятности достижения процессом $u(t)$ постоянной границы u_1 в момент t, если при $t=0$ $u = u_0$, удовлетворяет возвратному уравнению Колмогорова

$$\frac{\partial f}{\partial t} - I\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{D}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = 0 \tag{1.4}$$

в области $t > 0$, $u > 0$ и граничным условиям

$$f(0, u) = \delta(u - u_0),\ u > 0;\ f(t, u_1) = 0,\ t > 0 \tag{1.5}$$

Моменты распределения времени достижения постоянной границы можно определить [8], не решая задачу (1.4)—(1.5), из решения итерационных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}\frac{1}{2} D \frac{d^2 T_n}{du^2} + I\frac{dT_n}{du} = -n T_{n-1},\ T_0 = 1\\ T_n(u_1) = T_n(\infty) = 0,\ n = 1, 2, \cdots\end{gathered} \tag{1.6}$$

Моменты распределения времени до разрушения, следуя В. В. Болотину [9], можно получить в виде

$$J_n = \int\limits_0^{\frac{K_C}{\sqrt{\pi l_0}}} T_n\left(\frac{1}{l}\right) p_\xi\left(\frac{K_C}{\sqrt{\pi l}}\right) d\left(\frac{K_C}{\sqrt{\pi l}}\right),\ n = 1, 2, \cdots \tag{1.7}$$

где $p_\xi(x)$ — плотность вероятности $\xi(t)$. В дальнейшем будут использованы первые два момента

$$J_1 = \frac{1}{Il_0} - \frac{Q_1}{I},\ J_2 = \frac{1}{I^2 l_0^2} - \frac{D}{I^3 l_0} - Q_1\left(\frac{2}{I^2 l_0} - \frac{D}{I^3}\right) + \frac{Q_2}{I^2} \tag{1.8}$$

где

$$Q_n = \int\limits_0^\infty x^{2n} p_\xi(x)\, dx,\ n = 1, 2,\ p_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x, y, z)\, dy dz$$

В [10] решена задача (1.4), (1.5) с помощью преобразования Лапласа. Плотность вероятности $f(t)$ времени достижения постоянной границы u_1 можно записать в виде

$$tf(t) = \frac{1}{2}\left\{\frac{\xi + \eta}{\sqrt{\pi}} \exp[-(\eta - \xi)^2] - \xi^2[1 - \Phi(\eta)] \times\right. \tag{1.9}$$

$$\times \exp[2\xi(\eta-\xi)] + \frac{\eta}{\sqrt{\pi}} \exp[2\xi(\eta-\xi)-\eta^2]\Bigg\} \qquad (1.9)$$

где

$$\xi \leqslant 2\eta, \quad \xi = \frac{lt}{\sqrt{2Dt}}, \quad \eta = \frac{u_0 - u_1}{\sqrt{2Dt}}, \quad \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

Сравним плотность распределения (1.9) с логарифмически нормальной плотностью распределения. Плотность распределения случайной величины $u = \ln t$ будет $f_u(x) = \exp(x) f(\exp(x))$ и потому $tf(t)$ надо сравнить с функцией

$$g(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln t - a)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Сравнение проведено на равномерном шаге по переменной x ($a - 3\sigma \leqslant x = \ln t \leqslant a + 3\sigma$), параметры a и σ определялись методом наименьших квадратов, а начальные их значения после введения обозначений $a_1 = l/\sqrt{D}$, $a_2 = (u_0 - u_1)/\sqrt{D}$ и использования (1.8) приближенно получены в виде

$$a = \ln(a_2/a_1), \quad \sigma = \ln(1 + 1/\sqrt{a_1 a_2}).$$

Для расчета взяты значения $a_2 = 10^4$, a_1 менялось от 2 до 10 с шагом 2. При этих исходных значениях и абсолютной точности поиска 10^{-6} метод наименьших квадратов срабатывал вхолостую: исходные значения сразу оказывались оптимальными. Результаты сравнения сведены в табл. 1, из которой видно, что уклонение распределения (1.9) от логарифмически нормального незначительно.

Таблица 1

Значения функций $f_u(x)$ (сверху) и $g(x)$ (снизу, нормальное распределение) при различных значениях a_1 и x; внизу даны значения a и σ

x \ a_1	2	4	6	8	10
$a-3\sigma$	0.647 0.629	0.908 0.889	1.11 1.09	1.28 1.25	1.42 1.4
$a-2\sigma$	7.74 7.66	10.9 10.8	13.3 13.2	15.4 15.3	17.2 17.1
$a-\sigma$	34.3 34.3	48.5 48.5	59.4 59.4	68.6 68.6	76.6 76.7
a	56.4 56.6	79.8 80	97.7 97.9	112.8 113.1	126.1 126.4
a	8.517	7.824	7.418	7.13	6.91
$\sigma\times10^2$	0.705	0.499	0.407	0.353	0.316

Таким образом, результаты расчета обосновывают допустимость упрощения (1.3) для оценки надежности элемента конструкции и теоретически доказывают логарифмически нормальное распределение долговечности.

Московский авиационный
институт

Поступила 3 V 1979

Վ. Մ. ՍՄՈԼՍԿԻ

ՃԵՂՔԻ ՏԱՐԱԾՄԱՆ ՊԱՐԶԵՑՎԱԾ ՄՈԴԵԼԻ ՀԱՄԱՐ ՊԱՏԱՀԱԿԱՆ ԲԵՌՆՎԱԾՔՆԵՐԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՏԱԿ ՄԻՆՉԵՎ ՔԱՅՔԱՅՄԱՆ ԺԱՄԱՆԱԿԻ ՈՐՈՇԻՉՆԵՐԻ ԳՆԱՀԱՏԱԿԱՆԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Պատահական բեռնվածքների ազդեցության տակ ճեղքի աճման արագության հավասարումը փոխարինվում է ստոխաստիկ դիֆերենցիալ հավասարումով, որի համար ստացվել են ճեղքի կրիտիկական երկարությունը հասնելու ժամանակի որոշիչները։

EVALUATION OF TIME CHARACTERISTICS BEFORE FRACTURE UNDER A STOCHASTICAL LOAD FOR A SIMPLIFIED MODEL OF A CRACK GROWTH

V. M. SMOLSKY

S u m m a r y

The equation for the rate of crack growth under a stochastical-load is substituted for a stochastical differential equation for which the time characteristics of the crack's reaching a critical length are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Райхер В. Л.* Гипотеза спектрального суммирования и ее применение для определения усталостной долговечности при действии случайных нагрузок. Тр. ЦАГИ, М., 1969, вып. 1134, 39 с.
2. *Пархомовский Я. М.* О приближенном решении некоторых краевых задач прочности самолета. Ученые записки ЦАГИ, 1977, т. 8, № 6, 93—106.
3. *Швилкин В. А., Чудаев Б. Я., Башкин В. Н.* Расчет частот и форм собственных колебаний самолета с крылом большого удлинения методом начальных параметров. Тр. ЦАГИ, М., 1975, вып. 1662, 15 с.
4. *Когаев В. П.* Оценка распределения долговечности при варьируемых амплитудах методом перемножения стохастических матриц. Машиноведение, 1976, № 4, 72—79.
5. *Тарнопольский Г. И.* К теории накопления повреждений. Тр. Новосибирского ин-та инж. жел.-дор. тр-та, 1970, вып. 96, 184—188.
6. *Matolcsy M.* General fatigue problems of stochastically loaded (vehicle) structures. Materialprüfung, 1976, Vol. 18, № 4, 115—122.

7. *Черепанов Г. П., Смольский В. М.* К расчету среднего времени до разрушения панели с трещиной от случайной нагрузки. Машиноведение, 1978, № 6, 58—60.
8. *Смольский В. М.* К оценке моментов распределения времени до разрушения панели с трещиной от случайной нагрузки. Машиноведение, 1980, № 2, с. 117—119.
9. *Болотин В. В.* Статистические методы в строительной механике. М., «Стройиздат», 1965, 279 с.
10. *Смольский В. М.* Об одной возможности оценки распределения долговечности панелей и фюзеляжа. «Прочность, устойчивость и колебания тонкостенных конструкций», М., 1980, 53—56.