

касательных напряжений, $K(t, \tau) = 3G \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau}$, $C(t, \tau)$ — мера ползучести при одноосном напряженном состоянии.

Воспользуемся тороидальными координатами α, β, γ :

$x = \rho \cos \gamma$, $y = \rho \sin \gamma$, $z = H \sin \beta$, где $\rho = a (\operatorname{sh} \alpha (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta))^{-1}$
 $H = a (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^{-1}$, здесь $0 \leq \alpha \leq \infty$, $-\pi \leq \beta \leq \pi$, $0 \leq \gamma \leq 2\pi$ (фиг. 2).

Для компонентов деформации будем иметь [4]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u_\alpha}{H} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u_\beta}{H} \right), \quad 2\varepsilon_{\alpha\gamma} = \frac{H}{\rho} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{u_\alpha}{H} \right) + \frac{\rho}{H} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u_\gamma}{\rho} \right) \Big|_{(\alpha, \beta)} \\ \varepsilon_{\alpha z} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u_\alpha}{H} \right) + \frac{1}{H^2} \left(\frac{\partial H}{\partial \alpha} u_\alpha + \frac{\partial H}{\partial \beta} u_\beta \right) \Big|_{(\alpha, \beta)} \\ \varepsilon_{\gamma z} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} + \frac{1}{H\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \alpha} u_\alpha + \frac{\partial \rho}{\partial \beta} u_\beta \right) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Положим, что все компоненты напряжения, кроме $\sigma_{\alpha\gamma}$ и $\sigma_{\beta\gamma}$, в любой момент времени t равны нулю. Тогда из уравнений равновесия остается [4]

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (H\rho^2 \sigma_{\alpha\gamma}) + \frac{\partial}{\partial \beta} (H\rho^2 \sigma_{\beta\gamma}) = 0 \quad (1.3)$$

а из остальных уравнений следует, что напряженное состояние стержня не зависит от γ , следовательно, тензор деформации также не зависит от γ . Из (1.2) перемещения представим в виде

$$\begin{aligned} u_\alpha &= u_{\alpha 0} + \int F_\alpha d\gamma \Big|_{(\alpha, \beta)}, \quad F_\alpha = 2\rho \varepsilon_{\alpha\gamma} - \frac{\rho^2}{H} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u_\gamma}{\rho} \right) \Big|_{(\alpha, \beta)} \\ u_\gamma &= u_{\gamma 0} + \int \left(\rho \varepsilon_{\gamma\gamma} - \frac{1}{H} \frac{\partial \rho}{\partial \alpha} u_\alpha - \frac{1}{H} \frac{\partial \rho}{\partial \beta} u_\beta \right) d\gamma \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $u_{\alpha 0}$, $u_{\beta 0}$, $u_{\gamma 0}$ — произвольные функции α , β и t .

Подставляя (1.4) в (1.2) и учитывая указанное обстоятельство, получим

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{1}{H} \frac{\partial u_{\alpha 0}}{\partial \alpha} + \frac{1}{H^2} \frac{\partial H}{\partial \beta} u_{\beta 0} \Big|_{(\alpha, \beta)}, \quad 2\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u_{\beta 0}}{H} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u_{\alpha 0}}{H} \right) \quad (1.5)$$

а относительно F_α , F_β приходим к системе трех дифференциальных уравнений, решение которой будет

$$F_\alpha = (D_0 + D_1 z) \frac{1}{H} \frac{\partial \rho}{\partial \alpha} + (D - D_1 \rho) \frac{1}{H} \frac{\partial z}{\partial \alpha} \Big|_{(\alpha, \beta)} \quad (1.6)$$

где D_0 , D_1 , D — произвольные функции от t .

Исключая из (1.4) u_γ и используя (1.6), получим уравнение совместности деформаций

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{H}{\rho} \varepsilon_{\beta\gamma} \right) - \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{H}{\rho} \varepsilon_{\alpha\gamma} \right) = D \frac{H^2}{\rho^3} \quad (1.7)$$

Полагая в (1.5) равными нулю все компоненты деформации, кроме $\varepsilon_{z\gamma}$ и $\varepsilon_{\beta\gamma}$, получим систему относительно u_{z0} , $u_{\beta 0}$, решение которой будет

$$u_{z0} = -\frac{N_1}{H} \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{N_2}{H} \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(z, \beta)} \quad (1.8)$$

$$N_1 = \frac{A}{4} (\beta^2 - z^2) + \frac{B_1}{2} \rho z + \frac{C_1}{2} \rho - E_1 z$$

$$N_2 = \frac{A}{2} \rho z - \frac{B_1}{4} (\beta^2 - z^2) + \frac{C_1}{2} z + E_1 \rho$$

A, B_1, C_1, E_1 — произвольные функции от t .

После подстановки (1.6) и (1.8) в (1.4) получим выражения для перемещений u_α , u_β , u_γ .

Вводя функцию напряжений

$$\tau_{z\gamma} = -\frac{1}{H\rho^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}, \quad \sigma_{\beta\gamma} = \frac{1}{H\rho^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (1.9)$$

от (1.1) и (1.7) приходим к основному уравнению задачи

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho^3} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{\rho^3} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right) -$$

$$- \int_{z_0}^t \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{f(z_0)}{\rho^3} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{f(z_0)}{\rho^3} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right] \right\} K(t, z) dz = \dot{D}G \frac{H^2}{\rho^3}$$

где

$$z_0 = \frac{1}{H\rho^2} \sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right)^2} \quad (1.11)$$

Таким образом, задача приводится к определению функции Φ из нелинейного интегро-дифференциального уравнения (1.10) при условии $\Phi(\alpha, \beta, t) = \text{const}$ на контуре.

Рассмотрим случай, когда поперечное сечение представляет криволинейный прямоугольник (фиг. 2). Тогда граничные условия примут следующий вид:

$$\Phi(z_0, \beta, t) = \Phi(\alpha_1, \beta, t) = \Phi(\alpha, \beta_0, t) = \Phi(\alpha, \beta_1, t) = 0 \quad (1.12)$$

Крутящий момент выражается формулой

$$M = \int_{\Omega} \int [(\rho - R_1) \tau_{z\gamma} - z \sigma_{\beta\gamma}] d\Omega \quad (1.13)$$

где

$$d\Omega = H^2 d\alpha d\beta = d\rho dz.$$

Переходя от $\sigma_{z\gamma}$, $\tau_{\beta\gamma}$ к $\sigma_{\beta\gamma}$, $\tau_{z\gamma}$ и подставляя в (1.13), после применения формулы Грина-Остроградского получим:

$$M = 2 R_1 \int_{\Omega} \frac{\Phi}{\rho^3} d\Omega$$

§ 2. Решение интегро-дифференциального уравнения (1.10). Положим, что

$$f(z_0) = 1 + \lambda \sigma_0^2 \quad (2.1)$$

где λ — физический параметр, характеризующий нелинейный закон ползучести. Решение уравнения (1.10) ищем в виде ряда

$$\Phi(\alpha, \beta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \Phi_n(\alpha, \beta, t) \quad (2.2)$$

где Φ_0 соответствует случаю линейно-упругого материала.

Подставляя (2.2) в (1.10) и (1.11), приходим к системе рекуррентных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \beta^2} - \frac{3}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \alpha} \frac{\partial \Phi_n}{\partial \alpha} - \frac{3}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \beta} \frac{\partial \Phi_n}{\partial \beta} = H^2 \varphi_n \quad (2.3)$$

($n = 0, 1, 2, \dots$)

где

$$\varphi_0(t) = GD(t) + G \int_{\tau_1}^t D(\tau) R(t, \tau) d\tau \quad (2.4)$$

а $\varphi_n(\alpha, \beta, t)$ при $n \geq 1$ определяются соотношениями

$$\varphi_n(\alpha, \beta, t) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\tau_1}^t N(t, \tau) (\omega_k \varphi_{n-1-k} + \text{grad } \Phi_k \text{ grad } \omega_{n-1-k}) d\tau \quad (2.5)$$

Здесь

$$N(t, \tau) = K(t, \tau) + \int_{\tau}^t R(t, \xi) K(\xi, \tau) d\xi \quad (2.6)$$

$$\omega_n = \rho^{-4} \sum_{k=0}^n \text{grad } \Phi_k \text{ grad } \Phi_{n-k} \quad (2.7)$$

$R(t, \tau)$ — резольвента ядра $K(t, \tau)$. Если

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau) [1 - e^{-\gamma_0(t-\tau)}]$$

то

$$R(t, \tau) = \gamma_0 - \gamma'(\tau) + [\gamma''(\tau) + \gamma'^2(\tau) - \gamma_0 \gamma'(\tau)] e^{\gamma(\tau)} \int_{\tau}^t e^{-\gamma(x)} dx$$

$$\gamma(t) = \gamma_0 \int_{\tau_1}^t [1 + 3 G \varphi(\tau)] d\tau$$

причем, согласно [1], $\varphi(\tau) = C_0 + A_1 \tau^{-1}$, где C_0, A_1, γ_0 — некоторые постоянные, характеризующие свойство ползучести материала.

Вводя новую функцию $\Psi_n(\alpha, \beta, t)$ при помощи соотношения $\Phi_n(\alpha, \beta, t) = (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^{-3/2} \operatorname{sh}^2 \alpha \Psi_n(\alpha, \beta, t)$, из (2.3) получим уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial \beta^2} + \operatorname{cth} \alpha \frac{\partial \Psi_n}{\partial \alpha} + \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{\operatorname{sh}^2 \alpha} \right) \Psi_n = \frac{H^2 (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^{3/2}}{\operatorname{sh}^2 \alpha} \varphi_n \quad (2.8)$$

а из (1.12) получим

$$\Psi_n(\alpha_0, \beta, t) = \Psi_n(\alpha_1, \beta, t) = \Psi_n(\alpha, \beta_0, t) = \Psi_n(\alpha, \beta_1, t) = 0 \quad (2.9)$$

Решая уравнение (2.8) при граничных условиях (2.9) и переходя к $\Phi_n(\alpha, \beta, t) = \Phi_n$, получим

$$\Phi_n = \frac{\operatorname{sh}^2 \alpha (\beta_1 - \beta_0)^{-1}}{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^{3/2}} \iint_{\Omega} \varphi_n(\xi, \eta, t) (\operatorname{ch} \xi - \cos \eta)^{3/2} \Gamma(\alpha, \beta; \xi, \eta) d\Omega \quad (2.10)$$

Здесь $\Gamma(\alpha, \beta; \xi, \eta)$ — функция Грина для данной задачи, причем $\Gamma(\alpha, \beta; \xi, \eta) = B(\alpha, \beta; \xi, \eta)$ при $\xi \leq \alpha$, где

$$B(\alpha, \beta; \xi, \eta) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_{\nu_n-1/2}^2(\xi, \alpha_0) Z_{\nu_n-1/2}^2(\alpha_1, \alpha)}{(\nu_n^2 - 9/4)(\nu_n^2 - 1/4) Z_{\nu_n-1/2}^2(\alpha_0, \alpha_1)} \times \\ \times \sin \nu_n(\beta - \beta_0) \sin \nu_n(\eta - \beta_0) \quad (2.11)$$

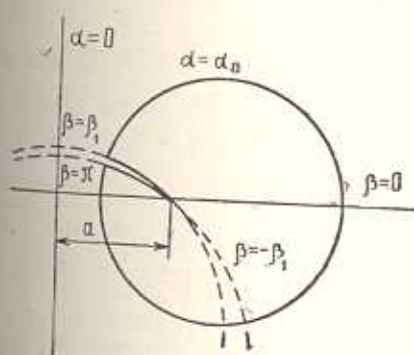
и $\Gamma(\alpha, \beta; \xi, \eta) = B(\xi, \eta; \alpha, \beta)$ при $\alpha \leq \xi$, а $\nu_n = \frac{\pi n}{\beta_1 - \beta_0}$

$$Z_n^m(\alpha, \beta) = P_n^m(\operatorname{ch} \alpha) Q_n^m(\operatorname{ch} \beta) - P_n^m(\operatorname{ch} \beta) Q_n^m(\operatorname{ch} \alpha)$$

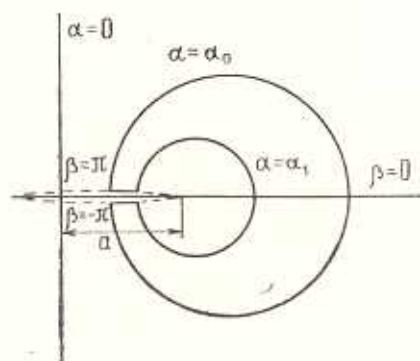
где $P_n^m(x)$ и $Q_n^m(x)$ — присоединенные сферические функции соответственно первого и второго рода m -го порядка n -го индекса.

Рассмотрим ряд частных случаев этого решения.

1. Переходя в (2.10) и (2.11) к пределу при $\alpha_1 \rightarrow \infty$, $\beta_0 \rightarrow -\beta_1 \neq 0, \pi$, получим решение задачи для соответствующей области (фиг. 3). Тогда



Фиг. 3.



Фиг. 4.

$$\Phi_n = \frac{\text{sh}^2 \alpha}{2 \beta_1 (\text{ch} \alpha - \cos \beta)^{3/2}} \int_0^\alpha \int_0^\alpha \varphi_n(\xi, \eta, t) (\text{ch} \xi - \cos \eta)^{3/2} \Gamma_0(\alpha, \beta; \xi, \eta) d\Omega$$

где

$$\Gamma_0(\alpha, \beta; \xi, \eta) = B_0(\alpha, \beta; \xi, \eta) \text{ при } \xi \leq \alpha, \text{ причем}$$

$$B_0(\alpha, \beta; \xi, \eta) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_{\nu_n-1/2}^2(\alpha_0, \xi) Q_{\nu_n-1/2}^2(\text{ch} \alpha)}{(\mu_n^2 - 9/4)(\mu_n^2 - 1/4) Q_{\nu_n-1/2}^2(\text{ch} \alpha_0)} \times \\ \times \sin \mu_n(\beta + \beta_1) \sin \mu_n(\eta + \beta_1)$$

$$\text{и } \Gamma_0(\alpha, \beta; \xi, \eta) = B_0(\xi, \eta; \alpha, \beta) \text{ при } \alpha \leq \xi; \text{ здесь } \mu_n = \frac{\pi n}{2\beta_1}.$$

2. Переходя в (2.10) и (2.11) к пределу при $\beta_0 \rightarrow -\pi$, $\beta_1 \rightarrow \pi$, получим решение задачи для соответствующей области (фиг. 4). Тогда

$$\Phi_n = \frac{\text{sh}^2 \alpha}{2 \pi (\text{ch} \alpha - \cos \beta)^{3/2}} \int_0^\alpha \int_0^\alpha \varphi_n(\xi, \eta, t) (\text{ch} \xi - \cos \eta)^{3/2} [\Gamma^*(\alpha, \beta; \xi, \eta) + \\ + \frac{1}{\text{sh} \xi} \Gamma_1^*(\alpha, \beta; \xi, \eta)] d\Omega \quad (2.12)$$

где

$$\Gamma^*(\alpha, \beta; \xi, \eta) = B^*(\alpha, \beta; \xi, \eta), \quad \Gamma_1^*(\alpha, \beta; \xi, \eta) = B_1^*(\alpha, \beta; \xi, \eta) \\ \text{при } \xi \leq \alpha, \text{ причем}$$

$$B^*(\alpha, \beta; \xi, \eta) = 32 \sum_{n=2, 4, 5, 6, 7, \dots}^{\infty} \frac{Z_{(n-1)/2}^2(\xi, \alpha_0) Z_{(n-1)/2}^2(\alpha_1, \alpha)}{(n^2 - 9)(n^2 - 1) Z_{n-1/2}^2(\alpha_0, \alpha_1)} \times \\ \times \sin \frac{n}{2}(\beta + \pi) \sin \frac{n}{2}(\eta + \pi)$$

$$B_1^*(\alpha, \beta; \xi, \eta) = \frac{\Pi_2(\xi, \alpha_0) \Pi_1(\alpha, \alpha_1)}{\Pi_1(\alpha_0, \alpha_1)} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\eta}{2} + \\ + \frac{\Pi_2(\xi, \alpha_0) \Pi_2(\alpha, \alpha_1)}{\Pi_2(\alpha_0, \alpha_1)} \cos \frac{3}{2}\beta \cos \frac{3}{2}\eta$$

$$\text{и } \Gamma^*(\alpha, \beta; \xi, \eta) = B^*(\xi, \eta; \alpha, \beta), \quad \Gamma_1^*(\alpha, \beta; \xi, \eta) = B_1^*(\xi, \eta; \alpha, \beta) \text{ при } \alpha \leq \xi$$

Здесь

$$\Pi_1(\alpha, \beta) = \frac{\text{ch} \alpha \text{ ch}^2 \beta + 1}{\text{sh}^2 \alpha \text{ sh}^2 \beta} - \frac{\text{ch} \beta \text{ ch}^2 \alpha + 1}{\text{sh}^2 \beta \text{ sh}^2 \alpha}$$

$$\Pi_2(\alpha, \beta) = \frac{1}{\text{sh}^2 \alpha \text{ sh}^2 \beta} \left(\frac{\text{ch}^3 \beta}{3} - \text{ch} \beta \right) - \frac{1}{\text{sh}^2 \beta \text{ sh}^2 \alpha} \left(\frac{\text{ch}^3 \alpha}{3} - \text{ch} \alpha \right)$$

3. Переходя в (2.12) и (2.13) к пределу при $\alpha_1 \rightarrow \infty$, получим решение задачи для сплошного круга с криволинейной щелью (фиг. 5). Тогда

$$\Phi_n = \frac{\text{sh}^2 \alpha}{2\pi (\text{ch} \alpha - \cos \beta)^{3/2}} \int_{\alpha}^{\xi} \int_{\beta}^{\eta} \varphi_n(\xi, \eta, t) (\text{ch} \xi - \cos \eta)^{3/2} [\Gamma_0^*(\alpha, \beta; \xi, \eta) + \frac{1}{\text{sh} \xi} \Gamma_{10}^*(\alpha, \beta; \xi, \eta)] d\Omega$$

где

$\Gamma_0^*(\alpha, \beta; \xi, \eta) = B_0^*(\alpha, \beta; \xi, \eta)$, $\Gamma_{10}^*(\alpha, \beta; \xi, \eta) = B_{10}^*(\alpha, \beta; \xi, \eta)$ при $\xi \leq \alpha$

причем

$$B_0^*(\alpha, \beta; \xi, \eta) = 32 \sum_{n=2, 4, 5, 6, 7, \dots}^{\infty} \frac{Z_{(n-1)/2}^2(\alpha_0, \xi) Q_{(n-1)/2}^2(\text{ch} \alpha)}{(n^2 - 9)(n^2 - 1) Q_{(n-1)/2}^2(\text{ch} \alpha)} \times$$

$$\times \sin \frac{n}{2} (\beta + \pi) \sin \frac{n}{2} (\eta + \pi)$$

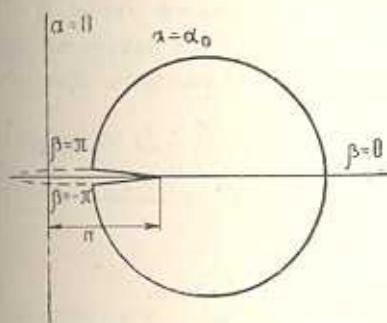
$$B_{10}^*(\alpha, \beta; \xi, \eta) = \frac{\Pi_1(\xi, \alpha_0) \text{ch} \alpha \text{sh}^2 \alpha_0}{\text{sh}^2 \alpha \text{ch} \alpha_0} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\eta}{2} +$$

$$+ \frac{\Pi_3(\xi, \alpha_0) \text{sh}^2 \alpha_0}{\text{sh}^2 \alpha} \cos \frac{3}{2} \beta \cos \frac{3}{2} \eta$$

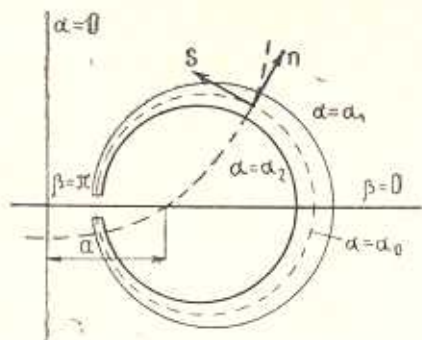
и

$\Gamma_0^*(\alpha, \beta; \xi, \eta) = B_0^*(\xi, \eta; \alpha, \beta)$, $\Gamma_{10}^*(\alpha, \beta; \xi, \eta) = B_{10}^*(\xi, \eta; \alpha, \beta)$ при $\alpha \leq \xi$.

§ 3. Исследование сходимости ряда (2.2). Для доказательства существования решения надо показать, что ряд (2.2), где коэффициенты определяются из рекуррентных формул (2.10), сходится абсолютно и равномерно



Фиг. 5.



Фиг. 6.

по. С этой целью оценим $\Phi_n(\alpha, \beta, t)$. Возьмем фиксированный промежуток $\tau_1 \leq t \leq T$ и положим

$$\max |K(t, \tau)| = K_T, \quad \max |R(t, \tau)| = R_T, \quad \tau_1 \leq \tau, \quad t \leq T \quad (3.1)$$

Тогда из (2.6) и (3.1) следует, что

$$|N(t, \tau)| \leq K_T(1 + R_T T) = N_T \quad (3.2)$$

Вводя норму

$$\|X\| = \max |X| + \sup \frac{|X(A) - X(B)|}{|AB|^6}$$

где A, B — произвольные точки внутри поперечного сечения стержня, $0 < \delta < 1$, при помощи априорных оценок Шаудера [5], которые в данном случае пишутся в виде

$$\|D^2 \Phi_n\| \leq c_* \|\varphi_n\| \quad (3.3)$$

где c_* — некоторая постоянная, зависящая от формы области, и пользуясь (2.4), (2.5), (2.7), (3.2) и (3.3), получим рекуррентную систему неравенств

$$\|D_{n+1}\| \leq \nu \sum_{k=0}^n \|\varphi_k\| q_{n-k}$$

где

$$\nu = 2 N_T T \mu c_*^2 (1 + 6 \mu c_*)$$

$$\mu = \max_{(\alpha, \beta) \in \Omega} \left\{ \|H^{-2}\|, \left\| \frac{\partial}{\partial x} (H^{-2} \rho^{-4}) \right\|, \left\| \frac{\partial}{\partial z} (H^{-2} \rho^{-4}) \right\|, \|H^{-2} \rho^{-4}\| \right\}$$

$$q_n = \sum_{k=0}^n \|\varphi_k\| q_{n-k}$$

Рассмотрим ряд с общим членом $\lambda^n \|\varphi_n\| n^{-2} \lambda_*^{-n}$. Методом индукции можно показать, что $\|\varphi_n\| \leq \|\varphi_0\| n^{-2} \lambda_*^{-n}$. Следовательно, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \|\varphi_n\|$, а поэтому и ряд (2.2) сходятся абсолютно и равномерно с радиусом сходимости $\lambda = \lambda_* = (364 \nu \|\varphi_0\|^2)^{-1}$.

§ 4. Тонкостенный стержень открытого профиля. Пусть поперечное сечение тонкостенного стержня представляет криволинейный открытый профиль, симметрично расположенный относительно средней линии $\alpha = \alpha_0$ (фиг. 6). Для тонкостенных призматических стержней эта задача исследована в [6]. В этом случае в уравнении (1.10) можно пренебречь производной по β и заменить его уравнением вида

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho^3} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) - \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{f(\zeta_0)}{\rho^3} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] K(t, \zeta) d\zeta = DG \frac{H^2}{\rho^3} \quad (4.1)$$

где

$$\sigma_0 = \sigma_{\beta_0} = \frac{1}{H_0^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

Интегрируя (4.1) и принимая во внимание, что $\sigma_0 = 0$ при $\alpha = \alpha_0$, получим

$$\sigma_0(t) = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} f(\zeta_0) \sigma_0 K(t, \zeta) d\zeta = DGg \quad (4.2)$$

где

$$g = g(\alpha, \beta) = (\operatorname{ch} \alpha_0 - \cos \beta) (\alpha - \alpha_0) (\alpha \operatorname{sh}^2 \alpha_0)^{-1}$$

Если к этому уравнению применить вышеизложенный метод и удовлетвориться только первыми двумя приближениями, то для $\sigma_0(t)$ получим

$$\tau_0(t) = Gg [H_0(t) + \lambda Gg [H_1(t) + \int_{\tau_1}^t H_1(\tau) R(t, \tau) d\tau]] + 0(\lambda^2) \quad (4.3)$$

где

$$H_0(t) = D(t) + \int_{\tau_1}^t D(\tau) R(t, \tau) d\tau, \quad H_1(t) = \int_{\tau_1}^t H_0^2(\tau) K(t, \tau) d\tau \quad (4.4)$$

здесь принято $f(\sigma_0) = 1 + \lambda\sigma_0$.

Пользуясь (1.13) и (4.3), получим

$$H_0(t) + \lambda k_1 \int_{\tau_1}^t [H_0^2(\tau) + \int_{\tau_1}^{\tau} H_0^2(x) R(\tau, x) dx] K(t, \tau) d\tau = k_2 \quad (4.5)$$

где

$$k_1 = GJ_2 J_1^{-1}, \quad k_2 = M(GJ_1)^{-1}$$

$$J_1 = - \int_{\Omega} \left(\frac{\rho - \alpha \operatorname{cth} \alpha_0}{H} \frac{\partial z}{\partial \beta} + \frac{z}{H} \frac{\partial \rho}{\partial \beta} \right) g(x, \beta) d\Omega$$

$$J_2 = - \int_{\Omega} \left(\frac{\rho - \alpha \operatorname{cth} \alpha_0}{H} \frac{\partial z}{\partial \beta} + \frac{z}{H} \frac{\partial \rho}{\partial \beta} \right) [g(x, \beta)]^2 d\Omega$$

Если к уравнению (4.5) применить вышеизложенный метод и удовлетвориться только первыми двумя приближениями, то для неизвестной функции $H_0(t)$ получим

$$H_0(t) = k_2 [1 + \lambda k_1 k_2 [3GC(t, \tau_1) - \int_{\tau_1}^t \int_{\tau_1}^{\tau} R(t, x) K(t, \tau) dx d\tau]] + 0(\lambda^2)$$

Решая (4.4) относительно $D(t)$, будем иметь

$$D(t) = H_0(t) + \int_{\tau_1}^t H_0(\tau) K(t, \tau) d\tau$$

Рассмотрим задачу релаксации напряжений. В начальный момент стержню сообщим крутку $D(\tau_1)$, оставляя ее во времени неизменной. Тогда интегральное уравнение (4.2) примет вид

$$\sigma_0(t) - \int_{\tau_1}^t f(\sigma_0) \tau_0 K(t, \tau) d\tau = D(\tau_1) Gg \quad (4.6)$$

Если к уравнению (4.6) применить вышеизложенный метод и удовлетвориться только первыми двумя приближениями, пользуясь (1.13), получим

$$M(t)/M(\tau_1) = H_0'(t) + \lambda k_3 [H_1'(t) + \int_{\tau_1}^t H_1'(\tau) R(t, \tau) d\tau] + 0(\lambda^2) \quad (4.7)$$

где

$$H_0^*(t) = 1 - 3G\gamma_0 (C_0 + A_1 \tau_1^{-1}) e^{\gamma_0 \tau_1^p} r^{p-1} [\Phi_*(rt, p) - \Phi_*(r\tau_1, p)]$$

$$p = 3G\gamma_0 A_1, \quad r = \gamma_0 (1 + 3GC_0), \quad H_1^*(t) = \int_{\tau_1}^t [H_0^*(\tau)]^2 K(t, \tau) d\tau$$

$$k_3 = D(\tau_1) G J_2 J_1^{-1}, \quad \Phi_*(\xi, p) = \int_0^{\xi} e^{-\tau} \tau^{-p} d\tau - \text{неполная гамма-функция.}$$

Аналогичным образом, ограничиваясь в общем решении интегрального уравнения (4.6) первыми тремя приближениями, для определения релаксации крутящего момента получим следующую формулу:

$$\begin{aligned} M(t)/M(\tau_1) = & H_0^*(t) + ik_3 [H_1^*(t) + \int_{\tau_1}^t H_1^*(\tau) R(t, \tau) d\tau] + \\ & + ik_4 [H_2^*(t) + \int_{\tau_1}^t H_2^*(\tau) R(t, \tau) d\tau] + 0(i^3) \end{aligned} \quad (4.8)$$

где

$$H_2^*(t) = \int_{\tau_1}^t [H_0^*(\tau) H_1^*(\tau) + \int_{\tau_1}^{\tau} H_1^*(x) R(t, x) dx] K(t, \tau) d\tau$$

$$k_4 = 2[GD(\tau_1)]^2 J_3 J_1^{-1}, \quad J_3 = \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\rho - a \operatorname{cth} \alpha_0}{H} \frac{\partial z}{\partial \beta} + \frac{z}{H} \frac{\partial \rho}{\partial \beta} \right) [g(z, \beta)]^3 d\Omega$$

Рассмотрим частный случай. Для старого материала можно положить $\varphi(\tau) = C_0$. Тогда из (4.6) получим замкнутое решение

$$\sigma_0(t) = \frac{(\omega - x_2) x_1 - x_2 (\omega - x_1) e^{A^*(t-\tau_0)(x_1-x_2)}}{\omega - x_2 - (\omega - x_1) e^{A^*(t-\tau_0)(x_1-x_2)}}$$

где $\omega = D(\tau_1) Gg$, $A^* = -3GC_0\gamma_0$, а x_1 и x_2 — корни уравнения

$$x^2 + \gamma_0(1 + 3GC_0)x - \omega\gamma_0 = 0$$

Аналогичным образом, если принять $f(\tau_0) = 1 + i\tau_0^2$, то решение получается в квадратурах

$$\begin{aligned} \ln \left| \frac{\sigma_0(t) - \xi_*}{\omega - \xi_*} \right| & \sqrt{\frac{\omega^2 + \xi_*\omega + p_* + \xi_*^2}{\sigma_0^2(t) + \xi_*\sigma_0(t) + p_* + \xi_*^2}} = \\ & \frac{3\xi_*}{\sqrt{4p_* + 3\xi_*^2}} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{4p_* + 3\xi_*^2}[\sigma_0(t) - \omega]}{4p_* + 3\xi_*^2 + [2\sigma_0(t) + \xi_*](2\omega + \xi_*)} = \\ & = A_*(3\xi_*^2 + p_*)(t - \tau_1) \end{aligned}$$

$$A_* = -3GC_0\gamma_0\lambda, \quad p_* = (1+3GC_0)(3GC_0\lambda)^{-1}$$

$$\dot{\epsilon}_* = \sqrt[3]{-\frac{q_*}{2} + \sqrt{Q_*}} + \sqrt[3]{-\frac{q_*}{2} - \sqrt{Q_*}}, \quad q_* = -D(\tau_1)g(3C_0\lambda)^{-1}$$

$$Q_* = \left(\frac{p_*}{3}\right)^3 + \left(\frac{q_*}{2}\right)^2$$

На ЭВМ „ЕС-1022“ при значениях параметров $\text{ch } \alpha_0 = 3$,

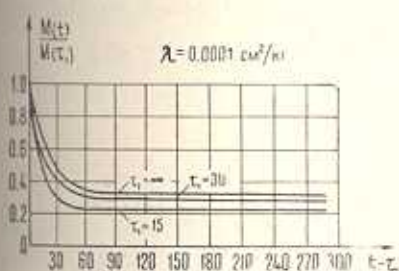
$$a = 6\sqrt{8} \text{ см}, \quad \alpha_0 - \alpha_1 = (2\sqrt{8})^{-1}, \quad A_1 = 4.82 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2 \text{ день/кг},$$

$$C_0 = 0.9 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2/\text{кг}, \quad 3G = 2 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2, \quad \gamma_0 = 0.026 \frac{1}{\text{день}}$$

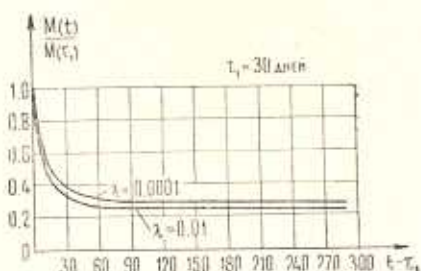
$$M(\tau_1) = 500 \text{ кгсм}$$

дано решение задачи о релаксации крутящего момента тонкостенного стержня. Вычисления показывают, что значения $M(t)/M(\tau_1)$, полученные при помощи формул (4.7) и (4.8), отличаются на 10^{-5} , следовательно, в общем решении (2.2) уравнения (4.6) можно ограничиться первыми двумя приближениями.

На фиг. 7 и 8 показано изменение крутящего момента во времени при различных значениях τ_1 и λ .



Фиг. 7.



Фиг. 8.

За постановку задачи и постоянное внимание выражаю благодарность моему научному руководителю проф. М. А. Задояну.

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Поступила 2 X 1980

Յ. Մ. ՓՈՒԱԳՅԱՆ

ԿՈՐԱՅԻՄ ՃԵՂՔՈՎ ԿՈՐ ՄՆԱՄԵՋ ԶՈՂԻ ՈՂՐՈՒՄԸ
ՈՁ-ԳՆԱՅԻՆ ՍՈՂՔԻ ԳԵՊՔՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո մ

Ուսումնասիրվում է կորագիծ ճեղքով կոր սնամեջ ձողի ուղրումը ոչ զծային ժառանգական սողրի դեպքում: Օգտագործելով թորական կոորդինատները, կիսահակադարձային մեթոդով խնդիրը լարումների ֆունկցիայի նկատ-

մամբ բերվում է ոչ-զծային ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարման, որի լուծումը փնտրվում է աստիճանային շարքի օղնույթյամբ և ապացուցվում է այդ շարքի զուգամիտությունը: Դիտարկվում են մի քանի մասնավոր դեպքեր: Բարակապատ բաց պրոֆիլով ձողի համար լուծված են սողքի և սելարացիայի խնդիրները: Վերջինիս համար բերված թվային օրինակների հիման վրա կատուցված են գրաֆիկներ:

THE TORSION OF A CURVED HOLLOW CORE WITH CURVILINEAR SLOTS UNDER NON-LINEAR CREEP

F. M. POLADIAN

Summary

The torsion of a curved hollow core with curvilinear slots is considered under non-linear hereditary creep. By using toroidal coordinates and the semi-reverse method the problem is reduced to the non-linear integro-differential equation with respect to the stress function. The solution of this equation is obtained in the form of a power series and the series convergence is proved.

Some particular cases are treated.

For a thin-walled core of an open section the problem of creep and relaxation is solved. Graphs for relaxation are plotted on the basis of numerical examples.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.—Л., ГИТТЛ, 1952.
2. Задоян М. А. Пластическое кручение неполного тора. ДАН СССР, 1975, т. 223, № 2.
3. Задоян М. А. Пластическое кручение сектора кольца. Изв. АН СССР, МТТ, 1977, № 1.
4. Новожилов В. В. Теория упругости. М.—Л., Судстройиздат, 1962.
5. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1965.
6. Арутюнян Н. Х., Мануцян М. М. Кручение тонкостенных стержней открытого профиля в условиях неустановившейся ползучести. Изв. АН СССР, механика и машиностроение, 1959, № 6.