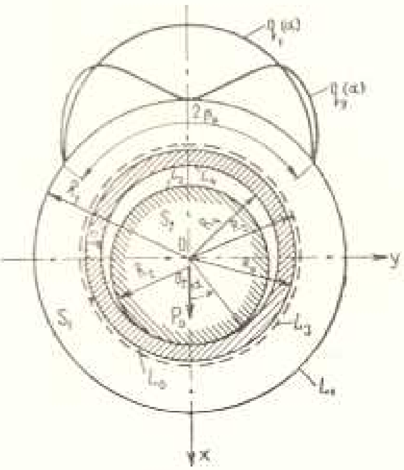
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIV, № 3, 1981 Механика

М. И. ТЕПЛЫЙ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВНУТРЕННЕМ КОНТАКТЕ УПРУГОГО ЦИЛИНДРА И ДВУХ КОНЦЕНТРИЧЕСКИХ КОЛЕЦ, СОЕДИНЕННЫХ ПОСРЕДСТВОМ НАТЯГА

§ 1. *Постановка задачи. Вывод уравнений.* Рассмотрим упругое изотропное концентрическое кольцо S_1 единичной толщины с внутренним R_0 и внешним R_1 радиусами (фиг. 1). На части внешнего контура кольца S_1, определяемой углом $2\beta_0$, приложены заданные напряжения: нормальные (радиальные) $q_1(\alpha)$ и касательные $q_2(\alpha)$. В отверстие кольцевой области S_1 вставлено с натягом Δ кольцо (втулка) S_0, причем $\Delta = R_3 - R_0$, где R_3 — радиус внешней поверхности кольца S_0. Предполагаем, что контакт между кольцами S_0 и S_1 осуществляется по всей их поверхности соприкосновения, то есть по дуге $(0, 2\pi)$. С внутренней поверхностью кольцевой области S_0, радиус которой R_4, контактирует упругий цилиндр (диск) S_2 радиуса R_2, в центре которого приложена сосредоточенная сила, причем радиус цилиндра R_2 несколько меньше радиуса внутренней поверхности кольца S_0 $(R_2 < R_4)$. Трением между кольцами S_0, S_1 и диском S_2 пренебрегаем.



Фиг. 1.

Введем систему прямоугольных декартовых координат xOy, к которой отнесены области S_0, S_1 (или S_2), причем так, что начало этой системы совпадает с центрами круговых отверстий в кольцевых областях S_0 и S_1 (с центром цилиндра S_2), а ось Ox — с линией действия силы P_0, приложенной в центре диска. Обозначим через α полярный угол точек границ областей S_0, S_1, S_2, отсчитываемый от оси Ox против хода часовой стрелки.

В соответствии с постановкой задачи на контурах L_0, L_1, L_2, L_3, L_4 рассматриваемых областей S_0, S_1, S_2 имеем следующие граничные условия:

$$\tau(\alpha) = \begin{cases} 0 \text{ на } L_0, L_2, L_3, L_4 \\ q_2(\alpha) \text{ на } L_1 \text{ при } \pi - \beta_0 \leqslant \alpha \leqslant \pi + \beta_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

$$
\sigma_r(\alpha) = \begin{cases} -p(\alpha) \text{ на } L_2 \text{ и } L_4 \text{ при } -\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0 \\ -q(\alpha) \text{ на } L_0 \text{ и } L_3 \text{ при } 0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi \\ q_1(\alpha) \text{ на } L_1 \text{ при } \pi - \beta_0 \leqslant \alpha < \pi + \beta_0 \\ 0 \text{ на } L_2 \text{ и } L_4 \text{ при } -\alpha_0 \geqslant \alpha \geqslant \alpha_0 \text{ и на } L_1 \text{ при} \\ \qquad\qquad \pi - \beta_0 \geqslant \alpha \geqslant \pi + \beta_0 \end{cases} \tag{1.2}
$$

$$
k_2(\alpha) = k_4(\alpha) \text{ на } L_2 \text{ и } L_4 \text{ при } -\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0 \tag{1.3}
$$

$$
k_0(\alpha) = k_3(\alpha) \text{ на } L_0 \text{ и } L_3 \text{ при } \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi \tag{1.4}
$$

Здесь $-\alpha_0$ и α_0 — полярные углы конечных точек области контакта между телами S_0 и S_2; $k_0(\alpha)$ и $k_3(\alpha)$ — кривизны границ тел S_0 и S_1, деформированных при их посадке с натягом; $k_2(\alpha)$ и $k_4(\alpha)$ — кривизны границ тел S_0 и S_2, деформированных при их посадке с зазором и действии внешней нагрузки; $p(\alpha)$ — контактное давление в области контакта между телами S_0 и S_2; $q(\alpha)$ — контактное давление, возникающее на посадочной поверхности между кольцами S_0 и S_1.

Задача состоит в определении контактных давлений $p(\alpha)$ и $q(\alpha)$, величины угла контакта $2\alpha_0$, а также в установлении условия, при котором не нарушается контакт между контактирующими кольцами S_0 и S_1.

Принятая схема нагружения контактирующих тел позволит использовать результаты решения рассматриваемой задачи для расчета напряжений в проушинах и головках шатунов.

В известных работах [1, 2] рассматриваются задачи о вдавливании кругового диска в тонкое упругое кольцевое покрытие, подкрепляющее контур отверстия в неограниченной плоскости или внутренний контур кольцевой области. В этих работах принимается геометрическая гипотеза Кирхгофа—Лява теории тонких оболочек.

Для вывода уравнений поставленной задачи воспользуемся условиями (1.3) и (1.4), выражающими равенство кривизн деформированных границ тел S_0, S_1, S_2 в области контакта.

Кривизна деформированного контура круговой области радиуса R определяется формулой

$$
k(\alpha) = \frac{1}{R} - \frac{v_r + v_r^{''}}{R^2} \tag{1.5}
$$

где $v_r(\alpha)$ — радиальное смещение точек рассматриваемого контура; $v_r^{''} = \dfrac{d^2 v_r}{d\alpha^2}$.

Сумму радиального смещения v_r и его второй производной $v_r^{''}$ можно выразить на основании [3] следующим образом: для точек контура кругового отверстия в двусвязной области (круговое концентрическое кольцо) или односвязной области (бесконечная плоскость с круговым отверстием)

$$
v_r + v_r^{''} = \operatorname{Re} \frac{R}{2G_j} \{\varkappa_j [\Phi_j^-(t_0) - t_0 \Phi_j^{'-}(t_0)] + \Phi_j^+(t_0) - t_0 \Phi_j^{'+}(t_0)\} \tag{1.6}
$$

для точек контуров конечной односвязной области (круговой диск) или двусвязной области (внешний контур)

$$v_r + v_r^{''} = \mathrm{Re}\,\frac{R}{2G_j}\,[\varkappa_j\,[\Phi_j^{+}(t_0) - t_0\,\Phi_j^{'+}(t_0)] + \Phi_j^{-}(t_0) - t_0\,\Phi_j^{'-}(t_0)] \qquad (1.7)$$

Здесь $\Phi_j^{+}(t_0)$ и $\Phi_j^{-}(t_0)$ — граничные значения функции Колосова—Мусхелишвили $\Phi_j(z)$ при $z \to t_0$, причем $z = re^{i\alpha}$ $(i = \sqrt{-1})$, $t_0 = Re^{i\alpha}$ — точка на контуре радиуса R, $j = 0, 1, 2$ соответственно для областей S_0, S_1 и S_2; $\Phi^{'\pm}(t_0) = \dfrac{d\Phi^{\pm}(t_0)}{dt_0}$; $\varkappa_j = 3 - 4\nu_j$ для плоской деформации и $\varkappa_j = (3 - \nu_j)/1 + \nu_j$ для случая плоского напряженного состояния; $G_j = E_j/2(1 + \nu_j)$, а E_j и ν_j — соответственно модули Юнга и коэффициенты Пуассона для материалов колец $S_0 (j = 0)$, $S_1 (j = 1)$; и цилиндра $S_2 (j = 2)$. В формулах (1.6) и (1.7) под R следует подразумевать радиус того контура, для которого определяется сумма $v_r + v_r^{''}$.

Таким образом, для отыскания суммы радиального смещения и его второй производной необходимо иметь функции Колосова—Мусхелишвили $\Phi_j(z)$ для областей S_0, S_1 и S_2.

На основании известного комплексного представления плоской задачи теории упругости [3] найдены следующие выражения для функций $\Phi_j(z)$:

для области S_0

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_4}\frac{p(t)\,dt}{t - z} + \frac{\varkappa_0 P_0}{2\pi(1 + \varkappa_0)}\,\frac{1}{z} + \frac{\lambda^2}{4\pi}\,c_0 -$$

$$- \frac{\varkappa_0 P_0 (1 - \lambda^2)}{\pi(1 + \varkappa_0) R_3^2}\,z - \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{R_3^k}\lambda^k(\lambda^2 k - k - 1)\,c_k -$$

$$- \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_3}\frac{q(t_1)\,dt_1}{t_1 - z} + \frac{1}{4\pi}\,d_0 + a_0 + a_1 z + \sum_{k=2}^{\infty}(a_k z^k + a_{-k} z^{-k}) \qquad (1.8)$$

где $z = re^{i\alpha}$ $(R_4 \leqslant r \leqslant R_3)$; $\lambda = R_4/R_3$; $t = R_4 e^{i\vartheta}$; $t_1 = R_3 e^{i\vartheta}$ (ϑ — полярный угол, отсчитываемый от оси Ox против хода часовой стрелки);

$$d_0 = \int\limits_0^{2\pi} q(\alpha)\,d\alpha, \quad c_0 = \int\limits_{-\alpha_0}^{\alpha_0} p(\alpha)\,d\alpha \qquad (1.9)$$

$$c_k = \int\limits_{-\alpha_0}^{\alpha_0} p(\alpha)\cos k\alpha\,d\alpha \qquad (1.10)$$

$$a_0 = -\frac{\lambda^2}{4\pi(1 - \lambda^2)}(d_0 - \lambda^2 c_0), \quad a_1 = -\frac{\lambda^3 A_{-1}}{R_3(1 - \lambda^4)}$$

$$a_k = \frac{1}{R_3^k D_k}\lambda^{k+2}[(1 - \lambda^{-2k+2})A_{-k} - (k+1)(1 - \lambda^2)\lambda^{-2k}A_0]\ (k = \pm 2, \pm 3, \cdots)$$

$$A_{-1}=\frac{\lambda}{2\pi}\left[\lambda(\lambda^2-2)c_1+d_1+\frac{2\varkappa_0 P_0(1-\lambda^2)}{(1+\varkappa_0)R_0}\right]$$

$$A_k=-\frac{\lambda^k}{2\pi}\{\lambda^k[(k-1)(\lambda^2k-k-1)(1-\lambda^{-2})]c_k+(k-k\lambda^{-2}-1)d_k\}$$

$$A_{-k}=\frac{\lambda^k}{2\pi}[\lambda^k(\lambda^2k-k-1)c_k+d_k]$$

$$D_k=\lambda^{-2k+2}(1-\lambda^{2k})^2-k^2(1-\lambda^2)^2$$

$$c_1=\int\limits_{-\alpha_0}^{\alpha_0}p(\alpha)\cos\alpha\,d\alpha,\quad d_1=\int\limits_0^{2\pi}q(\alpha)\cos\alpha\,d\alpha \tag{1.11}$$

$$d_k=\int\limits_0^{2\pi}q(\alpha)\cos k\alpha\,d\alpha \tag{1.12}$$

для области S_1

$$\Phi_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{q(t)\,dt}{t-z}+\frac{\varkappa_1P_0}{2\pi(1+\varkappa_1)z}+b_0+b_1z+\sum_{k=2}^{\infty}b_kz^k+\sum_{k=2}^{\infty}b_{-k}z^{-k} \tag{1.13}$$

где $z=re^{i\alpha}$ $(R_0\leqslant r\leqslant R_1)$; $t=R_0e^{i\theta}$

$$b_k=\frac{1}{D_k^*R_1^k}[(1+k)(1-\rho^2)A_k'-(1-\rho^{-2k+2})A_{-k}']\quad(k=\pm2,\ \pm3,\cdots)$$

$$D_k^*=\rho^{-2k+2}(1-\rho^{2k})^2-k^2(1-\rho^2)^2,\qquad \rho=\frac{R_0}{R_1}$$

$$A_k'=\frac{1}{2\pi}\rho^kd_k+B_k,\quad A_{-k}'=-\frac{1}{2\pi}\rho^k(\rho^2k-k-1)d_k+B_{-k}$$

$$b_0=\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(B_0+\frac{\rho^2d_0}{2\pi}\right),\ B_0=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\pi-\beta_0}^{\pi+\beta_0}q_1(\alpha)\,d\alpha \tag{1.14}$$

$$B_k=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\pi-\beta_0}^{\pi+\beta_0}(q_1(\alpha)\cos k\alpha-q_2(\alpha)\sin k\alpha)\,d\alpha \tag{1.15}$$

$$B_{-k}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\pi-\beta_0}^{\pi+\beta_0}(q_1(\alpha)\cos k\alpha+q_2(\alpha)\sin k\alpha)\,d\alpha$$

$$b_1=\frac{A_{-1}'}{R_1(1-\rho^4)},\ A_{-1}'=-\frac{1}{2\pi}\rho(\rho^2-2)d_1-\frac{\varkappa_1\rho d_1(1-\rho^2)}{\pi(1+\varkappa_1)}+B_{-1}$$

$$B_{-1}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\pi-\beta_0}^{\pi+\beta_0}(q_1(\alpha)\cos\alpha+q_2(\alpha)\sin\alpha)\,d\alpha \tag{1.16}$$

для области S_2

$$\Phi_2(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{L_2}\frac{p(t)\,dt}{t-z} + \frac{P_0 z}{\pi R_2^2(1+\varkappa_2)} -$$

$$-\frac{P_0}{2\pi(1+\varkappa_2)}\frac{1}{z} + \frac{1}{4\pi i}\int_{L_2}\frac{p(t)}{t}\,dt \tag{1.17}$$

где

$$z = re^{i\alpha} \quad (0 \leqslant r \leqslant R_2); \quad t = R_2 e^{i\vartheta}$$

На основании граничных условий (1.1)—(1.4) и выражений (1.6)—(1.17) приходим к следующей системе интегральных уравнений для определения контактных давлений $p(\alpha)$ и $q(\alpha)$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\alpha}{2}\,q'(\vartheta)\,d\vartheta = \gamma_1 q(\alpha) + M_0 - \gamma_4\frac{2P_0}{\pi R_0}\cos\alpha +$$

$$+2\sum_{k=2}^{\infty}M_k\cos k\alpha + \frac{4\gamma_5\Delta G_0}{R_0}, \quad 0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi \tag{1.18}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0}\operatorname{ctg}\frac{\alpha-\vartheta}{2}\,p'(\vartheta)\,d\vartheta + 2\gamma_6 p(\alpha) + \frac{\gamma_7}{\pi(1-\lambda^2)}(d_0 - C_0) -$$

$$-\frac{4\gamma_8 P_0}{\pi R_4}\cos\alpha + 2\gamma_7\sum_{k=2}^{\infty}L_k\cos k\alpha = \frac{8\varepsilon\gamma_9 G_0}{R_4}, \quad -\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_0 \tag{1.19}$$

Здесь $\varepsilon = R_4 - R_2$ — радиальный зазор;

$$\gamma_1 = \frac{1}{h_1}[(\varkappa_1-1)G_0 - (\varkappa_0-1)G_1], \quad \gamma_2 = \frac{1}{h_1}(\varkappa_0+1)G_1$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{h_1}(\varkappa_1+1)G_0, \quad \gamma_4 = \frac{1}{h_1}(\varkappa_1 G_0 + G_1), \quad \gamma_5 = \frac{1}{h_1}G_1$$

$$h_1 = (1+\varkappa_1)G_0 + (1+\varkappa_0)G_1, \quad \gamma_6 = \frac{1}{h_2}[(\varkappa_0-1)G_2 - (\varkappa_2-1)G_0]$$

$$\gamma_7 = \frac{1}{h_2}(\varkappa_0+1)G_2, \quad \gamma_8 = \frac{1}{h_2}(\varkappa_0 G_2 + G_0), \quad \gamma_9 = \frac{1}{h_2}G_2$$

$$h_2 = (1+\varkappa_0)G_2 + (1+\varkappa_2)G_0$$

$$P_0 = R_2\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0}p(\alpha)\cos\alpha\,d\alpha \tag{1.20}$$

$$M_0 = \frac{\gamma_2\lambda^2}{2\pi(1-\lambda^2)}c_0 - \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\gamma_3}{1-\rho^2} + \frac{\gamma_2\lambda^2}{1-\lambda^2}\right)d_0 - \frac{\gamma_3 B_0}{1-\rho^2}$$

$$M_k = \left\{\gamma_3 \frac{N_k}{2\pi} - \frac{\gamma_2}{2\pi}[(k-1)\,Y_k - (k+1)\,E_k]\right\} d_k +$$

$$+ \gamma_2 \left\{\frac{1}{2\pi} k\lambda^k [\lambda^2(k-1) - k - 1] - \frac{k-1}{2\pi} X_k + \frac{k+1}{2\pi}\Gamma_k\right\} c_k + \gamma_3 S_k$$

$$N_k = \frac{1}{D_k^*}[(k^2-1)(1-\rho^2)\rho^{2k} + (\rho^{2k}-\rho^2)(k-1)(\rho^2 k - k - 1) -$$

$$-(k^2-1)(1-\rho^2)(\rho^2 k - k - 1) + (k+1)(1-\rho^{2k+2})]$$

$$S_k = \frac{1}{D_k^*}\{[(k^2-1)\rho^k(1-\rho^2) + (k+1)\rho^{-k}(1-\rho^{2k+2})]B_k -$$

$$-[(k-1)\rho^k(1-\rho^{-2k+2}) + \rho^{-k}(1-k^2)(1-\rho^2)]B_{-k}\}$$

$$L_k = \left\{\frac{1}{\pi}[(k-1)\lambda^k X_k - (k+1)\lambda^{-k}\Gamma_k] - \frac{1}{\pi}(k-1)\lambda^{2k}(\lambda^2 k -\right.$$

$$\left.- k - 1)\right\} c_k + \left\{\frac{1}{\pi}[(k-1)\lambda^k Y_k - (k+1)\lambda^{-k}E_k] -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\pi}(k-1)\lambda^k\right\} d_k$$

$$X_k = \frac{\lambda^k}{D_k}\left\{(\lambda^2 k - k - 1)[\lambda^{2k+2} - \lambda^4 - (k^2-1)(1-\lambda^2)^2] + (k+1)(1-\lambda^2)\right\}$$

$$Y_k = \frac{\lambda^2}{D_k}[\lambda^{2k} - \lambda^2 + (k+1)(1-\lambda^2)(k - k\lambda^{-2} - 1)]$$

$$\Gamma_k = \frac{\lambda^k}{D_k}[(k-1)(1-\lambda^2)(\lambda^2 k - k - 1) + \lambda^{2k+2} - 1]$$

$$E_k = -\frac{\lambda^2}{D_k}[\lambda^{2k} + k - k\lambda^{-2} - 1]$$

Из (1.19) вытекает уравнение, полученное в [4] для случая внутреннего контакта диска и кольца при заданных напряжениях $q_1(\alpha)$ и $q_2(\alpha)$.

§ 2. *Решение уравнения (1.18).* Применяя к этому уравнению формулы обращения Гильберта [5] и вычисляя при этом необходимые интегралы, получим

$$q''(\alpha) + \gamma_1^2 q(\alpha) = -\gamma_1 M_0 - \gamma_4(1-\gamma_1)\frac{2P_0}{\pi R_0}\cos\alpha -$$

$$-\frac{4\Delta\gamma_1\gamma_5 G_0}{R_0} + 2\sum_{k=2}^{\infty}(k-\gamma_1)M_k\cos k\alpha \tag{2.1}$$

Следовательно, задача об определении контактного давления $q(\alpha)$ на посадочной поверхности колец S_0 и S_1 свелась к дифференциальному уравнению, имеющему точное решение.

Решая известными методами уравнение (2.1), находим

$$q(\alpha) = -\frac{M_0}{\gamma_1} - \frac{4\gamma_5 \Delta G_0}{\gamma_1 R_0} + \frac{2\gamma_4 P_0}{\pi(1+\gamma_1)R_0}\cos\alpha - 2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{M_k}{\gamma_1+k}\cos k\alpha \qquad (2.2)$$

Предположим, что при $\alpha = \pi$ контактное давление $q(\alpha)$ обращается в нуль, то есть $q(\pi) = 0$. Для этого случая найдем натяг $\Delta = \Delta_{min}$. Из формулы (2.2) при $\alpha = \pi$ получим

$$\Delta_{min} = -\frac{M_0 R_0}{4\gamma_5 G_0} - \frac{\gamma_1 P_0}{4\pi\gamma_5 G_0} - \frac{\gamma_1 R_0}{2\gamma_5 G_0}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{M_k}{\gamma_1+k}\cos k\pi \qquad (2.3)$$

С учетом (2.3) формула (2.2) получает вид

$$q_{min}(\alpha) = \frac{P_0}{\pi R_0}(1+\cos\alpha) - 2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{M_k}{\gamma_1+k}(\cos k\alpha - \cos k\pi) \qquad (2.4)$$

где $q_{min}(\alpha)$ — контактное давление при $\Delta = \Delta_{min}$.

На основании выражений (1.9), (1.11), (1.12) и (2.2) находим

$$d_0 = -\frac{\gamma_2\lambda^2(1-\rho^2)c_0 + 2\pi\gamma_3(1-\lambda^2)B_0}{(1-\lambda^2)[\gamma_1(1-\rho^2)-\gamma_3]-\gamma_2\lambda^2(1-\rho^2)} -$$

$$-\frac{8\pi\Delta G_0\gamma_5(1-\rho^2)(1-\lambda^2)}{R_0\{(1-\lambda^2)[\gamma_1(1-\rho^2)-\gamma_3]-\gamma_2\lambda^2(1-\rho^2)\}}, \quad d_1 = \lambda\frac{P_0}{R_4} \qquad (2.5)$$

$$d_k = -\frac{2\pi\gamma_3 S_k + \gamma_2\{k\lambda^k[\lambda^2(k-1)-k-1]-(k-1)X_k+(k+1)\Gamma_k\}c_k}{\gamma_1+k+\gamma_3 N_k - \gamma_2[(k-1)Y_k-(k+1)E_k]} \qquad (2.6)$$

§ 3. *Приближенное решение уравнения (1.19).* В уравнении (1.19) произведем замену переменных, полагая $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = a\cos\theta$, $\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} = a\cos\vartheta$ $\left(a = \operatorname{tg}\frac{\alpha_0}{2}\right)$. В таком случае это уравнение с учетом (2.5) и (2.6) запишется так:

$$\frac{1+a^2\cos^2\theta}{\pi a}\int_0^{\pi}\frac{p'(\vartheta_1)\,d\vartheta_1}{\cos\vartheta_1-\cos\theta} + 2\gamma_6 p(\theta) - \frac{\gamma_7}{\pi(1-\lambda^2)}c_0 +$$

$$+\frac{P_0}{R_4}\left[\frac{4\gamma_4\gamma_7\lambda}{\pi(1+\gamma_1)(1-\lambda^2)} - \frac{4\gamma_8}{\pi}\,\frac{1-a^2\cos^2\theta}{1+a^2\cos^2\theta}\right] +$$

$$+2\gamma_7\sum_{k=2}^{\infty}\left\{\left[L_1^*\cos(2k\operatorname{arc\,tg}(a\cos\theta)) + \frac{2M_1^*\cos k\pi}{(1-\lambda^2)(\gamma_1+k)}\right]c_k + \right.$$

$$\left.+\frac{P_0}{R_4}\left[L_2^*\cos(2k\operatorname{arc\,tg}(a\cos\theta)) + \frac{2M_2^*\cos k\pi}{(1-\lambda^2)(\gamma_1+k)}\right]\right\} =$$

$$= \frac{4\gamma_9\Delta E_0}{(1+\nu_0)R_4}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \qquad (3.1)$$

Здесь

$$M_1^* = \frac{\gamma_2}{2\pi} \frac{(\gamma_1 + k)\{k\lambda^k[\lambda^2(k-1) - k - 1] - (k-1)X_k + (k+1)\Gamma_k\}}{\gamma_1 + k + \gamma_3 N_k - \gamma_2[(k-1)Y_k - (k+1)E_k]}$$

$$M_2^* = \frac{\gamma_3 S_k^*(\gamma_1 + k)}{\gamma_1 + k + \gamma_3 N_k - \gamma_2[(k-1)Y_k - (k+1)E_k]}$$

$$L_1^* = \frac{1}{\pi}\{(k-1)\lambda^k X_k - (k+1)\lambda^{-k}\Gamma_k - (k-1)\lambda^{2k}(\lambda^2 k - k - 1) -$$

$$- \gamma_2 \frac{k\lambda^k[\lambda^2(k-1) - k - 1] - (k-1)X_k + (k+1)\Gamma_k}{\gamma_1 + k + \gamma_3 N_k - \gamma_2[(k-1)Y_k - (k+1)E_k]}[(k-1)\lambda^k Y_k -$$

$$- (k+1)\lambda^{-k}E_k - (k-1)\lambda^k]\}$$

$$L_2^* = -\frac{2\gamma_3 S_k^*[(k-1)\lambda^k Y_k - (k+1)\lambda^{-k}E_k - (k-1)\lambda^k]}{\gamma_1 + k + \gamma_3 N_k - \gamma_2[(k-1)Y_k - (k+1)E_k]}$$

$$S_k^* = S_k \frac{R_4}{P_0}.$$

Искомое контактное давление $p(\theta)$ представим в виде

$$p(\theta) = \frac{\varepsilon E_0}{R_4} \sum_{m=1}^{2N-1} b_m \sin m\theta, \quad m = 1, 3, \cdots, 2N-1 \tag{3.2}$$

Удовлетворяя уравнению (3.1) в конечном числе N равноотстоящих точек θ_μ, приходим к следующей системе уравнений для определения коэффициентов b_m:

$$\sum_{m=1}^{2N-1} b_m A_{m\mu} = \frac{4\gamma_8}{1+\nu_0} \quad (\mu = 1, 2, \cdots, N) \tag{3.3}$$

где

$$A_{m\mu} = \frac{m(1 + a^2\cos^2\theta_\mu)\sin m\theta_\mu}{a\sin\theta_\mu} + 2\gamma_8 \sin m\theta_\mu -$$

$$- \frac{2\gamma_7}{1-\lambda^2}\sin\frac{m\pi}{2}\operatorname{tg}^m\frac{\alpha_0}{4} + 8m\cos\frac{\alpha_0}{2}\sin\frac{m\pi}{2}\operatorname{tg}^m\frac{\alpha_0}{4}\left(\frac{\lambda\gamma_7}{2(1-\lambda^2)} -\right.$$

$$\left. - \gamma_8\frac{1 - a^2\cos^2\theta_\mu}{1 + a^2\cos^2\theta_\mu}\right) + 4\gamma_7\sum_{k=1}^{\infty}\left\{2a J_{km}\left[L_1^*\cos(2k\operatorname{arc\,tg}(a\cos\theta_\mu)) +\right.\right.$$

$$\left. + \frac{2M_1^*\cos k\pi}{(1-\lambda^2)(\gamma_1 + k)}\right] + \pi\cos\frac{\alpha_0}{2} m \sin\frac{m\pi}{2}\operatorname{tg}^m\frac{\alpha_0}{4}\left[\frac{2M_2^*\cos k\pi}{(1-\lambda^2)(\gamma_1 + k)} +\right.$$

$$\left.\left. + L_2^*\cos(2k\operatorname{arc\,tg}(a\cos\theta_\mu))\right]\right\}, \quad \theta_\mu = \frac{\mu\pi}{2N} \tag{3.4}$$

Связь между постоянными c_0, P_0 и c_k и неизвестными коэффициентами b_m имеет вид

$$c_0 = 2\pi\frac{\varepsilon E_0}{R_4}H_2, \quad H_2 = \sum_{m=1}^{2N-1} b_m \sin\frac{m\pi}{2}\operatorname{tg}^m\frac{\alpha_0}{4} \tag{3.5}$$

$$P_0 = 2\pi\varepsilon E_0 \cos\frac{\alpha_0}{2} H_1, \quad H = \sum_{m=1}^{2N-1} b_m\, m \sin\frac{m\pi}{2} \operatorname{tg}^m \frac{\alpha_0}{4} \tag{3.6}$$

$$c_k = 4a \frac{\varepsilon E_0}{R_4} \sum_{m=1}^{2N-1} b_m J_{km} \tag{3.7}$$

где

$$J_{km} = \int_0^1 \frac{\sin\,(m \arccos x) \cos\,(2k \operatorname{arctg} ax)}{1 + a^2 x^2}\, dx$$

Для получения выражений (3.4)—(3.7) необходимо ряд (3.3) подставить в уравнение (3.1) и равенства (1.9), (1.10), (1.20) и вычислить необходимые интегралы.

Решив систему уравнений (3.3) для заданных угла контакта α_0 и упругих постоянных контактирующих тел, найдем коэффициенты b_m, подставив которые в (3.2), получим функцию распределения контактного давления $p(\alpha)$. Затем с помощью формул (2.3) и (2.4) можно определить контактное давление $q(\alpha)$, действующее на посадочной поверхности между кольцами S_0 и S_1, и величину минимального натяга $\Delta_{\min}$, при котором $q(\pi) = 0$. Эти формулы с учетом (2.5), (2.6) и (3.5)—(3.7) принимают вид

$$q_{\min}(\alpha) = \frac{\varepsilon E_0}{R_4} \Bigg\{ 2\lambda (1 + \cos\alpha) \cos\frac{\alpha_0}{2} H_1 -$$

$$- 4 \sum_{k=2}^{\infty} \Big[2a M_1^* \sum_{m=1}^{2N-1} b_m J_{km} + \pi M_2^* \cos\frac{\alpha_0}{2} H_1 \Big] \frac{\cos k\alpha - \cos k\pi}{\gamma_1 + k} \Bigg\} \tag{3.8}$$

$$\Delta_{\min} = \varepsilon (1 + \nu_0) \Bigg\{ - \frac{\gamma_2 \lambda}{2\gamma_5 (1 - \lambda^2)} H_2 + \frac{\pi \gamma_3 B_0^*}{\gamma_5 (1 - \rho^2) \lambda} \cos\frac{\alpha_0}{2} H_1 -$$

$$- \frac{(1 - \lambda^2)[\gamma_1 (1 - \rho^2) - \gamma_3] - \gamma_2 \lambda^2 (1 - \rho^2)}{\gamma_5 (1 - \rho^2)(1 - \lambda^2)} \Bigg[H_1 \cos\frac{\alpha_0}{2} +$$

$$+ \frac{2}{\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \Big(2a M_1^* \sum_{m=1}^{2N-1} b_m J_{km} + \pi M_2^* H_1 \cos\frac{\alpha_0}{2} \Big) \frac{\cos k\pi}{\gamma_1 + k} \Bigg] \Bigg\} \tag{3.9}$$

где

$$B_0^* = B_0 \frac{R_4}{P_0}.$$

§ 4. *Числовой пример.* Предположим, что напряжения $q_1(\alpha)$ и $q_2(\alpha)$ представлены выражениями

$$q_1(\alpha) = A\,(1 + \cos n\alpha)$$
$$q_2(\alpha) = -A \sin n\alpha, \quad n = 2, 3, \cdots \tag{4.1}$$

где $\pi - \beta_0 \leqslant \alpha \leqslant \pi + \beta_0$; $2\beta_0$ — угол, определяющий протяженность участка внешней поверхности кольца S_1, к которой приложены напряжевия q_1 и q_2; $q_1(\beta_0) = q_2(\beta_0) = 0$ (последнее условие удовлетворяется, когда $n = 2$ соответствует $\beta_0 = \frac{\pi}{2}$, $n = 3$, — $\beta_0 = \frac{\pi}{3}$ и т. д.).

Постоянную A найдем из условия равновесия внешних сил, действующих на контактирующие тела. Это условие имеет вид

$$P_0 = R_1 \int_{\pi-\beta_0}^{\pi+\beta_0} [q_1(\alpha)\cos\alpha - q_2(\alpha)\sin\alpha]\, d\alpha \tag{4.2}$$

Подставив в равенство (4.2) формулы (4.1), найдем

$$A = \frac{(n-1)\lambda\rho P_0}{2[(n-1)\sin\beta_0 + \sin(n-1)\beta_0]R_4}$$

Кроме того, на основании выражений (1.14), (1.15) находим

$$B_0 = \frac{A\beta_0}{\pi}$$

$$B_k = \frac{A}{\pi}\left[\frac{(-1)^k}{k}\sin k\beta_0 + \frac{1}{n-k}\cos(n-k)\pi\sin(n-k)\beta_0\right]$$

$$B_{-k} = \frac{A}{\pi}\left[\frac{(-1)^k}{k}\sin k\beta_0 + \frac{1}{n+k}\cos(n+k)\pi\sin(n+k)\beta_0\right]$$

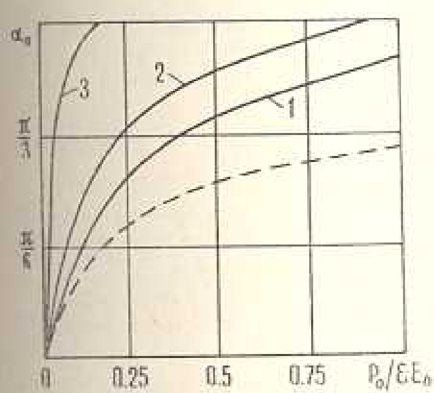
Таблица 1

Параметр $\rho = \frac{R_4}{R_3}$		Угол контакта α_0: $\frac{2}{9}\pi$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{4}{9}\pi$
0,5	b_1	0,1725	0,2712	0,5455
	b_3	0,0062	0,0387	0,1058
	b_5	0,0017	−0,0091	−0,0307
	b_7	0,0005	0,0008	0,0023
	b_9	0,0001	0,0005	0,0013
	b_{11}	0	0,0001	0,0002
	$P_0/\varepsilon E_0$	0,1798	0,3983	0,9772
	Δ_{min}/ε	0,0347	0,1386	0,5166
	$p(0)R_4/\varepsilon E_0$	0,1744	0,2808	0,5775
	$q(0)R_4/\varepsilon E_0$	0,1417	0,2099	0,4254
0,6	b_1	0,1007	0,1548	0,3171
	b_3	0,0138	0,0493	0,1135
	b_5	−0,0017	−0,0068	−0,0166
	b_7	0,0003	0	−0,0021
	b_9	0	0,0005	0,0018
	b_{11}	0,0001	0,0001	0,0002
	$P_0/\varepsilon E_0$	0,1050	0,2279	0,5673
	Δ_{min}/ε	0,0408	0,1293	0,4209
	$p(0)R_4/\varepsilon E_0$	0,1025	0,1621	0,3354
	$q(0)R_4/\varepsilon E_0$	0,0766	0,1001	0,2212

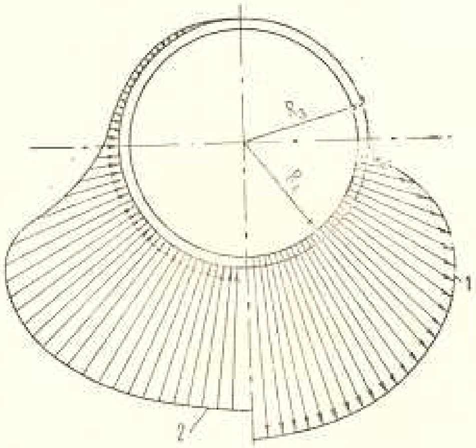
Числовые расчеты проведены для случая, когда контактирующие тела находятся в условиях обобщенного плоского напряженного состояния, т есть когда $\varkappa_j = (3 - \nu_j)/1 + \nu_j$. Кроме того, принято $E_1 = E_2 = 2E_0$; $\nu_1 = \nu_2 = \nu_0 = 0.3$; $\beta_0 = \frac{\pi}{4}$; $n = 4$; $\lambda = 0.9$. Параметр ρ кольца S_1 принимал значения 0.5; 0.6; 0.8.

При указанных значениях параметров вычисления проводились на ЭВМ «ЕС—1020» при $N = 6$.

Значения коэффициентов b_m ($m = 1, 3, \cdots, 11$), величин $P_0/\varepsilon E_0$, $\Delta_{m|a}$ и контактных давлений $p(\alpha)$ и $q(\alpha)$ при $\varkappa = 0$ приведены в табл. 1, а на фиг. 2 показана зависимость между углом контакта α_0 и величиной $P_0/\varepsilon E_0$, причем кривая 1 соответствует $\rho = 0.5$, кривая $2 - \rho = 0.6$, кривая $3 - \rho = 0.8$. Штриховая кривая на этой фигуре построена для случая, когда $R_0 \to \infty$ и $R_3 \to \infty$ (задача о давлении диска S_2 на границу кругового отверстия в бесконечной плоскости).



Фиг. 2.



Фиг. 3.

На фиг. 3 показано распределение контактных давлений $p(\alpha)$ и $q(\alpha)$ для случая, когда $\alpha_0 = \frac{4}{9}\pi$, $\rho = 0.5$, $\lambda = 0.9$ и $\beta_0 = \frac{\pi}{4}$, причем кривая 1 выражает изменение контактного давления $p(\alpha)$ на внутренней поверхности кольца S_0, а кривая 2 — контактного давления $q(\alpha)$ на внешней его поверхности.

Дрогобычский педагогический
институт им. Ив. Франко

Поступила 15 IV 1980

Մ. Ի. ՏՅՈՊԻ

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԳԼԱՆԻ ԵՎ ՁԳՎԱԾՔԻ ՄԻՋՈՑՈՎ ՄԻԱՑՎԱԾ ԵՐԿՈՒ ՀԱՄԱԿԵՆՏՐՈՆ ՕՂԱԿՆԵՐԻ ՆԵՐՔԻՆ ԿՈՆՏԱԿՏԻ ՄԱՍԻՆ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

Ամփոփում

Լուծվել է առաձգական գլանի և երկու համակենտրոն օղակների կոնտակտի ժամանակ առաջացած լարումների բաշխման վերաբերյալ խնդիրը։

Օղակները իրար հետ միացված են ձգվածքի միջոցով, իսկ գլանը դրված է ներքին օղակի անցքի մեջ բացվածքով։

Խնդիրը բերվել է երկու ինտեգրալ հավասարումներից կազմված սիստեմի լուծմանը։ Տրված է խնդրի թվային լուծումը։

SOLUTION FOR THE PROBLEM IN INTERNAL CONTRACT OF AN ELASTIC CYLINDER WITH TWO CONCENTRIC RINGS CONNECTED BY TENSION

M. I. TEPLY

Summary

The problem in distribution of stresses resulting at the contact of an elastic circular cylinder with two concentric rings has been solved. The rings are connected by tighness and the cylinder is inserted into a circular hole in the internal ring with a gap. The problem is reduced to the solution of a system of two integral equations. The numeral olution for the problem is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мхитарян С. М., Торосян Ф. С.* О контактном взаимодействии кругового диска и бесконечной пластины с круговым отверстием, подкрепленным тонким кольцевым покрытием. Изв. АН Армянской ССР, Механика, 1978, т. 31, № 5.
2. *Торосян Ф. С.* О внутреннем контактном взаимодействии кругового диска и кругового кольца, подкрепленного на ободе отверстия тонким кольцевым покрытием. Изв. АН Армянской ССР, Механика, 1979, т. 32, № 1.
3. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
4. *Теплый М. И.* Задача о внутреннем контакте цилиндра и кольца при наличии зазора или натяга. Тезисы докладов Всесоюзной конференции по теории упругости. Ереван, АН Армянской ССР, 1979.
5. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., «Наука», 1968.