

Փ. Մ. ՍՈՒԿԻՆ

КРУЧЕНИЕ КРИВОЙ РАЗНОСТЕННОЙ ТРУБЫ ПРИ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ

Рассматривается задача о кручении круговой разностенной трубы, материал которой обладает свойством нелинейной наследственной ползучести [1].

Пусть полый стержень с круговой осью и постоянным поперечным сечением находится под воздействием перерезывающих сил P и крутящих моментов PR (R — радиус оси стержня), приложенных на торцевых сечениях (фиг. 1).

Решение такой задачи для упрочняющегося материала приведено в работах [2, 3]. Задача о кручении тонкостенных призматических стержней с учетом нелинейной ползучести исследована в [4].

§ 1. Основные уравнения задачи. Принимаем, что для материала стержня справедливы соотношения нелинейно-наследственной теории ползучести Н. Х. Арутюняна [1]

$$2G\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \int_{\tau_0}^t s_{ij} f(\sigma_0) K(t, \tau) d\tau \quad (1.1)$$

где $G = E/3$, а E принимается постоянным, $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma$, δ_{ij} — символ Кронекера, σ — среднее давление, $f(\sigma_0)$ — некоторая функция, характеризующая нелинейную зависимость между напряжениями и деформациями ползучести для данного материала, σ_0 — интенсивность касательных напряжений, $K(t, \tau) = 3G \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau}$, $C(t, \tau)$ — мера ползучести при одноосном напряженном состоянии.

Вспользуемся торондальными координатами α, β, γ : $x = \rho \cos \gamma$, $y = \rho \sin \gamma$, $z = H \sin \beta$, где $\rho = a \operatorname{sh} \alpha (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^{-1}$, $H = a \times \times (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^{-1}$; здесь $0 \leq \alpha \leq \infty$, $-\pi \leq \beta \leq \pi$, $0 \leq \gamma \leq 2\pi$ (фиг. 2).

Для компонентов деформации будем иметь [5]

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u_\alpha}{H} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u_\beta}{H} \right), & 2\varepsilon_{\alpha\gamma} &= \frac{H}{\rho} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{u_\alpha}{H} \right) + \frac{\rho}{H} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u_\gamma}{\rho} \right) \Big|_{(\alpha, \beta)} \\ \varepsilon_{\alpha z} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u_z}{H} \right) + \frac{1}{H^2} \left(\frac{\partial H}{\partial \alpha} u_\alpha + \frac{\partial H}{\partial \beta} u_\beta \right) \Big|_{(\alpha, \beta)} \\ \varepsilon_{\gamma z} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} + \frac{1}{H\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \alpha} u_\alpha + \frac{\partial \rho}{\partial \beta} u_\beta \right) \end{aligned} \quad (1.2)$$

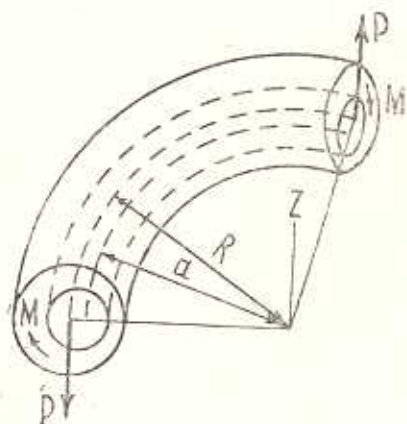
Положим, что все компоненты напряжения, за исключением $\sigma_{\alpha\gamma}$ и $\sigma_{\beta\gamma}$, в любой момент времени t равны нулю, тогда из уравнений равновесия остается [5]

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (H \rho^2 \sigma_{\alpha\gamma}) + \frac{\partial}{\partial \beta} (H \rho^2 \sigma_{\beta\gamma}) = 0 \quad (1.3)$$

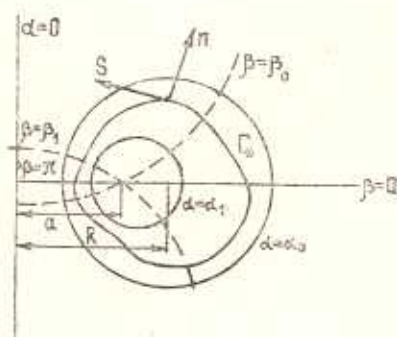
а из остальных следует, что напряженное состояние стержня не зависит от γ , следовательно, тензор деформации также не зависит от γ . Перемещения из (1.2) представим в виде

$$\begin{aligned} u_\alpha &= u_{\alpha 0} + \int F_\alpha d\gamma \Big|_{(\alpha, \beta)}, & F_\alpha &= 2\gamma \varepsilon_{\alpha\gamma} - \frac{r^2}{H} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u_\gamma}{r} \right) \Big|_{(\alpha, \beta)} \\ u_\gamma &= u_{\gamma 0} + \int \left(\rho \varepsilon_{\gamma\gamma} - \frac{1}{H} \frac{\partial \rho}{\partial \alpha} u_\alpha - \frac{1}{H} \frac{\partial \rho}{\partial \beta} u_\beta \right) d\gamma \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $u_{\alpha 0}$, $u_{\beta 0}$, $u_{\gamma 0}$ — произвольные функции α , β и t .



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Подставляя (1.4) в (1.2) и учитывая указанное обстоятельство, получим

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{1}{H} \frac{\partial u_{\alpha 0}}{\partial \alpha} + \frac{1}{H^2} \frac{\partial H}{\partial \beta} u_{\beta 0} \Big|_{(\alpha, \beta)}, \quad 2\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u_{\beta 0}}{H} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u_{\alpha 0}}{H} \right) \quad (1.5)$$

а относительно F_α , F_β приходим к системе трех дифференциальных уравнений, решением которой будет

$$F_\alpha = (D_0 + D_1 z) \frac{1}{H} \frac{\partial \rho}{\partial \alpha} + (D - D_1 z) \frac{1}{H} \frac{\partial z}{\partial \alpha} \Big|_{(\alpha, \beta)} \quad (1.6)$$

где D_0 , D_1 , D — произвольные функции от t .

Исключая из (1.4) u_γ и используя (1.6), получаем уравнение совместности деформаций

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{H}{\rho} \varepsilon_{\beta\gamma} \right) - \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{H}{\rho} \varepsilon_{\alpha\gamma} \right) = D \frac{H^2}{\rho^3} \quad (1.7)$$

Полагая в (1.5) равными нулю все компоненты деформации, кроме $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и $\varepsilon_{\beta\gamma}$, получаем систему относительно $u_{\alpha 0}$, $u_{\beta 0}$, решением которой будет

$$u_{\alpha 0} = - \frac{N_1}{H} \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{N_2}{H} \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(\alpha, \beta)} \quad (1.8)$$

где

$$N_1 = \frac{A}{4} (\rho^2 - z^2) + \frac{B}{2} \rho z + \frac{C_1}{2} \rho - E_1 z$$

$$N_2 = \frac{A}{2} \rho z - \frac{B}{4} (\rho^2 - z^2) + \frac{C_1}{2} z + E_1 \rho$$

здесь A, B, C_1, E_1 — произвольные функции от t .

После подстановки (1.6) и (1.8) в (1.4) получаем выражения для перемещений u_x, u_z, u_r .

Вводя функцию напряжений

$$\sigma_{\alpha\beta} = - \frac{1}{H\rho^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}, \quad \sigma_{\beta\gamma} = \frac{1}{H\rho^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (1.9)$$

от (1.1) и (1.7) приходим к основному уравнению задачи

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho^3} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{\rho^3} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right) - \int_{\alpha_0}^{\alpha} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{f(\alpha_0)}{\rho^3} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{f(\alpha_0)}{\rho^3} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right] \right\} K(t, \alpha) d\alpha = DG \frac{H^2}{\rho^3} \quad (1.10)$$

где

$$\sigma_0 = \frac{1}{H\rho^2} \sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right)^2} \quad (1.11)$$

Таким образом, задача приводится к определению функций $\Phi(\alpha, \beta, t)$ из нелинейного интегро-дифференциального уравнения (1.10) при граничных условиях

$$\Phi(\alpha_0, \beta, t) = 0, \quad \Phi(\alpha_1, \beta, t) = b(t) \quad (1.12)$$

где $b(t)$ — неизвестная функция t , а $\alpha = \alpha_0$, $\alpha = \alpha_1$ соответствуют линиям внешнего и внутреннего контура (фиг. 2).

Крутящий момент выражается формулой

$$M = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} [(\rho - R) \sigma_{\beta\gamma} - \sigma_{\beta\gamma}] d\alpha \quad (1.13)$$

где

$$d\Omega = H^2 d\alpha d\beta = d_r dz$$

Переходя от $\sigma_{\alpha 1}, \sigma_{\beta 1}$ к τ_{r1}, σ_{z1} и подставляя в (1.13), после применения формулы Грина-Остроградского получим

$$M = - \oint_{\Gamma} \Phi d \left(\frac{z}{\rho} \right) + R \oint_{\Gamma} \frac{\Phi}{\rho^2} dz + 2R \int \int_{\Omega} \frac{\Phi}{\rho^3} d\Omega$$

Принимая $\Phi = 0$ на внешнем контуре, для двухсвязной области получим

$$M = - R\Phi_1(t) \oint_{\Gamma_1} \frac{dz}{\rho^2} + 2R \int \int_{\Omega} \frac{\Phi}{\rho^3} d\Omega \quad (1.14)$$

где $\Phi_1(t)$ — значение Φ на контуре Γ_1 .

§ 2. *Обобщение теоремы Бредта.* Пусть Γ_* — замкнутая кривая, целиком лежащая в поперечном сечении скручиваемого стержня. Область, ограниченную контуром Γ_* , обозначим через Ω_* (фиг. 2). Интегрируя обе части уравнения (1.10) в области Ω_* и переходя к контурному интегралу, получим

$$\int_{\Gamma_*} \frac{1}{\rho^3} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \int_{-1}^1 f(\tau_0) \frac{\partial \Phi}{\partial n} K(t, \tau) d\tau \right\} ds = \frac{DG}{2} \int_{\Gamma_*} \frac{dz}{\rho^2} \quad (2.1)$$

где n — направление внешней нормали к контуру Γ_* , а s — дуга этого контура. Формула (2.1) представляет собой обобщение теоремы Бредта о циркуляции деформации сдвигов при кручении стержня с кривой осью при произвольном законе нелинейной связи между деформациями ползучести и напряжениями.

§ 3. *Решение интегро-дифференциального уравнения (1.10).* Положим, что

$$f(\tau_0) = 1 + \lambda \tau_0^2 \quad (3.1)$$

где λ — физический параметр, характеризующий нелинейный закон ползучести. Решение уравнения (1.10) ищем в виде ряда

$$\Phi(\alpha, \beta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \Phi_n(\alpha, \beta, t) \quad (3.2)$$

где Φ_0 соответствует случаю линейно-упругого материала. Подставляя (3.2) в (1.10) и (1.11), приходим к системе рекуррентных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \beta^2} - \frac{3}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial \alpha} \frac{\partial \Phi_n}{\partial \alpha} - \frac{3}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial \beta} \frac{\partial \Phi_n}{\partial \beta} = H^2 \tau_n \quad (3.3)$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\bar{\tau}_0(t) = GD(t) + \int_{\tau_0}^t D(\tau) R(t, \tau) d\tau \quad (3.4)$$

и $\bar{\tau}_n(\alpha, \beta, t)$ при $n \geq 1$ определяются соотношениями

$$\bar{\tau}_n(\alpha, \beta, t) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\tau_0}^t N(t, \tau) (\omega_k \bar{\tau}_{n-1-k} + \text{grad } \Phi_k \text{ grad } \omega_{n-1-k}) d\tau \quad (3.5)$$

где

$$N(t, \tau) = K(t, \tau) + \int_{\tau_0}^t R(t, \xi) K(\xi, \tau) d\xi \quad (3.6)$$

$$\omega_n = \tau^{-n} \sum_{k=0}^n \text{grad } \Phi_k \text{ grad } \Phi_{n-k} \quad (3.7)$$

и $R(t, \tau)$ — резольвента ядра $K(t, \tau)$. Если

$$C(t, \tau) = \tau(\tau) [1 - e^{-\tau(t-\tau)}] \quad (3.8)$$

то

$$R(t, \tau) = \gamma_0 - \gamma_0'(\tau) + [\gamma_0''(\tau) + \gamma_0'^2(\tau) - \gamma_0 \gamma_0'(\tau)] e^{\gamma_0(\tau)} \int_{\tau_0}^t e^{-\gamma_0(x)} dx \quad (3.9)$$

где

$$\gamma_0(t) = \gamma_0 \int_{\tau_0}^t [1 + 3G\varphi(\tau)] d\tau$$

причем, согласно [1] $\varphi(\tau) = C_0 + A_1 \tau^{-1}$, где C_0 , A_1 и γ_0 — некоторые постоянные, характеризующие свойство ползучести материала.

Вводя новую функцию $\Psi_n(\alpha, \beta, t)$ при помощи подстановки

$$\Phi_n(\alpha, \beta, t) = (\text{ch } \alpha - \cos \beta)^{-3/2} \text{sh}^2 \alpha \Psi_n(\alpha, \beta, t)$$

из (3.3) получим уравнение с разделяющимися переменными

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial \beta^2} + \text{cth } \alpha \frac{\partial \Psi_n}{\partial \alpha} - \left(-\frac{1}{4} + \frac{4}{\text{sh}^2 \alpha} \right) \Psi_n = \\ = \frac{H^2 (\text{ch } \alpha - \cos \beta)^{3/2}}{\text{sh}^2 \alpha} \varphi_n \end{aligned} \quad (3.10)$$

Из (1.12) получим $\Psi_n(\alpha_0, \beta, t) = 0$ на внешней окружности, а на внутренней $\Psi_n(\alpha_1, \beta, t) = b_n^1 (\text{ch } \alpha_1 - \cos \beta)^{3/2} \text{sh}^{-2} \alpha_1$, где $b_0^1 = b(t)$, $b_1^1 = b_2^1 = \dots = 0$.

Введем функцию

$$Z_n^m(x, \beta) = P_n^m(\operatorname{ch} x) Q_n^m(\operatorname{ch} \beta) - P_n^m(\operatorname{ch} \beta) Q_n^m(\operatorname{ch} x)$$

где $P_n^m(x)$ и $Q_n^m(x)$ — присоединенные сферические функции соответственно первого и второго рода m -го порядка n -го индекса.

Решая уравнения (3.10), удовлетворяющие указанным выше условиям и переходя к $\Phi_n(x, \beta, t)$, получим

$$\begin{aligned} \Phi_n(x, \beta, t) = & \frac{b_n^1(t)}{2\pi \operatorname{sh}^2 x_1} \frac{\operatorname{sh}^2 x}{(\operatorname{ch} x - \cos \beta)^{3/2}} \int_{-\pi}^{\pi} (\operatorname{ch} x_1 - \cos \gamma)^{3/2} L(x, \beta; \gamma) d\gamma + \\ & + \frac{\operatorname{sh}^2 x}{2\pi (\operatorname{ch} x - \cos \beta)^{3/2}} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_n(\xi, \eta, t) (\operatorname{ch} \xi - \cos \eta)^{3/2} \Gamma(x, \beta; \xi, \eta) d\Omega \quad (3.11) \end{aligned}$$

где

$$L(x, \beta; \gamma) = \frac{Z_{n-1/2}^2(x_0, x)}{Z_{n-1/2}^2(x_0, x_1)} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_{n-1/2}^2(x_0, x)}{Z_{n-1/2}^2(x_0, x_1)} \cos n(\beta - \gamma)$$

а $\Gamma(x, \beta; \xi, \eta)$ — функция Грина для данной задачи, причем $\Gamma(x, \beta; \xi, \eta) = B(x, \beta; \xi, \eta)$ при $\xi \leq x$, где

$$\begin{aligned} B(x, \beta; \xi, \eta) = & \frac{16}{9} Z_{n-1/2}^2(\xi, x_0) \frac{Z_{n-1/2}^2(x_1, x)}{Z_{n-1/2}^2(x_0, x_1)} + \\ & + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_{n-1/2}^2(\xi, x_0) Z_{n-1/2}^2(x_1, x)}{(n^2 - 9/4)(n^2 - 1/4) Z_{n-1/2}^2(x_0, x_1)} \cos n(\beta - \eta) \\ & \text{и } \Gamma(x, \beta; \xi, \eta) = B(\xi, \eta; x, \beta) \text{ при } x \leq \xi \end{aligned}$$

§ 4. *Определение функции $b(t)$.* Для определения функции $b(t)$ воспользуемся обобщенной теоремой Бредта (2.1), которая в данном случае принимает следующий вид:

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{1}{\rho^3} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \int_{\xi_1}^{\xi_2} f(\tau) \frac{\partial \Phi}{\partial x} k(t, \tau) d\tau \right\} d\xi = \frac{-DG}{a \operatorname{sh}^2 x_1} \quad (4.1)$$

Если в общем решении (3.2) ограничиться первыми двумя приближениями, то из (3.11) получим

$$\begin{aligned} \Phi(x, \beta, t) = & m_1 b(t) + m_2 \varphi_0(t) + \int_{\xi_1}^{\xi_2} N(t, \tau) [n_1 b^3(\tau) + \\ & + n_2 b^2(\tau) \varphi_0(\tau) + n_3 b(\tau) \varphi_0^2(\tau) + n_4 \varphi_0^3(\tau)] d\tau + O(\nu^2) \quad (4.2) \end{aligned}$$

где

$$m_1 = m_1(\alpha, \beta) = \frac{\text{sh}^2 \alpha}{2\pi \text{sh}^2 \alpha_1 (\text{ch} \alpha - \cos \beta)^{3/2}} \int_{-\alpha}^{\alpha} (\text{ch} \alpha_1 - \cos \eta)^{3/2} L(\alpha, \beta; \eta) d\eta$$

$$m_2 = m_2(\alpha, \beta) = \frac{\text{sh}^2 \alpha}{2\pi (\text{ch} \alpha - \cos \beta)^{3/2}} \int_{\xi}^{\eta} (\text{ch} \xi - \cos \eta)^{3/2} \Gamma(\alpha, \beta; \xi, \eta) d\Omega$$

а $n_i = n_i(\alpha, \beta)$ определяются через m_1, m_2 .

Пользуясь методом решения, изложенным выше и ограничиваясь только первыми двумя приближениями $b(t)$ и $\varphi_0(t)$, получим

$$b(t) = b_0(t) + \lambda b_1(t) + O(\lambda^2), \quad \varphi_0(t) = \varphi_{00}(t) + \lambda \varphi_{01}(t) + O(\lambda^2)$$

Подставляя (4.2) в (1.14), (4.1) и пользуясь (4.3), получим

$$b(t) = Z(t) + \int_{\tau_1}^t Z(\tau) K(t, \tau) d\tau + \int_{\tau_1}^t \left[Z(\cdot) + \int_{\tau_1}^{\cdot} Z(x) K(\tau, x) dx \right] \times \\ \times R(t, \tau) d\tau + k_1 \lambda \left[g_*(t) + \int_{\tau_1}^t g_*(\tau) R(t, \tau) d\tau \right] + O(\lambda^2)$$

где

$$Z(t) = k_2 [k_3 M(t) + \lambda h(t)]$$

$$h(t) = \int_{\tau_1}^t N(t, \tau) (k_4 b_0^3 + k_5 b_0^2 \varphi_{00} + k_6 b_0 \varphi_{00}^2 + k_7 \varphi_{00}^3) d\tau$$

$$g_*(t) = - \int_{\tau_1}^t N(t, \tau) Y(\tau) d\tau + \int_{\tau_1}^t K(t, \tau) d\tau \int_{\tau_1}^{\tau} N(\tau, x) Y(x) dx + \\ + \int_{\tau_1}^t (k_8 b_0^3 + k_9 b_0^2 \varphi_{00} + k_{10} b_0 \varphi_{00}^2 + k_{11} \varphi_{00}^3) K(t, \tau) d\tau$$

$$Y(t) = k_{12} b_0^3 + k_{13} b_0^2 \varphi_{00} + k_{14} b_0 \varphi_{00}^2 + k_{15} \varphi_{00}^3$$

$b_0(t), \varphi_{00}(t)$ определяются из системы

$$b_0(t) - \int_{\tau_1}^t b_0(\tau) K(t, \tau) d\tau = k_{16} \left[\varphi_{00} + \int_{\tau_1}^t \varphi_{00}(\tau) K(t, \tau) d\tau \right]$$

$$\varphi_{00}(t) = k_2 M(t) + k_{17} b_0(t)$$

а коэффициенты k_i — постоянные и определяются через m_1, m_2 .

§ 5. Исследование сходимости ряда (3.2). Для доказательства существования решения надо показать, что ряд (3.2), где коэффициенты $\Phi_n(\alpha, \beta, t)$ определяются из рекуррентных формул (3.11), сходится абсолютно и равномерно. Для этой цели оценим $\Phi_n(\alpha, \beta, t)$ в зависимости от n . Зададимся фиксированным промежутком изменения времени $\tau_1 \leq t \leq T$ и положим

$$\max |K(t, \tau)| = K_T, \quad \max |R(t, \tau)| = R_T, \quad \tau_1 \leq \tau, \quad t \leq T$$

Тогда из (3.6) следует, что

$$|N(t, \tau)| \leq K_T(1 + R_T T) = N_T \quad (5.1)$$

Вводя норму

$$\|X\| = \max |X| + \sup \frac{|X(A) - X(B)|}{|AB|^\nu}$$

где A, B — произвольные точки внутри поперечного сечения стержня, $0 < \delta < 1$, при помощи априорных оценок Шаудера [6], которые в данном случае пишутся в виде

$$\|D^2 \Phi_n\| \leq c_\Phi \|\varphi_n\| \quad (5.2)$$

где c_Φ — некоторая постоянная, зависящая от формы области, получаем рекуррентную систему неравенств. Из (3.4), (3.5), (3.7), в силу (5.1) и (5.2) получим

$$\|\Phi_n\| \leq \nu \sum_{k=0}^n \|\varphi_k\| q_{n-k}$$

где

$$\nu = 2N_T T \mu c_\Phi^2 (1 + 6\mu c_\Phi)$$

$$\mu = \max_{(\alpha, \beta) \in G} \left\{ \|H^{-2}\|, \left\| \frac{\partial}{\partial x} (H^{-2} \varphi^{-4}) \right\|, \left\| \frac{\partial}{\partial \beta} (H^{-2} \varphi^{-4}) \right\|, \|H^{-2} \varphi^{-4}\| \right\}$$

$$q_n = \sum_{k=0}^n \|\varphi_k\| \|\varphi_{n-k}\|$$

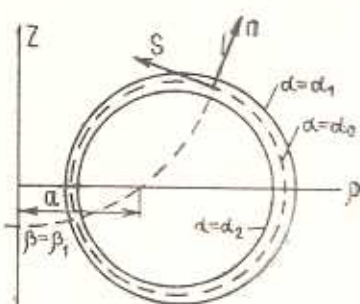
Рассмотрим ряд с общим членом $i^n \|\varphi_0\| n^{-2} \lambda_*^{-n}$. Методом индукции можно показать, что $\|\varphi_n\| \leq \|\varphi_0\| n^{-2} \lambda_*^{-n}$. Следовательно, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \|\varphi_n\|$ и ряд (3.2) сходится абсолютно и равномерно с радиусом сходимости $\lambda = \lambda_* = (364 \nu \|\varphi_0\|^2)^{-1}$.

§ 6. Случай тонкостенной трубы. Рассмотрим тонкостенный разностенный стержень, сечение которого ограничено двумя некоцентрическими окружностями $\alpha = \alpha_1$ и $\alpha = \alpha_2$ (фиг. 3). Ввиду тонкостенности стержня положим, что касательные напряжения по всей толщине стенки профиля

постоянны и направлены параллельно его средней линии. Отнесем сечение стержня к координатной системе (s, n) , где s -координата, отсчитываемая вдоль средней линии профиля Γ_0 от некоторой ее точки, а n -координата, отсчитываемая по нормали к ней. Γ_0 определяется через $x = x_0$, а систему (s, n) можно заменить системой (β, α) .

Ввиду тонкостенности стержня, как обычно, Φ принимаем линейной функцией от координаты. Полагая на внешнем контуре $\Phi = 0$, а на внутреннем $\Phi_1(t)$, найдем $(2h(s) -$ толщина стенки стержня)

$$\Phi = \frac{\Phi_1(t)}{2} \left[1 - \frac{2n}{h(s)} \right] \quad (6.1)$$



Фиг. 3.

Пренебрегая двойным интегралом в (1.14), получим

$$M(t) = 2\pi \operatorname{ch} x_0 \operatorname{sh}^{-3} x_0 \Phi_1(t) \quad (6.2)$$

Пользуясь обобщенной формулой Бредта (2.1) и соотношениями (6.1) и (6.2), определяем

$$D(t) = \frac{a \operatorname{sh}^3 x_0}{2\pi^2 G \operatorname{ch} x_0} \int_{\Gamma_0} \frac{H}{r^3 h} \left\{ M(t) - \int_{z_1}^{z_2} f(z_0) M(z) K(t, z) dz \right\} d\beta \quad (6.3)$$

Здесь

$$\sigma_0(t) = \sigma_1(t) = \operatorname{sh}^3 x_0 M(t) (2\pi \operatorname{ch} x_0^2 h)^{-1}$$

$$h = h(\beta) = H(x_0, \beta) (x_2 - x_1)$$

Принимая $M(t) = M = \text{const}$ и пользуясь (3.1) и (3.8), получим

$$D(t) = \frac{\operatorname{sh}^2 x_0 M}{2\pi a^2 G (x_2 - x_1)} \left\{ (2 \operatorname{ch}^2 x_0 + 3) + 3G \left(C_0 + \frac{A_1}{\tau_1} \right) [1 - e^{-2x_0(t-\tau_1)}] \times \right.$$

$$\left. \times \left[(2 \operatorname{ch}^2 x_0 + 3) + i \left(\frac{\operatorname{sh} x_0 M}{2\pi a^3 \operatorname{ch} x_0 (x_2 - x_1)} \right)^2 c^* \right] \right\} \quad (6.4)$$

где

$$c^* = 2 \operatorname{ch}^8 x_0 + 36 \operatorname{ch}^6 x_0 + \frac{189}{2} \operatorname{ch}^4 x_0 + \frac{105}{2} \operatorname{ch}^2 x_0 + \frac{315}{64}$$

Рассмотрим задачу релаксации напряжений. В начальный момент стержню сообщим крутку $D(\tau_1)$, которая определяется формулой

$$D(\tau_1) = \operatorname{sh}^2 x_0 (2 \operatorname{ch}^2 x_0 + 3) M(\tau_1) [2\pi a^2 G (x_2 - x_1)]^{-1} \quad (6.5)$$

Пользуясь обобщенной формулой Бредта (2.1), а также соотношениями (6.1), (6.2), (6.5) и принимая $f(\sigma_0) = 1 + \lambda\sigma_0$ получим

$$\Phi_1(t) - \int_{\tau_1}^t \Phi_1(\tau) K(t, \tau) d\tau - \lambda_* \int_{\tau_1}^t \Phi_1^2(\tau) K(t, \tau) d\tau = g \quad (6.6)$$

где

$$\lambda_* = \frac{r(16 \operatorname{ch}^6 \alpha_0 + 120 \operatorname{ch}^4 \alpha_0 + 90 \operatorname{ch}^2 \alpha_0 + 5)}{8\pi a^3 \operatorname{sh}^2 \alpha_0 \operatorname{ch} \alpha_0 (2 \operatorname{ch}^2 \alpha_0 + 3) (\alpha_2 - \alpha_1)}$$

$$g = \frac{GD(\tau_1) (\alpha_2 - \alpha_1) a^2 \operatorname{sh} \alpha_0}{\operatorname{ch} \alpha_0 (2 \operatorname{ch}^2 \alpha_0 + 3)}$$

Ограничиваясь первыми двумя приближениями, получим выражения крутящего момента

$$\frac{M(t)}{M(\tau_1)} = H_0(t, \tau_1) + \lambda_1 \left[H_1(t, \tau_1) + \int_{\tau_1}^t H_1(\tau, \tau_1) R(t, \tau) d\tau \right] + O(\lambda_1^2) \quad (6.7)$$

где

$$H_0(t, \tau_1) = 1 - 3G\gamma_0 \bar{p}(\tau_1) e^{r\tau_1 \tau_1^p} \int_{\tau_1}^t e^{-r\tau_1 \tau_1^p} d\tau$$

$$H_1(t, \tau_1) = \int_{\tau_1}^t H_0^2(\tau, \tau_1) K(t, \tau) d\tau$$

$$r = \gamma_0(1 + 3GC_0), \quad p = 3GA_1\gamma_0, \quad \lambda_1 = \lambda_* M(\tau_1) \operatorname{sh}^2 \alpha_0 (2\pi \operatorname{ch} \alpha_0)^{-1}$$

Аналогичным образом, ограничиваясь в общем решении (3.2) первыми тремя приближениями, получим

$$\frac{M(t)}{M(\tau_1)} = H_0(t, \tau_1) + \lambda_1 \left[H_1(t, \tau_1) + \int_{\tau_1}^t H_1(\tau, \tau_1) R(t, \tau) d\tau \right] +$$

$$+ 2\lambda_1^2 \left[H_2(t, \tau_1) + \int_{\tau_1}^t H_2(\tau, \tau_1) R(t, \tau) d\tau \right] + O(\lambda_1^3) \quad (6.8)$$

где

$$H_2(t, \tau_1) = \int_{\tau_1}^t \left[H_0(\tau, \tau_1) H_1(\tau, \tau_1) + \int_{\tau_1}^{\tau} H_1(x, \tau_1) R(\tau, x) dx \right] K(t, \tau) d\tau$$

а $R(t, \tau)$ определяется из (3.9).

Для старого материала можно положить $A_1 = 0$. Тогда из уравнения (6.6) получим замкнутое решение

$$\frac{M(t)}{M(\tau_1)} = \frac{(g - x_2) x_1 - (g - x_1) x_2 e^{-\lambda_2(x_1 - x_2)(t - \tau_1)}}{g [g - x_2 - (g - x_1) e^{-\lambda_2(x_1 - x_2)(t - \tau_1)}} \quad (6.9)$$

где $\lambda_2 = 3GC_0\gamma_0^2 c^*$, а x_1 и x_2 — корни уравнения

$$\lambda_2 x^2 + \gamma_0 (1 + 3GC_0) x - g\gamma_0 = 0$$

Аналогичным образом, если принять (3.1), то решение получается в квадратурах

$$\begin{aligned} \ln \left| \frac{\Phi_1(t) - \xi}{g - \xi} \right| & \sqrt{\frac{g^2 + \xi g + p_1 + \xi^2}{\Phi_1^2(t) + \xi \Phi_1(t) + p_1 + \xi^2}} \\ & - \frac{3\xi}{\sqrt{4p_1 + 3\xi^2}} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{4p_1 + 3\xi^2} [\Phi_1(t) - g]}{4p_1 + 3\xi^2 + [2\Phi_1(t) + \xi][2g + \xi]} = \\ & = A_* (3\xi^2 + p_1) (t - \tau_1) \end{aligned} \quad (6.10)$$

где

$$\xi = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}, \quad Q = \left(\frac{p_1}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$$

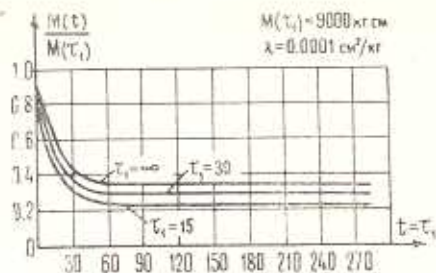
$$p_1 = \alpha^8 (1 + 3GC_0) \operatorname{sh}^4 \alpha_0 (x_2 - x_1)^2 (2 \operatorname{ch}^2 \alpha_0 + 3) (3GC_0 \lambda c^*)^{-1}$$

$$q = \alpha^8 D(\tau_1) (x_2 - x_1)^2 \operatorname{sh}^3 \alpha_0 (3 \operatorname{ch} \alpha_0 C_0 \lambda c^*)^{-1}$$

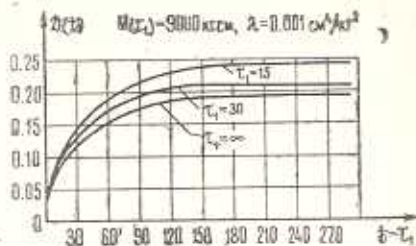
$$A_* = -3GC_0 \gamma_0 c^* [(x_2 - x_1)^2 \alpha^8 \operatorname{sh}^4 \alpha_0 (2 \operatorname{ch}^2 \alpha_0 + 3)]^{-1}$$

На ЭВМ „ЕС-1022“ при значениях параметров $\operatorname{ch} \alpha_0 = 3$, $\alpha = 6\sqrt{8}$ см, $x_2 - x_1 = 1/\sqrt{8}$, $\gamma_0 = 0.026$ 1/день, $3G = 2 \cdot 10^5$ кг/см², $C_0 = 0.9 \cdot 10^{-5}$ см²/кг, $A_1 = 4.82 \cdot 10^{-5}$ см²/кг дано решение задачи ползучести и о релаксации крутящего момента тонкостенного стержня. Вычисления показывают, что значения крутящих моментов, полученные при помощи формул (6.7) и (6.8), отличаются на 10^{-5} , следовательно, в общем решении (3.2) уравнения (6.6) можно ограничиться первыми двумя приближениями. Кроме того, вычисления показывают, что значения крутящих моментов, полученные при помощи формул (6.9) и (6.10), почти совпадают со значениями, полученными при помощи формулы (6.7) при больших значениях τ_1 .

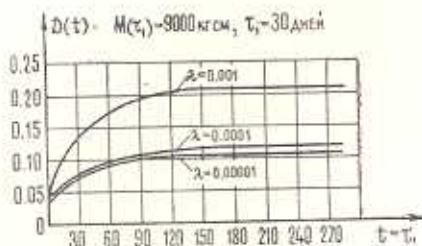
На фиг. 4 показано изменение крутящего момента во времени в зависимости от возраста материала τ , и продолжительности действия нагрузки $t - \tau_1$. На фиг. 5 и 6 показано изменение деформации ползучести при различных значениях τ_1 и λ .



Փնդ. 4.



Փնդ. 5.



Փնդ. 6.

За постановку задачи и постоянное внимание выражаю благодарность моему научному руководителю проф. М. А. Задояну.

Երևանский политехнический институт им. К. Маркса

Поступила 2 VI 1980

Յ. Դ. ՓՈՒՈՅՅԱՆ

ԿՈՐ ՏԱՐԱՊՍԵ ԽՈՂՈՎԱԿԻ ՈՒՐՈՒՄԸ
ՈԶ-ԳՆԱՅԻՆ ՍՈՂԵՐԻ ԳԵՊՔՈՒՄ

Ա. մ. վ. ո. ի. ո. մ.

Ուսումնասիրվում է տարապատ կոր խողովակի ուղորումը ոչ-զծային ժառանգական սողքի հաշվառումով: Թզտադործելով տարական կոորդինատները, կիսադարձային մեթոդով խնդիրը բերվում է ոչ-զծային ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարման՝ լարումների ֆունկցիայի նկատմամբ: Այդ հավասարման լուծումը փնարվում է աստիճանային շարքի տեսքով, և ապացուցվում է այդ շարքի զուգամիտությունը:

Լուծված են սողքի և ուլտրասցիայի խնդիրները բարակապատ կոր խողովակի համար, և այդ դեպքերի համար կառուցված են դրաֆիկներ թվային օրինակների հիման վրա:

THE TORSION OF A CURVILINEAR PIPE WITH DIFFERENT WALL THICKNESS UNDER NON-LINEAR CREEP

F. M. POLADIAN

Summary

The torsion of a curvilinear pipe of different wall thickness with non-linear hereditary creep is investigated. By using the toroidal coordinates and the semi-reverse method the problem is reduced to the non-linear integro-differential equation with respect to the stress function.

The solution of this problem is sought in the form of a power series and the series convergence is shown. For a thin-walled curvilinear pipe the problem of creep and relaxation is solved and for these cases graphs are plotted on the basis of numerical examples.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.—Л., ГИТТЛ, 1952.
2. Задоян М. А. Пластическое кручение неполного тора. Докл. АН СССР, 1975, т. 223, № 2.
3. Задоян М. А. Пластическое кручение сектора кольца. Изв. АН СССР, МТТ, 1977, № 1.
4. Александрян Р. А., Арутюнян Н. Х., Манукян М. М. Кручение тонкостенных стержней замкнутого профиля в условиях неустановившейся ползучести. ПММ, 1958, т. 22, в. 6.
5. Новожилов В. В. Теория упругости. М.—Л., Судстройиздат, 1962.
6. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1965.