

А. Г. БАГДОЕВ, Г. С. БЕЗИРГЕНЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ АЭРИРОВАННОГО ПОТОКА НА ОТКРЫТОМ ВОДОВОДЕ С ПОСТОЯННЫМ ПРОДОЛЬНОМ УКЛОНОМ ДНА

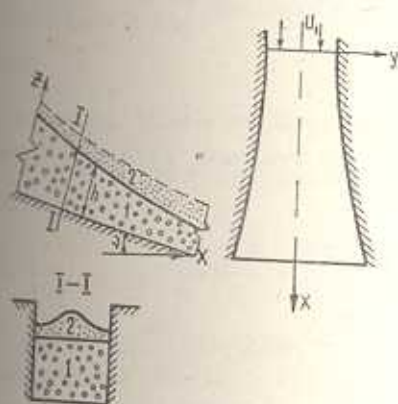
В работе в предположении, что в любом поперечном сечении рассматриваемого участка открытого водовода с плоским наклонным дном, где концентрация по глубине распределена равномерно, а смесь является гомогенной, выведены уравнения движения и неразрывности, уравнения характеристик. Предложен численный алгоритм решения полученных параболических уравнений, на основании которого можно подсчитать глубины и скорости аэрированного потока при заданном очертании боковых стенок, то есть решать прямую задачу, не прибегая к существующим полумпирическим гидравлическим методам. Получено уравнение коротких волн, описывающее нелинейный процесс распространения слабых возмущений в окрестности линейной характеристики. Приведенное решение этого уравнения позволяет качественно и количественно исследовать волновую зону, что для однофазного потока сделано в [17]. Из полученного уравнения коротких волн следует, что ГГА для плановых аэрированных потоков не имеет места. Показано, что в аэрированном потоке стационарное волновое движение всегда устойчиво. Для монохроматических волн, которые образуются на свободной поверхности из-за наличия дисперсии и диссипации, выведено уравнение модуляций.

С возрастанием кинетичности потока (числа Фруда Fr) он значительно аэрируется, так как быстро текущий поток обладает свойством засасывания воздуха и учет аэрации становится необходимым. Математическое условие возникновения аэрации описывается как потеря устойчивости нестационарного волнового движения [11, 12, 14]. К настоящему времени имеющиеся формулы для расчета характеристик аэрированных потоков или получены из уравнений одномерного движения [10—14], или носят эмпирический характер [12].

По гидродинамической теории изучение многофазных потоков в литературе имеются две группы работ. Первая группа работ относится к гомогенным смесям [1, 2, 3, 8]. В таких многофазных потоках относительно перемещение (диффузионное движение) разноплотных сред незначительное и им можно пренебречь, так как в таких смесях разные фазы перемешаны на молекулярном уровне [6], например, случай смеси воды с газовыми пузырьками. Пузырьки настолько малы, что сила тяжести не вызывает существенного относительного движения пузырьков воздуха. Вторая группа работ относится к гетерогенным многофазным потокам [4—12, 9], то есть к таким смесям, когда диффузионное движение разноплотност-

ных сред значительно и им пренебречь нельзя, например, случай взвешанных частиц в разных средах. Гетерогенные смеси, в отличие от гомогенных, характеризуются наличием в них макроскопических неоднородностей [6].

1. Рассмотрим аэрированное движение потока несжимаемой жидкости на переходном участке открытого водовода с произвольно постоянным продольным уклоном дна (фиг. 1). Для математического описания такого по-



Фиг. 1.

тока (смесь воды и пузырьков воздуха) обычно берется двухслойная модель, которая имеет наибольшее распространение [11—14]. Согласно такой модели аэрированный поток разделяется на два слоя: верхний—воздухокапельный (воздушная пелена) и нижний—водовоздушный (фиг. 1). За свободную поверхность принимается поверхность раздела двух слоев, на которой концентрация β в отличие от работ [10—12, 14] предполагается переменной. Отметим, что все ниже-

приведенные исследования относятся к воздушному слою, толщина которого в несколько раз больше толщины воздухокапельного слоя, и в практических расчетах последним можно пренебречь.

В рассматриваемом случае вполне можно допускать, что пузырьки газа настолько малы, что они движутся вместе с жидкостью, и смесь можно считать единой сплошной средой.

Уравнения движения и неразрывности суспензии для водовоздушного слоя с учетом турбулентного трения запишутся в обычной форме:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = g \sin \nu - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - T_x \quad (1.1)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - T_y \quad (1.2)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -g \cos \nu - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - T_z \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial(\rho hu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho hv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho hw)}{\partial z} = 0 \quad (1.4)$$

где u, v, w — осредненные по элементу объема смеси водовоздушного слоя компоненты скорости соответственно по координатным осям Ox, Oy, Oz (фиг. 1), p, ρ — соответственно осредненные значения давления и плотности смеси, T_x, T_y, T_z — осредненные значения компонентов турбулентно-

го трения по координатным осям, ν — уклон дна относительно горизонтальной плоскости, g — ускорение силы тяжести.

Величины, относящиеся к газовой фазе, обозначим индексом $г$, а к жидкой — индексом $ж$. Тогда

$$p = p_r \beta + (1 - \beta) p_{ж} \simeq (1 - \beta) p_{ж}, \quad (p_r \ll p_{ж}) \quad (1.5)$$

причем в дальнейшем для общности удержано слагаемое $p_r \beta$.

Предполагая, что в смеси движение газа происходит изотермично [1], а пузырьки имеют сферическую форму, можем написать

$$p, R^2 = \text{const} \quad (1.6)$$

Соотношение между p_r и p аналогично соотношению между давлением в изолированном пузырьке, пульсирующем в безграничной жидкости, и давлением вдали от него [1, 2]

$$p_r - p = \rho_{ж} R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \rho_{ж} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + \frac{4\mu_{ж}}{R} \frac{dR}{dt} \quad (1.7)$$

где $\rho_{ж}$ — динамический коэффициент вязкости жидкости.

Отметим, что в правой части уравнения (1.7) оставлены члены, характеризующие малую дисперсию и диссипацию, связанные с размерами пузырьков. Учет этих слагаемых в (1.7) существенен в окрестности стационарной волны, отделяющей в плане область одномерного течения от двухмерного, где они описывают структуру решения (см. п. 4).

Условие прилипания газовых пузырьков к жидкости записывается в форме

$$\frac{\beta p_r}{(1 - \beta) p_{ж}} = \text{const} \quad (1.8)$$

Система исходных дифференциальных и алгебраических уравнений замкнута (восемь уравнений с восемью неизвестными: $u, v, \omega, h, \rho, p, \beta, R$).

Проведем осреднение уравнений (1.1)–(1.4) на основе допущений мелкой воды (ω — мало, u, v, ω и β по z меняются незначительно). Отметим, что в случае, когда β по глубине потока меняется значительно, как например, в работе [10] (применяется степенная форма изменения β от z), то осреднить исходные уравнения не удастся. В этом случае течение строго пространственное и такое течение не может быть описано обыкновенным дифференциальным уравнением [10, 13].

Согласно сделанным допущениям, из уравнения (1.3) получаем

$$p = p_0 + \bar{g} \bar{r} (h - z) \cos \nu \quad (1.9)$$

где \bar{r} — осредненное значение r по глубине, а p_0 — величина давления на поверхности раздела. Оно не равно атмосферному, так как над аэрированным потоком находится область воздухокапельного потока, в котором давление больше атмосферного. (В дальнейшем с целью упрощения записи черточку опускаем).

Подставляя полученное выражение (1.9) для давления в уравнение (1.1), (1.2) и проводя осреднение по глубине, получаем

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{g \cos \nu}{\rho h} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^2}{2} \right) + g \sin \nu - T_x \quad (1.10)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{g \cos \nu}{\rho h} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho h^2}{2} \right) - T_y \quad (1.11)$$

После осреднения уравнения неразрывности его можно переписать в следующей форме:

$$\frac{\partial(\rho u h)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v h)}{\partial y} = 0 \quad (1.12)$$

Подставляя выражение p из (1.9) в (1.8) и проводя осреднение по z , находим

$$p_r = p_0 + 1/2 g \rho h \cos \nu + m \quad (1.13)$$

$$\text{где } m = \rho_m R \frac{d^2 R}{dt^2} + 3/2 \rho_m \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + \frac{4\mu_m}{R} \frac{dR}{dt}$$

Таким образом, в предположении, что концентрация по глубине потока распределена равномерно и имеют место допущения мелкой воды, система исходных уравнений после осреднения свелась к системе (1.10)—(1.12), описывающей плановое движение аэрированного потока на открытых водотоках с плоским наклонным дном.

2. В случае конечных возмущений для расчета параметров аэрированного потока можно применить известный из газовой динамики метод характеристик. С этой целью исключим из уравнений движения и неразрывности производные по ρ . Логарифмируя и дифференцируя соотношения (1.5) и (1.8), получаем

$$\frac{d\rho}{d\rho_r} = \frac{\rho_r^2}{p_r} = \frac{\beta [(1-\beta)\rho_m + \rho_r\beta]}{p + m}$$

Так как слагаемые, входящие в правую часть уравнения (1.7), малы, то $d\rho_r - d\rho = dm \approx 0$.

Следовательно,

$$\frac{1}{c^2} = \frac{d\rho}{d\rho_r} \approx \frac{\beta [(1-\beta)\rho_m + \rho_r\beta]}{p_0 + 1/2 g \rho h \cos \nu} \quad (2.1)$$

где c — скорость распространения звука в смеси.

Из формулы (2.1) следует, что скорость звука в жидкости с пузырьками газа значительно меньше, чем скорость звука в чистом газе.

После проведения некоторых преобразований систему уравнений (1.10)—(1.12) можно переписать в следующей форме:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g \sin \nu - 1/2 g \cos \nu (1 + A) \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{gh \cos \nu}{2c^2} A \frac{\partial m}{\partial x} - T_x \quad (2.2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -1/2 g \cos \nu (1 + A) \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{gh \cos \nu}{2c^2} A \frac{\partial m}{\partial y} - T_y \quad (2.3)$$

$$A \left(u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) + h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{h}{c^2} A \left(u \frac{\partial m}{\partial x} + v \frac{\partial m}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.4)$$

где

$$A = (1 - gh \cos \nu / 2c^2)^{-1}$$

Полученные уравнения (2.2)—(2.4) существенно отличаются от известных плановых уравнений движения однофазного потока, приведенных в [15], не только слагаемыми, содержащими релаксационные и диссипативные члены, но и выражением A , характеризующим двухкомпонентность среды.

Отметим, что при выводе уравнений характеристик и вообще всюду, кроме малой окрестности вышеотмеченной волны, слагаемым m , входящим в выражение p_r , вследствие малости радиуса пузырьков (в равновесном состоянии $R \simeq 10^{-4}$ см) можно пренебречь по сравнению с $1/2\rho gh \cos \nu$ и положить $p_r \simeq p$. Умножая уравнение (2.2) на u , а уравнение (2.3) на v и складывая, с использованием уравнения неразрывности (2.4) получаем

$$\left(1 - \frac{u^2}{gh \cos \nu} - \frac{gh \cos \nu}{4c^2} \right) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{uv}{gh \cos \nu} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left(1 - \frac{v^2}{gh \cos \nu} - \frac{gh \cos \nu}{4c^2} \right) \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{u}{h} \operatorname{tg} \nu + u T_x + v T_y \quad (2.5)$$

Обозначим

$$a_0 = 1 - \frac{u^2}{gh \cos \nu} - \frac{gh \cos \nu}{4c^2}, \quad a_1 = -\frac{uv}{gh \cos \nu}$$

$$a_2 = 1 - \frac{v^2}{gh \cos \nu} - \frac{gh \cos \nu}{4c^2}, \quad a_3 = -\frac{u}{h} \operatorname{tg} \nu + \vec{V} \cdot \vec{T}$$

Тогда, вводя величину вихря $\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$, с учетом сделанных обозначений уравнение (2.5) можем переписать в следующей форме:

$$a_0 \frac{\partial u}{\partial x} + 2a_1 \frac{\partial u}{\partial y} + a_2 \frac{\partial v}{\partial y} = -a_3 \omega + a_3 \quad (2.6)$$

Считая на каждом шагу ω известным [15] и записывая соотношения

$$\frac{\partial u}{\partial x} + y' \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{du}{dx}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} + y' \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{dv}{dx} - \omega$$

вдоль кривой $y = y(x)$, можно получить уравнение характеристик

$$y' = \frac{1}{Fr_{a_1} - 1} \left[\frac{uv}{c_a^2} \pm \sqrt{Fr_{a_1} - 1} \right] \quad (2.7)$$

где $Fr_a = V^2/c_a^2$ — эффективное число для смеси, $c_a = \sqrt{gh \cos \nu} \times \sqrt{1 - \beta/2(1 - p_0/p)}$ — скорость распространения слабых возмущений в смеси, а $Fr_{a_1} = u^2/c_a^2$. Отметим, что скорость распространения слабых возмущений в смеси меньше, чем в однофазном бурном течении несжимаемой жидкости по наклонной плоскости.

Как видно из уравнения характеристик (2.7), для того, чтобы характеристики первого и второго семейства были действительными, необходимо и достаточно выполнение условия

$$V > \sqrt{gh \cos \nu \left(1 - \frac{gh \cos \nu}{4c^2}\right)} = c_a = V_{кр} \quad (2.8)$$

Отметим, что критическая скорость аэрированного потока приблизительно в 6.6 раз меньше скорости возникновения аэрации [11, 12].

Следовательно, в аэрированном потоке семейства характеристик всегда действительны.

Уравнение совместности вдоль характеристик записывается в форме

$$\frac{du}{dx} + y'_{1,2} \frac{dv}{dx} = \mp \sqrt{\frac{Fr_a - 1}{Fr_{a_1} - 1}} \omega + \frac{a_3}{a_0} \quad (2.9)$$

Для вычисления параметров течения по характеристикам выведем уравнение для изменения полного гидростатического напора аэрированного потока. С этой целью перепишем уравнение движения в следующей форме:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} - gx \sin \nu \right) + 1/2 g \cos \nu (1 + A) \frac{\partial h}{\partial x} = v\omega - T_x$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{V^2}{2} - gx \sin \nu \right) + 1/2 g \cos \nu (1 + A) \frac{\partial h}{\partial y} = -u\omega - T_y$$

Умножая первое уравнение на dx , а второе — на dy и складывая, получаем

$$d \left(\frac{v^2}{2} - gx \sin \nu \right) + 1/2 g \cos \nu (1 + A) dh = -\frac{\omega}{\rho h} d\Psi - \vec{T} \cdot \vec{ds}$$

где Ψ — функция тока $\left(u = 1/\rho h \frac{\partial \Psi}{\partial y}, v = -1/\rho h \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)$, \vec{T} — вектор сил

трения $\left(\vec{T} = \lambda \frac{\sigma \cdot \vec{V}}{2h}\right)$ в квадратичной области сопротивления, λ — коэффициент Шези, $d\vec{s}$ — вектор вдоль касательной к линии тока ($d\vec{s} = \{dx, dy\}$).

Как следует из выражения (2.1) и (2.4), $A = A(h, \beta)$. Но легко показать, что $\beta = \beta(h)$. Следовательно, $A = A(h)$, то есть смесь несжимаемой жидкости с газовыми пузырьками является баротропной. Таким образом, левая часть уравнения изменения гидродинамического напора является полным дифференциалом, то есть

$$dH = -\frac{\omega}{\rho h} d\Psi - \vec{T} \cdot d\vec{s} \quad (2.10)$$

где

$$H = \frac{V^2}{2g} - x \sin \nu + 1/2h \cos \nu \left[1 + 1/h \int A(h) dh \right] \quad (2.11)$$

— полный гидродинамический напор для аэрированного потока.

Вдоль линии тока уравнение (2.10) запишется в форме

$$dH = -\vec{T} \cdot d\vec{s} \quad (2.12)$$

Таким образом, задача расчета параметров аэрированного потока при конечных возмущениях сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.7), (2.9), (2.10), (2.11), (2.12), которое можно реализовать только численно, определяя на каждом шагу сначала напор H из (2.12), а затем x, y, ω, u, v, h соответственно из (2.12), (2.10), (2.9) и (2.11).

Изложенный метод характеристик отличается от стандартного метода, известного в газовой динамике, тем, что задача интегрирования с тремя семействами характеристик сведена к задаче интегрирования с двумя семействами характеристик. Следует еще отметить, что полученные уравнения характеристик отличаются от известных в газовой динамике уравнений характеристик не только из-за двухфазности среды, но и из-за неустойчивости ГГА (см. п. 3).

3. Выведем из плановых уравнений движения и неразрывности (2.2)—(2.4) нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных, описывающее нелинейный процесс распространения стационарных возмущений в узкой области, охватывающей окрестность стационарной волны $y = y_0(x)$

$$(y_0'(x) = (Fr_{a(0)} - 1)^{-1/2}, \quad Fr_{a(0)} = \frac{u_{(0)}^2}{gh_{(0)} \cos \nu} \frac{2A_{(0)}}{1 + A_{(0)}} \text{ — число Фруда}$$

в одномерном аэрированном потоке).

Вводя лучевую переменную $\xi = y - y_0(x)$ и переходя в уравнениях (2.2)—(2.4) от декартовых координат x, y к координатам x, ξ , получаем

$$\begin{aligned}
u \left(\frac{\partial u}{\partial x} - y_0' \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + v \frac{\partial u}{\partial \xi} &= g \sin \nu - 1/2 g \cos \nu (1 + A) \left(\frac{\partial h}{\partial x} - y_0' \frac{\partial h}{\partial \xi} \right) + \\
&+ y_0' \frac{y h \cos \nu}{2 \rho c^2} A \frac{\partial m}{\partial \xi} - T_x \\
u \left(\frac{\partial v}{\partial x} - y_0' \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) - v \frac{\partial v}{\partial \xi} &= -1/2 g \cos \nu (1 + A) \frac{\partial h}{\partial \xi} - \\
&- \frac{g h \cos \nu}{2 \rho c^2} A \frac{\partial m}{\partial \xi} - T_y \\
A \left[u \left(\frac{\partial h}{\partial x} - y_0' \frac{\partial h}{\partial \xi} \right) + v \frac{\partial h}{\partial \xi} \right] + h \left(\frac{\partial u}{\partial x} - y_0' \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) + \\
&+ \frac{h}{\rho c^2} A \left(-y_0' u \frac{\partial m}{\partial \xi} + v \frac{\partial m}{\partial \xi} \right) = 0
\end{aligned}$$

Так как в окрестности линейной характеристики $y = y_0(x)$ течение мало отличается от одномерного, то решение этих уравнений можем искать в форме

$$u = u_{(0)} + \bar{u}, \quad v = \bar{v}, \quad h = h_{(0)} + \bar{h} \quad (3.1)$$

где $\bar{u}, \bar{v}, \bar{h}$ — возмущенные значения u, v, h (малые добавки и необязательно, чтобы все имели одинаковый порядок малости), а индексом (0) (как и ниже) обозначены значения рассматриваемых параметров в одномерном движении.

Подставляя выражения u, v, h из (3.1) в преобразованные уравнения движения и неразрывности, отбрасывая в первых двух из полученных уравнений члены $u \partial \bar{u} / \partial x, u \partial \bar{v} / \partial x$, а в третьем — члены

$$\begin{aligned}
A_{(0)} \bar{u} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x}, \quad \bar{A} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x}, \quad \bar{A} \bar{u} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x}, \quad \bar{A} \bar{u} \frac{dh_{(0)}}{dx} \\
A_{(0)} \bar{u} \bar{v} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \xi}, \quad \bar{A} u_{(0)} \bar{v} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \xi}, \quad \bar{A} u \bar{v} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \xi}
\end{aligned}$$

и приравнивая в них члены первого порядка малости $o(u)$, с учетом уравнений одномерного движения получаем уравнение первого приближения (вследствие их громоздкости эти уравнения не приводятся).

Уравнения движения одномерного движения в рассматриваемом случае имеют вид

$$u_{(0)} \frac{du_{(0)}}{dx} = g \sin \nu - 1/2 g \cos \nu (1 + A_{(0)}) \frac{dh_{(0)}}{dx} - T_{x(0)} \quad (3.2)$$

$$A_{(0)} u_{(0)} \frac{dh_{(0)}}{dx} + h_{(0)} \frac{du_{(0)}}{dx} = 0 \quad (3.3)$$

которые при отсутствии пузырьков ($\beta = 0$, $A_{(0)} = 1$) сводятся к известному уравнению гидравлики одномерного движения.

Приравнявая в уравнениях первого приближения члены, содержащие производные $\frac{\partial u}{\partial \xi}$, $\frac{\partial v}{\partial \xi}$, $\frac{\partial h}{\partial \xi}$ линейно, и интегрируя выписанные уравнения, получим алгебраические соотношения, из которых находим условия совместности

$$h = -2 \frac{u_{(0)}}{g \cos \nu} \frac{1}{1 + A_{(0)}} u, \quad v = -\frac{\bar{u}}{y_0} \quad (3.4)$$

(Третье соотношение тождественно выполняется, так как оно дает уравнение линейной характеристики).

Заменяя в членах уравнений первого приближения, содержащих производные по x от h , v , а также в нелинейных членах h , v выражением (3.4), с использованием уравнений нулевого приближения находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{Fr_{a(0)}^2}{2(Fr_{a(0)} - 1)^{3/2}} (2 + 1/A_0) \left[1 + \frac{1 - 2p_c/p_{r(0)} A_{(0)}}{c_{(0)}^2 (2 + 1/A_{(0)}) (1 + 1/A_{(0)})^2} \times \right. \\ \left. \times u_{(0)}^2 \frac{\sqrt{Fr_{a(0)} - 1}}{Fr_{a(0)}^2} \right] \frac{\bar{u}}{u_{(0)}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \\ + \frac{1}{2(Fr_{a(0)} - 1)} \left[\frac{(4 + 3/A_{(0)}) Fr_{a(0)} + 2 \operatorname{tg} \nu}{(1 + 1/A_{(0)}) (Fr_{a(0)} - 1)} \frac{\operatorname{tg} \nu}{h_{(0)}} + \right. \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\left. + \frac{Fr_{a(0)}}{2A_{(0)}} \frac{d \ln(1 + A_{(0)})}{dx} - \frac{gh_{(0)} \cos \nu}{2c_0^2} Fr_{a(0)} \left(\frac{1}{(1 + A_0) \sqrt{Fr_{a(0)} - 1}} - A_{(0)} \right) \times \right.$$

$$\left. \times (1 - 2p_c/p_{r(0)} A_{(0)}) \frac{d \ln u_{(0)}}{dx} \right] \bar{u} =$$

$$= \frac{3}{4} \frac{A_{(0)} u_{(0)}}{c_{(0)}^2 (1 + 1/A_{(0)}) p_{r(0)}} \frac{1}{(Fr_{a(0)} - 1)^{3/2}} \times$$

$$\times (c_{v(0)} - y_0/A_{(0)} Fr_{a(0)} + 2y_0 A_{(0)} u_{(0)}^2) \left(p_{*} u_0 y_0' \partial^3 \bar{u} / \partial \xi^3 - 4p_{*} / R_0 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi^2} \right)$$

Если в уравнении (3.5) отбросить правую часть, то его решение запишется в виде

$$\bar{u} = f(\xi) \exp \left\{ - \int_0^{\xi} R(t) dt \right\} \quad (3.6)$$

$$\xi = f(\zeta) \int_{x_{cr}}^x \frac{C}{u^{(0)}} \exp \left\{ - \int_0^x R(t) dt \right\} + \zeta \quad (3.7)$$

где через R и C соответственно обозначены коэффициенты при u и $u \partial u / \partial \xi$ в уравнении (3.5).

Полученное решение уравнения коротких волн (3.5) позволяет исследовать возникновение, развитие и затухание косых прыжков в зависимости от форм боковых очертаний рассматриваемого участка [17], то есть структуру аэрированного потока в окрестности линейной характеристики

$$y = b_0 - \int_0^x \frac{dt}{V \text{Fr}_{a^{(0)}} - 1}$$

4. Перепишем уравнение (3.5) в следующей форме:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + R \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + C \bar{u} = E \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \xi^3} + F \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi^2} \quad (4.1)$$

где через E и F — соответственно обозначены коэффициенты при $\partial^3 u / \partial \xi^3$ и $\partial^2 u / \partial \xi^2$.

После замены в (4.1) \bar{u} через U по формуле $u = e^{-\sigma x} U$ уравнение (4.1) примет вид

$$\frac{\partial U}{\partial x} + R e^{-\sigma x} U \frac{\partial U}{\partial \xi} = E \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} + F \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \quad (4.2)$$

Решение (4.2) ищем в форме разложения монохроматических волн

$$U = U_1 e^{i\tau + \sigma x} + U_1^* e^{-i\tau + \sigma x} + U_2 e^{2i\tau + 2\sigma x} + U_2^* e^{-2i\tau + 2\sigma x} + U_0 \quad (4.3)$$

где U_1 , U_1^* , U_2 , U_2^* — комплексно-сопряженные амплитуды, τ — основной эйконал, а σ — характеристика затухания, которая подлежит определению. В разложении (4.3) все функции, кроме эйконала, предполагаются медленно меняющимися функциями.

Обозначим $\alpha = \partial \tau / \partial x$, $\beta = \partial \tau / \partial y$.

Вычисляя производные U по ξ и x , подставляя их выражения в (4.2) и приравнивая в полученном уравнении члены при $e^{2i\tau}$, $e^{i\tau}$ и свободные члены, соответственно получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial x} + (i\alpha + \sigma + iE\beta^3 + F\beta^3) U_1 + R e^{-\sigma x} i (U_1^* U_2 e^{2\sigma x} + U_0 U_1) \beta + \\ + (3E\beta - 2iF) \beta \frac{\partial U_1}{\partial \xi} - (3iE\beta + F) \frac{\partial^2 U_1}{\partial \xi^2} = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$(2i\alpha + 2\sigma + 8Ei\beta^3 + 4F\beta^3) U_2 + iR e^{-\sigma x} U_1^2 \beta = 0 \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial x} + Re^{-cx} \left(U_0 \frac{\partial U_0}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} |U_1|^2 e^{2s\xi} \right) = E \frac{\partial^3 U_0}{\partial \xi^3} + F \frac{\partial^2 U_0}{\partial \xi^2} \quad (4.6)$$

В уравнении (4.4) приравняв нулю коэффициент при U_1 , получаем дисперсионное соотношение

$$ix + \sigma + iE\beta^3 + F\beta^2 = 0$$

отсюда $\alpha = -E\beta^3$, $\sigma = -F\beta^2$.

Подставляя выражения α и σ в (4.5), получаем уравнение для выражения U_2 через U_1 ,

$$2(3iE\beta + F)\beta^2 U_2 = -Rie^{-c\xi} U_1^2 \beta \quad (4.7)$$

Предполагая, что в (4.6) дисперсионные и диссипативные члены малы, получаем

$$\frac{\partial U_0}{\partial x} = -Re^{-c\xi + 2s\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} |U_1|^2 \quad (4.8)$$

Следуя Уизему [18], приравниваем в (4.4) первые производные, так как по порядку каждый из них больше производной второго порядка, но их сумма того же порядка

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} + (3E\beta - 2iF)\beta \frac{\partial U_1}{\partial \xi} = 0, \text{ откуда } \frac{\partial}{\partial x} \simeq (-3E\beta - 2iF)\beta \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (4.9)$$

Считая [18], что U_0 связано с основным волновым движением таким же соотношением, с использованием (4.8) получаем

$$U_0 = \frac{Re^{-c\xi + 2s\xi} |U_1|^2}{(3E\beta - 2iF)\beta} \quad (4.10)$$

Подставляя выражения U_2 и U_0 соответственно из (4.7) и (4.10) в (4.4), окончательно получаем уравнение модуляций для комплексной амплитуды U_1 ,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U_1}{\partial x} + (3E\beta - 2iF)\beta \frac{\partial U_1}{\partial \xi} - (3iE\beta + F) \frac{\partial^2 U_1}{\partial \xi^2} \\ & - \frac{R^2}{18E^2\beta^2} e^{-2(c+s)\xi} [(4+i)F + 3(1-2i)E\beta] |U_1|^2 U_1 = 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Отметим, что на быстротоках подобные волны образуются из-за наличия дисперсии или на некотором расстоянии от входного сечения, или всюду — при наличии волнистой стенки.

Институт механики
АН Армянской ССР

НИИ водных проблем и
гидротехники Армянской
ССР

Поступила 16 VII 1979

ԱԷՐԱՑՎԱԾ ՀՈՍԱՆՔԻ ՌԻՍՈՒՄԵՆԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆԸ
ԲԱՅ ԶՐԱՀՈՍԱՆՔԻ ՎՐԱ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Ստացված են շրի և դազի լուծույթի համար պլանային շարժման հաճախորաները: Դուրս են բերված կարճ ալիքների հաճախորումը: Ցույց է արված, որ ստացիանար աերացված հոսանքի ալիքային շարժումը միշտ կայուն է:

THE INVESTIGATION OF AERATION FLOW
IN THE OPEN CANAL

A. G. BAGDOEV, G. S. BESIRGENIAN

S u m m a r y

The problem of propagation of nonlinear waves on the surface of steady aeration flow with small depth is considered. In the assumption of uniform distribution of concentration in flow depth for homogenous gas-fluid mixture the plane equations of motions are derived.

The equations of characteristics are obtained and a numerical method for solution of the equations is suggested. The equations of short waves, describing the nonlinear process of propagation of weak disturbances in the neighbourhood of a linear wave is derived.

It is shown that in steady aeration flow the wave motion is always stable.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Ван Вейларден. Одномерные течения жидкостей с пузырьками газа. Реология суспензий. М., изд. «Мир», 1975.
2. Богачев Г. К. Волны сжатия в суспензии газовых пузырьков в жидкости. Механика, сб. пер. ин. статей, 1968, № 3.
3. Кошарко Б. С. Движение смеси жидкости с газовыми пузырьками. Тр. международного симпозиума в Ленинграде, М., изд. «Наука», 1973.
4. Седов Л. И. Механика сплошной среды, т. 1, 2, М., изд. «Наука», 1970.
5. Рахматуллин Х. А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред. ПММ, 1956, т. 20, № 2.
6. Низматуллин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М., изд. «Наука», 1978.
7. Баренблатт Г. И. О движении взвешенных частиц в турбулентном потоке. ПММ, 1953, т. XVII, вып. 3.
8. Балдос А. Г. Пространственные нестационарные движения сплошной среды с ударными волнами. Ереван, изд. АН АрмССР, 1961.
9. Норданский С. В., Куликовский А. Г. О движении жидкости, содержащей мелкие частицы. Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа, 1977, № 4.
10. Войнич-Сяноженский Т. Г. Некоторые вопросы устойчивости потоков и их свободной поверхности при течении с большими скоростями. Тр. координационных совещаний по гидротехнике, 1963, вып. VII.

11. *Войнич-Сяноженцкий Т. Г.* О критериальном условии возникновения аэрации плавно изменяющихся бурных потоков. Тр. I Закавказской конференции молодых научных специалистов, Ереван, 1960.
12. *Войнич-Сяноженцкий Т. Г., Сакварелидзе В. В.* Критерии аэрации плавноизменяющихся бурных потоков и их экспериментальная проверка. Плавноизменяющееся неравномерное движение аэрированных потоков. Тр. координационных совещаний по гидротехнике, 1969, вып. 52.
13. *Картвелишвили Н. А.* Волнообразование на быстротоках. Изв. АН СССР, ОТН, 1955, № 1.
14. Рекомендации по гидравлическому расчету водопропускных трактов безнапорных водосбросов на аэрацию и волнообразование, под ред. Гунько Ф. Г., Исаченко Н. Б., Л., ВНИИГ, 1978.
15. *Емцев Б. Т.* Двухмерные бурные потоки. М., изд. «Энергия», 1961.
16. *Лайтхилл М. Дж.* Высшие приближения. Сб. «Общая теория аэродинамики больших скоростей», М., 1962.
17. *Бадоса А. Г., Безиргянн Г. С.* Исследование сверхкритического течения в открытом водоводе конфузорной формы с произвольным продольным уклоном, Изв. АН АрмССР, Механика, 1975, т. XXVIII, № 2.
18. *Уизем Дж. Б.* Линейные и нелинейные волны. М., «Мир», 1977.