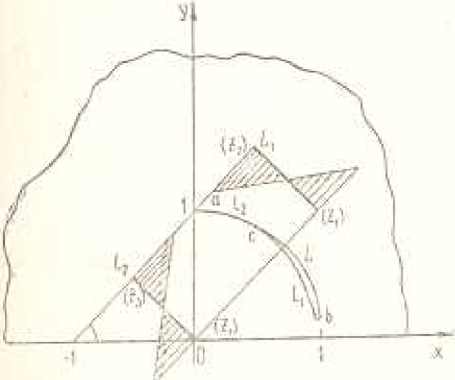
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIV, № 2, 1981 Механика

Б. Я. КАНТОР, Е. А. СТРЕЛЬНИКОВА, Л. А. ФИЛЬШТИНСКИЙ

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ КРИВОЛИНЕЙНЫМ РАЗРЕЗОМ

1. *Постановка задачи.* Пусть свободная (защемленная) анизотропная полуплоскость, ослабленная криволинейным разрезом L, находится под действием усилий, распределенных вдоль двух параллельных отрезков L_1 и L_2 (фиг. 1).



Фиг. 1.

Будем предполагать, что L — простая разомкнутая дуга Ляпунова [9] с концами a и b, не имеющая общих точек с границей полуплоскости. Внешние усилия, действующие в полуплоскости, будем учитывать потенциалами $\Phi_{10}(z_1)$ и $\Phi_{20}(z_2)$; берега разреза L считаем свободными от нагрузок.

Допустим, что на части l_1 разреза L происходит раскрытие, а на участке l_2 — смыкание берегов. При этом l_1 и l_2 заранее не заданы.

Требуется описать поле напряжений в окрестности трещины и определить участок контакта l_2.

Рассмотрим сначала краевую задачу в предположении, что участки l_1 и l_2 известны. Участок l_1 является зоной раскрытия, поэтому граничные условия на нем можно записать в виде

$$N^+ = N^- = 0, \quad T^+ = T^- = 0 \tag{1.1}$$

Здесь $N^\pm$ и $T^\pm$ — соответственно нормальное и касательное усилия на L, верхний знак относится к левому, нижний — к правому берегам разреза при движении от начала разреза (точка a) к концу (точка b).

Краевые условия на l_2 при отсутствии сил трения определяются из условий контакта

$$N^+ = N^-, \quad T^+ = T^- = 0, \quad u_n^+ = u_n^- = 0, \quad u_n^{\pm} = u^{\pm} \cos\psi \pm v^{\pm} \sin\psi \qquad (1.2)$$

Здесь $u^{\pm}$, $v^{\pm}$ — соответствующие компоненты вектора смещения, ψ — угол между положительным направлением нормали к левому берегу в точке t и осью $0x$.

Согласно [10], напряжения и смещения в анизотропной пластинке выражаются через аналитические функции $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$ в виде

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= 2\mathrm{Re}\,\{\mu_1^2 \Phi_1(z_1) + \mu_2^2 \Phi_2(z_2)\} \\
\sigma_y &= 2\mathrm{Re}\,\{\Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2)\} \\
\tau_{xy} &= -2\mathrm{Re}\,\{\mu_1 \Phi_1(z_1) + \mu_2 \Phi_2(z_2)\} \\
u &= 2\mathrm{Re}\,\{s_1 \varphi_1(z_1) + s_2 \varphi_2(z_2)\} \\
v &= 2\mathrm{Re}\,\{q_1 \varphi_1(z_1) + q_2 \varphi_2(z_2)\}
\end{aligned} \qquad (1.3)$$

$$s_\nu = a_{11}\mu_\nu^2 + a_{12} - a_{26}\mu_\nu, \quad q_\nu = a_{12}\mu_\nu + \frac{a_{22}}{\mu_\nu} - a_{26}$$

$$\Phi_\nu(z_\nu) = \varphi_\nu'(z_\nu), \quad z_\nu = x + \mu_\nu y, \quad \nu = 1, 2$$

Здесь μ_1, μ_2 — характеристические числа.

Можно показать, что комплексные потенциалы $\Phi_1(z_1)$, $\Phi_2(z_2)$ для анизотропной полуплоскости, находящейся под действием сосредоточенной силы $\vec{P}(P\cos\omega, P\sin\omega)$, приложенной в точке z_0, представляются следующим образом:

$$\Phi_\nu(z_\nu) = \frac{A_\nu}{z_\nu - z_{\nu 0}} + \sum_{n=1}^{2} \gamma_{\nu n} \frac{\overline{A}_n}{z_\nu - \overline{z}_{n0}}$$

$$z_{\nu 0} = \mathrm{Re}\,z_0 + \mu_\nu \mathrm{Im}\,z_0, \quad \nu = 1,2 \qquad (1.4)$$

Здесь константы $\gamma_{\nu n}$ в случае жесткого защемления имеют вид

$$\gamma_{11} = \frac{\overline{p}_1 q_2 - \overline{q}_1 p_2}{p_2 q_1 - p_1 q_2}, \qquad \gamma_{12} = \frac{\overline{p}_2 q_2 - p_2 \overline{q}_2}{p_2 q_1 - p_1 q_2}$$

$$\gamma_{21} = \frac{p_1 \overline{q}_1 - \overline{p}_1 q_1}{p_2 q_1 - p_1 q_2}, \qquad \gamma_{22} = \frac{p_1 \overline{q}_2 - \overline{p}_2 q_1}{p_2 q_1 - p_1 q_2}$$

а в случае свободного края определяются формулами

$$\gamma_{11} = \frac{\mu_2 - \overline{\mu}_1}{\mu_1 - \mu_2}, \quad \gamma_{12} = \frac{\mu_2 - \overline{\mu}_2}{\mu_1 - \mu_2}, \quad \gamma_{21} = \frac{\overline{\mu}_1 - \mu_1}{\mu_1 - \mu_2}, \quad \gamma_{22} = \frac{\overline{\mu}_2 - \mu_1}{\mu_1 - \mu_2}$$

Постоянные A_ν $(\nu = 1, 2)$ выражаются через P и ω при помощи системы четырех линейных алгебраических уравнений (два условия однозначности смещений и два статических условия).

Функции $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$, определяющие напряжения в полуплоскости с разрезом, представим, используя (1. 4), в виде

$$\Phi_1(z_1) = \Phi_{10}(z_1) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{p(t)}{t_1 - z_1}\, dt_1 -$$

$$- \frac{\gamma_{11}}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\overline{p(t)}\, d\overline{t_1}}{\overline{t_1} - z_1} - \frac{\gamma_{12}}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\overline{q(t)}\, d\overline{t_2}}{\overline{t_2} - z_1}$$

$$\Phi_2(z_2) = \Phi_{20}(z_2) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{q(t)}{t_2 - z_2}\, dt_2 -$$

$$- \frac{\gamma_{21}}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\overline{p(t)}\, d\overline{t_1}}{\overline{t_1} - z_2} - \frac{\gamma_{22}}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\overline{q(t)}\, d\overline{t_2}}{\overline{t_2} - z_2}$$

$$\operatorname{Im} z_\nu > 0, \quad t_\nu = \operatorname{Re} t + \mu_\nu \operatorname{Im} t, \quad t \in L, \quad \nu = 1{,}2 \tag{1.5}$$

Функции $\Phi_1(z_1) - \Phi_{10}(z_1)$, $\Phi_2(z_2) - \Phi_{20}(z_2)$, определяемые равенствами (1.5), автоматически обеспечивают выполнение условий $u = v = 0$ на границе полуплоскости в случае жесткого защемления и $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ в случае свободного края.

2. *Основная система уравнений.* Краевым условиям на берегах разреза (1.1), (1.2), учитывая соотношения (1.3), можно придать вид

$$a(\psi)\Phi_1^{\mp}(t_1) + b(\psi)\overline{\Phi_1^{\mp}(t_1)} + \Phi_2^{\mp}(t_2) = 0, \quad t \in l_1$$

$$\operatorname{Re}\{\Phi_1^{\pm}(t_1)[(1-\mu_1^2)\sin 2\psi - 2\mu_1 \cos 2\psi] +$$

$$+ \Phi_2^{\pm}(t_2)[(1-\mu_2^2)\sin 2\psi - 2\mu_2 \cos 2\psi]\} = 0$$

$$\operatorname{Re}\{(s_1 \cos\psi + q_1 \sin\psi)[\varphi_1^{+}(t_1) - \varphi_1^{-}(t_1)] +$$

$$+ (s_2 \cos\psi + q_2 \sin\psi)[\varphi_2^{+}(t_2) - \varphi_2^{-}(t_2)]\} = 0$$

$$a(\psi)[\Phi_1^{+}(t_1) - \Phi_1^{-}(t_1)] + b(\psi)\overline{[\Phi_1^{+}(t_1)} - \overline{\Phi_1^{-}(t_1)]} +$$

$$+ [\Phi_2^{+}(t_2) - \Phi_2^{-}(t_2)] = 0, t \in l_2$$

$$a(\psi) = a_0\frac{a_1(\psi)}{a_2(\psi)}, \quad b(\psi) = b_0\frac{\overline{a_1(\psi)}}{a_2(\psi)}$$

$$a_1(\psi) = \mu_1 \cos\psi - \sin\psi, \quad a_2(\psi) = \mu_2 \cos\psi - \sin\psi$$

$$a_0 = \frac{\mu_1 - \overline{\mu_2}}{\mu_2 - \overline{\mu_2}}, \quad b_0 = \frac{\overline{\mu_1} - \overline{\mu_2}}{\mu_2 - \overline{\mu_2}} \tag{2.1}$$

Верхний знак относится к левому, нижний — к правому берегам разреза. Заметив, что разность первого и второго предельных равенств (2.1) представляет собой пятое равенство, получим, после подстановки предельных значений функций (1.5), связь между искомыми функциями $p(t)$ и $q(t)$, именно

$$q(t) = -a(\psi)p(t) - b(\psi)\overline{p(t)},\ t \in l_1 \cup l_2 = L \tag{2.2}$$

Получим теперь представления комплексных потенциалов $\Phi_{\nu 0}(z_\nu)$ ($\nu = 1, 2$), определяющих напряжения в анизотропной полуплоскости, находящейся под действием усилий, распределенных вдоль отрезков L_1 и L_2.

Обозначив концы отрезков L_1 и L_2 через z_1, z_2 и z_3, z_4 соответственно, положим

$$z_{ki} = \operatorname{Re} z_i + \mu_k \operatorname{Im} z_i, \quad k = 1,2 \quad i = \overline{1,4}$$

Тогда уравнения отрезков L_i можно записать в виде

$$t_{ki}(\beta) = 0.5\,[(z_{k,2i} - z_{k,2i-1})\beta + (z_{k,2i} + z_{k,2i-1})]$$

$$k = 1,2, \quad i = 1,2, \quad -1 \leqslant \beta \leqslant 1$$

Пусть вдоль L_1 действует распределенная нагрузка $p_1(\beta)$, определяемая формулой

$$p_1(\beta) = \frac{\beta_0 - \beta}{1 + \beta_0}, \quad \beta_0 = \text{const}, \quad -1 < \beta_0 < 1$$

Предположим, что вдоль L_2 действует распределенная нагрузка $p_2(\beta) = -p_1(\beta)$. Для нахождения $\Phi_{\nu 0}(z_\nu)$, $\nu = 1,2$ проинтегрируем выражения

$$\sum_{i=1}^{2}(-1)^{i+1} p_k(\beta)\left\{\frac{A_k}{z_k - t_{ki}(\beta)} + \sum_{n=1}^{2}\gamma_{kn}\frac{\overline{A}_n}{z_k - \overline{t_{ni}(\beta)}}\right\}, \quad k = 1, 2 \tag{2.3}$$

по β в пределах от -1 до $+1$. Получим

$$\Phi_{k0}(z_k) = \frac{s_0}{2(1+\beta_0)}\sum_{i=1}^{2}(-1)^{i+1}\left\{\frac{A_k}{M_k^2}[z_k - t_{ki}(\beta_0)]\ln\frac{z_k - t_{ki}(1)}{z_k - t_{ki}(-1)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{2}\frac{\gamma_{kn}\overline{A}_n}{\overline{M}_n^2}[z_k - \overline{t_{ni}(\beta_0)}]\ln\frac{z_k - \overline{t_{ni}(1)}}{z_k - \overline{t_{ni}(-1)}}\right\}, \quad k = 1, 2 \tag{2.4}$$

Здесь A_k ($k = 1, 2$) определяются из системы четырех линейных алгебраических уравнений [10], s_0 — длина отрезка L_1, M_k определяются формулами

$$M_k = 0.5\,(z_{k2} - z_{k1}) = 0.5\,(z_{k3} - z_{k4}),\ k = 1, 2$$

Таким образом, предельные значения функций (1.5) имеют вид

$$\Phi_1^{\pm}(t_{10}) = \Phi_{10}(t_{10}) \pm \frac{1}{2}p(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{p(t)\,dt_1}{t_1 - t_{10}} -$$

$$-\frac{\gamma_{11}}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{p(t)}\,\overline{dt_1}}{\overline{t_1} - t_{10}} - \frac{\gamma_{12}}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{q(t)}\,\overline{dt_2}}{\overline{t_2} - t_{20}}$$

$$\Phi_2^{\pm}(t_{2}) = \Phi_{20}(t_{20}) \pm \frac{1}{2} q(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{q(t)\,dt_2}{t_2 - t_{20}} -$$

$$- \frac{\gamma_{21}}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{p(t)\,dt_1}}{\overline{t_1 - t_{10}}} - \frac{\gamma_{22}}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{q(t) dt_2}}{\overline{t_2 - t_{20}}} \tag{2.5}$$

где $\Phi_{\nu 0}(t_{\nu 0})$ $(\nu = 1,2)$ определяются формулами (2.4).

Используя равенства (2.2) и (2.5), приведем краевые условия (2.1) к системе сингулярных интегральных уравнений

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{\overline{b_{12}(\psi_0)\;b(\psi_0)}}{\pi i}\int_L \frac{p(t)}{\overline{t_2} - \overline{t_{20}}}\,d\overline{t_2} + \int_L G_1(t, t_0)\, p(t)\, dt_1\right\} = N_1(t_0)$$

$$t_0 \in L$$

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{\overline{b_{22}(\psi_0)\;b(\psi_0)}}{\pi i}\int_L \frac{p(t)}{\overline{t_2} - \overline{t_{20}}}\,d\overline{t_2} + \int_L G_2(t, t_0)\, p(t)\, dt_1\right\} = N_2(t_0)$$

$$t_0 \in l_1$$

$$\mathrm{Re}\left\{ \alpha(t_0)\, p(t_0) + \int_L G_3(t, t_0)\, p(t)\, dt_1 \right\} = 0,\; t_0 \in l_2 \tag{2.6}$$

Здесь

$$b_{1\nu}(\psi_0) = -2(\mu_\nu \cos\psi_0 - \sin\psi_0)(\mu_\nu \sin\psi_0 + \cos\psi_0)$$

$$b_{2\nu}(\psi_0) = (\mu_\nu \cos\psi_0 - \sin\psi_0)^2; \quad \nu = 1, 2$$

$$\alpha(\psi_0) = (\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 - \overline{\mu_2})(\cos\psi_0 + \overline{\mu_1}\sin\psi_0)(\mu_1 \cos\psi_0 - \sin\psi_0)$$

$$2\pi i\, G_k(t, t_0) = \frac{b_{k1}(\psi_0)}{t_1 - t_{10}} - \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2 - \overline{\mu_2}}\,\frac{b_{k2}(\psi_0)}{t_2 - t_{20}} +$$

$$+ \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2 - \overline{\mu_2}}\,\frac{\overline{b_{k2}(\psi_0)}}{\overline{t_2} - \overline{t_{20}}} - \overline{b_{k2}(\psi_0)}\;\frac{\overline{b(\psi)} - \overline{b(\psi_0)}}{\overline{t_2} - \overline{t_{20}}}\;\frac{\overline{\mu_2}\cos\psi - \sin\psi}{\mu_1 \cos\psi - \sin\psi} +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{2} \overline{b_{k\nu}(\psi_0)} \sum_{n=1}^{2} (-1)^n \frac{\gamma_{\nu n}}{\overline{t_n} - \overline{t_{n0}}} + 2\mathrm{Re}\left| b_{k\nu}(\psi_0)\gamma_{\nu 2}\, \frac{\overline{\mu_1} - \overline{\mu_2}}{\mu_2 - \overline{\mu_2}}\, \frac{1}{t_2 - t_{20}} \right|$$

$$G_3(t, t_0) = \begin{cases} (\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 - \overline{\mu_2})(\cos\psi_0 + \overline{\mu_1}\sin\psi_0)\, \left.\dfrac{d\psi}{ds}\right|_{s = s_0}, & t \in [a, t_0] \\ 0 & t \in (t_0, b] \end{cases}$$

$$N_k(t_0) = -\mathrm{Re}\left\{\sum_{\nu=1}^{2} b_{k\nu}(\psi_0)\, \Phi_{\nu 0}(t_{\nu 0})\right\}, \quad k = 1, 2$$

Теорема. Если L — простая разомкнутая дуга Ляпунова, кривизна которой удовлетворяет условию Гельдера, а функции $b(\psi)$ $b_{12}(\psi)$, $b_{22}(\psi)$,

$\alpha(\psi)$ дважды непрерывно дифференцируемы на L, то система сингулярных интегральных уравнений (2.6) разрешима при любой правой части, удовлетворяющей на L условию Гельдера всюду, кроме конечного числа точек; причем решение определяется с точностью до одной вещественной постоянной.

Доказательство. Воспользуемся методами, изложенными в [11]. Приведем систему (2.6) к виду

$$A(t_0)\varphi(t_0)+\frac{B(t_0)}{\pi i}\int\limits_L\frac{\varphi(t)}{t-t_0}\,dt+\frac{1}{\pi i}\int\limits_L\Omega(t,t_0)\varphi(t)\,dt=N(t_0)$$

Здесь

$$A(t_0)=\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\quad t_0\in l_1;\ \begin{pmatrix}0&0\\ \alpha&\bar{\alpha}\end{pmatrix},\ t_0\in l_2\right\}$$

$$B(t_0)=\left\{\begin{pmatrix}\bar{\beta}&-\beta\\ \bar{\beta}_1&-\beta_1\end{pmatrix},\quad t_0\in l_1;\ \begin{pmatrix}\bar{\beta}&-\beta\\0&0\end{pmatrix},\quad t_0\in l_2\right\}$$

$$N(t_0)=\{N_1(t_0),\quad t_0\in l_1;\quad N_2(t_0),\quad t_0\in l_2\}$$

$$\varphi(t)=(\varphi_1,\varphi_2),\quad \varphi_1=p(t),\quad \varphi_2=\overline{p(t)}$$

$$\beta=\overline{b_{12}(\psi_0)}\ \overline{b(\psi_0)},\ \beta_1=\overline{b_{22}(\psi_0)}\ \overline{b(\psi_0)},\quad \alpha=\alpha(\psi_0)$$

Обозначив $S=A+B$, $D=A-B$ и проверив, что $\det S\neq 0$, $\det D\neq 0$ всюду на L, устанавливаем, что рассматриваемая система относится к нормальному типу. Поэтому (2.6) можно свести к неоднородной задаче сопряжения Гильберта

$$\Phi^+(t_0)=g(t_0)\,\Phi^-(t_0)+b(t_0)\tag{2.7}$$

где

$$g(t_0)=S^{-1}(t_0)D(t_0),\ b(t_0)=S^{-1}(t_0)N(t_0)$$

Обозначим $c_1=a$, $c_2=c$, $c_3=b$ (a и b — концы разреза L, c — точка перехода участка раскрытия l_1 в участок контакта l_2). Будем искать решения (2.7) в классе $h(c_2)$, то есть органиченные в c_2 и неограниченные в точках c_1 и c_3. Для выяснения вопроса о разрешимости (2.7) в классе $h(c_2)$ найдем частные и суммарный индексы этой задачи. Суммарный индекс вычислим по формуле [11]

$$\varkappa=\frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{\det g}{\det\overset{1}{x}_0\det\overset{2}{x}_0\det\overset{3}{x}_0}\right]_L$$

где $\det\overset{i}{x}_0=(z-z_0)^{\rho_{i1}}(z-z_0)^{\rho_{i2}}$; ρ_{ik} — характеристические числа матриц $g^{-1}(c_i+0)\,g(c_i-0)$; $i=\overline{1,3}$, $k=1,2$. Получим $\varkappa=1$. С другой стороны, $\varkappa=\varkappa_1+\varkappa_2$. Определим $-\varkappa_1$ — наинизший порядок исчезающих на бесконечности решений однородной задачи сопряжения, соответствующей (2.7). Произведем конформное отображение плоскости с разрезом L на плоскость с разрезом l вдоль некоторого отрезка вещественной оси. При этом l_1 и l_2 перейдут в отрезки l_1', l_2' соответственно ($l_1' \cup l_2' = l$). Введем в рассмотрение функцию $\Psi(z)$, положив $\Psi(z) = \overline{\Phi(\bar{z})}$. Как показано в [9], на l будут справедливы равенства $\Psi^-(t) = \overline{\Phi^+(t)}$, $\Psi^+(t) = \overline{\Phi^-(t)}$, использовав которые придем к следующей граничной задаче:

$$\gamma\Phi^+ + \Psi^+ = -(\gamma\Phi^- + \Psi^-)$$

$$\delta\Phi^+ + \Psi^+ = -(\delta\Phi^- + \Psi^-), \ t \in l_1'$$

$$\gamma\Phi^+ + \Psi^+ = \gamma\Phi^- + \Psi^-$$

$$\delta\Phi^+ + \Psi^+ = -(\delta\Phi^- + \Psi^-), \ t \in l_2' \tag{2.8}$$

Здесь γ, δ — непрерывные на l и ограниченные на бесконечности функции. Положим теперь $\Omega^\pm = \gamma\Phi^\pm + \Psi^\pm$, $\Xi^\pm = \delta\Phi^\pm + \Psi^\pm$. Тогда условия (2.8) запишутся в виде:

$$\Omega^+ = -\Omega^-, \ t \in l_1'; \ \Omega^+ = \Omega^-, \ t \in l_2'; \ \Xi^+ = -\Xi^-, \ t \in l \tag{2.9}$$

Однако (2.9) нельзя решать как задачу сопряжения, ибо $\Omega(z)$, $\Xi(z)$ могут иметь особенности в конечной части плоскости. Выразив Ψ^+ через $\Omega^\pm, \Xi^\pm$ и подставив в (2.8), придем к двум неоднородным краевым задачам для функции $\Phi(z)$ с неизвестными разрывными правыми частями:

$$\Phi^+ = -\Phi^-, \ t \in l_1'; \ \Phi^+ = -\Phi^- - \frac{2\Omega^-}{\delta - \gamma}, \ t \in l_2' \tag{2.10}$$

$$\Phi^+ = -\Phi^-; \ t \in l_1'; \ \Phi^+ = \Phi^- - \frac{2\Xi^-}{\delta - \gamma}, \ t \in l_2' \tag{2.11}$$

Решения (2.10) и (2.11) отыскиваются в классе $h(c_2)$. Для задачи (2.10) точка c_2 является особенной, поэтому решение в ней необходимо ограничено. Индексы задач (2.10) и (2.11) равны 1 и 0 соответственно.

Исчезающее на бесконечности решение (2.10) в рассматриваемом классе дается формулой [9]

$$\Phi(z) = \frac{X_0(z)}{2\pi i}\int\limits_{l_2'} \frac{2\Omega^- dt}{X_0^+(t)(\gamma - \delta)(t - z)} + CX_0(z) \tag{2.12}$$

а для задачи (2.11) таким решением будет

$$\Phi(z) = \frac{X_c(z)}{2\pi i}\int\limits_{l_2'} \frac{2\Xi^- dt}{X_c^+(t)(\gamma - \delta)(t - z)} \tag{2.13}$$

Здесь $X_0(z)$, $X_c(z)$ — канонические решения однородных задач, соответствующих (2.10) и (2.11), имеющие на бесконечности порядки —1 и 0 соответственно. Вычисляя интегралы типа Коши, фигурирующие в (2.12), (2.13) и приравнивая полученные правые части, придем к равенству

$$0=\frac{2[\Omega(z)-\Xi(z)]}{\gamma(z)-\delta(z)}+CX_0(z)-X_0(z)\sum_{i=1}^{n}G_i(z)+X_c(z)\sum_{i=1}^{m}F_i(z)$$

где $G_i(z)$, $F_i(z)$ — главные части подынтегральных функций в (2.12), (2.13) в их полюсах. Отсюда

$$\Phi(z)=C_1X_0(z)+\frac{1}{2}\left[X_0(z)\sum_{i=1}^{n}G_i(z)-X_c(z)\sum_{i=1}^{m}F_i(z)\right]$$

Из полученного представления следует, что порядок на бесконечности решения $\Phi(z)$ равен -1, т. е. $\varkappa_1=1$. Поскольку $\varkappa=\varkappa_1+\varkappa_2$, а $\varkappa=1$, то $\varkappa_2=0$. В [11] доказано, что если все частные индексы класса h неотрицательны, то условие разрешимости соблюдено при произвольной правой части, почти всюду удовлетворяющей условию Гельдера, и решение соответствующей системы сингулярных уравнений содержит $\varkappa$ произвольных постоянных. В рассматриваемом случае $\varkappa=1$, поэтому решение системы (2.6) определяется с точностью до одной (вещественной) постоянной. Для нахождения этой постоянной воспользуемся условием однозначности касательных смещений

$$\operatorname{Re}\left\{(\mu_1-\mu_2)(\bar{\mu}_2-\mu_1)(\bar{\mu}_1\cos\psi(b)-\sin\psi(b))\int_a^b p(t)\,dt_1\right\}=0 \qquad (2.14)$$

Таким образом, система уравнений (2.6) допускает единственное решение в классе $h(c_2)$ при дополнительном условии (2.14), при этом нормальные и касательные напряжения будут ограничены в точке c и неограничены в точках a и b.

3. *Решение контактной задачи.* Предлагается следующий путь решения поставленной задачи. Вначале решается задача о равновесии свободной (защемленной) анизотропной полуплоскости, ослабленной криволинейным разрезом, берега которого не контактируют [12]. Если на L найдется зона $l_2^{(1)}$, в которой происходит «налегание» одного берега разреза на другой, что соответствует выполнению условия $u_n^+ + u_n^- > 0$, то $l_2^{(1)}$ принимается в качестве первого приближения для участка контакта l_2. Затем решается контактная задача при заданном $l_2^{(1)}$, что соответствует решению системы уравнений (2.6), (2.14). При этом вычисляется контактное давление N_t^- и находится точка на L, в которой N^+ обращается в нуль. Эта точка может не совпасть с концом участка, выбранного в качестве предыдущего приближения для зоны контакта. Используем ее для построения следующего приближения. Таким образом, приходим к итерационному процессу, который заканчивается при достижении нужной точности. Вычисления показали, что для достижения точности $\varepsilon=10^{-3}$ обычно требуется 3—4 итерации.

Для решения системы (2.6), (2.14) использован метод Мультоппа [13], позволяющий свести ее к системе линейных алгебраических уравнений. Метод реализован в программе на языке ФОРТРАН для ЭВМ «БЭСМ-6».

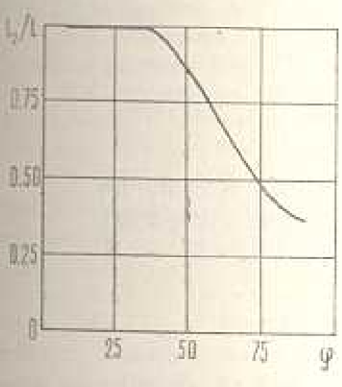
В качестве примера рассмотрена пластина из стеклопластика АГ–4С ($E_1=2.1\cdot 10^5$ *кг/см*^{2}, $E_2=1.6\cdot 10^5$ *кг/см*^{2}, $G=0.42\cdot 10^5$ *кг/см*^{2}, $\nu_1=0.09$, $\mu_1=2.128\,i$, $\mu_2=0.539\,i$), ослабленная разрезом в виде дуги эллипса L:

$$x=R_1\sin\frac{\beta+1}{2}\varphi,\quad y=R_2\cos\frac{\beta+1}{2}\varphi,\quad -1<\beta<1$$

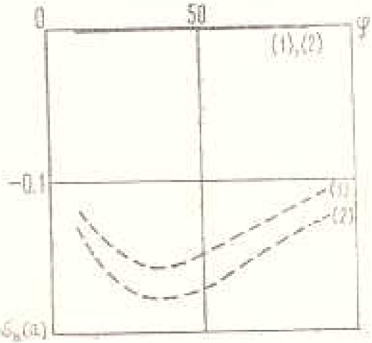
в условиях свободного края.

Контур разреза делится на 20 частей. Дальнейшее увеличение числа узлов не привело к существенному изменению результатов.

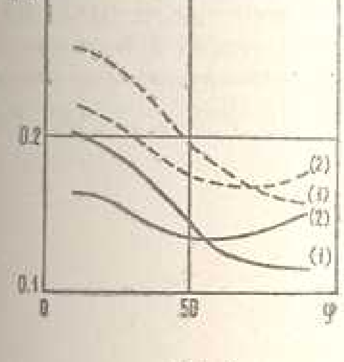
Результаты расчетов приведены на фиг. 2—6. На фиг. 2 представлено изменение ширины зоны контакта берегов трещины. На фиг. 3, 4 изображены графики коэффициентов интенсивности нормальных σ_N и касательных τ_N напряжений, вычисленных в вершине a. Графики тех же величин, относящихся к вершине b, даны на фиг. 5, 6. Здесь величины, вычисленные без учета контакта берегов, изображены пунктирными линиями. Сплошными линиями даны те же величины, найденные с учетом частичного смыкания берегов. Кривые (1) на всех графиках отвечают отношению $R_1/R_2=1$, кривые (2) — отношению $R_1/R_2=0.5$.



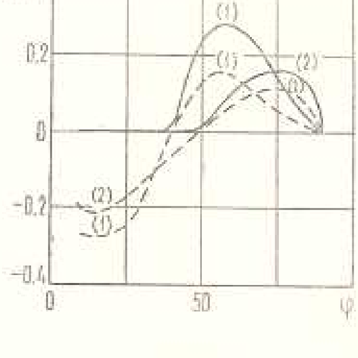
Фиг. 2.



Фиг. 3

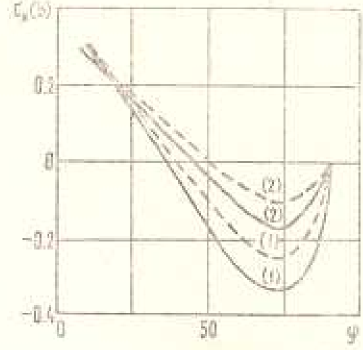


Фиг. 4.



Фиг. 5.

Как видим, при малых углах охвата φ, берега трещины контактируют по всей длине. При этом коэффициенты интенсивности касательных напряжений отличны от нуля. Учет контакта берегов приводит к значительному уменьшению коэффициентов интенсивности в зоне сжатия. С ростом φ увеличивается зона раскрытия и соответственно уменьшается зона контакта (фиг. 2). Оказывается, что учет контакта берегов приводит к увеличению (в некоторых случаях почти вдвое) коэффициентов интенсивности как нормальных, так и касательных напряжений. При подходе к границе полуплоскости ($\varphi \to \pi/2$) наблюдается стремление коэффициентов интенсивности напряжений к нулю (фиг. 5, 6), что объясняется выходом трещины на свободную поверхность.



Фиг. 6.

Таким образом, учет контакта берегов важен при прогнозировании развития трещины, так как при определенных нагрузках приводит к заметному изменению коэффициентов интенсивности напряжений.

Институт проблем
машиностроения АН УССР

Поступила 21 I 1980

Բ. Յա. ԿԱՆՏՈՐ, Ե. Ա. ՍՏՐԵԼՆԻԿՈՎԱ, Լ. Ա. ՖԻԼՇՏԻՆՍԿԻ

ԿՈՐԱԳԻԾ ԿՏՐՎԱԾՔՈՎ ԹՈՒԼԱՑՎԱԾ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱՐ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐ

Ամփոփում

Դիտարկվում է կորագիծ կտրվածքով թուլացված անիզոտրոպ կիսահարթության համար առաձգականության տեսության հարթ խնդիրը ազատ եզրի կամ կոշտ ամրացման պայմաններում: Կոլոսով-Մուսխելիշվիլու կոմպլեքս պոտենցիալների ինտեգրալ ներկայացումների օգտագործմամբ դիտարկված խնդիրը բերվել է սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների սիստեմի, որի լուծմամբ որոշվում է ճեղքի գագաթի շրջակայքում լարված-դեֆորմացված վիճակը: Տրվում է լարումների ինտենսիվության գործակիցների վրա կտրվածքի ափերի մասնակիորեն միացման հաշվառման ազդեցության թվային վերլուծությունը:

A CONTACT PROBLEM IN THE ELASTICITY THEORY FOR ANISOTROPIC SEMI-PLATE WEAKENED BY A CURVILINEAR CRACK

B. Ya. KANTOR, E. A. STRELNICOVA, L. A. FILSHTINSKY

S u m m a r y

The plane problem of elasticity is studied for a semi-infinite free or clamped plate weakened by a curvilinear crack. Using an integral representation for complex potential of stress the above mentioned problem is reduced to a system of singular integral equations. The stressed-strained state is determined near the vertices of the crack by solving this system. The numerical analysis of an influence of the "overlapping" on the stress intensity factors is presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Koiter W. T.* On the flexural rigidity of a beam, weakened by transverse saw cuts. Proc. Konink1. nederl. acad. wet., 1956, B. 59, 4, p. 354—374.
2. *Тоноян В. С., Мелкумян С. А.* Контактная задача для полуплоскости с вертикальным разрезом. Докл. АН Арм. ССР, 1970, 51, 3, с. 144—149.
3. *Тоноян В. С., Мелкумян С. А.* Об одной задаче для полуплоскости с вертикальным конечным разрезом. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1972, 25, 3, с. 3—17.
4. *Тоноян В. С., Мелкумян С. А.* О симметричном вдавливании двух жестких одинаковых штампов в упругую полуплоскость с вертикальным полубесконечным разрезом. Докл. АН Арм. ССР, 1973, 57, 5, с. 282—288.
5. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев, «Наукова думка», 1976, 444 с.
6. *Joakimidis N. I., Theocaris P. S.* A system of curvelinear cracks in an isotropic elastic half-plate. Int. J. Fract, 1979, 15, No. 4, p. 299—309.
7. *Луцишин Р. М.* О напряженном состоянии полуплоскости с налегающими трещинами. 1980, 13 с. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 12 февраля 1980, № 539-80 Деп.).
8. *Hasebe N.*, Inohara S. Stress analysis of a semi-infinite plate with an oblique edge crack. Ing.-Arch., 1980, 49, No. 1, p. 51—62.
9. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., «Наука», 1968, 708 с.
10. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. М., Гостехиздат, 1957, 464 с.
11. *Векуа Н. П.* Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. М., «Наука», 1970, 379 с.
12. *Фильштинский Л. А.* Упругое равновесие плоской анизотропной среды, ослабленной произвольными криволинейными трещинами. Предельный переход к изотропной среде. Изв. АН СССР, МТТ, 1976, № 5, с. 91—97.
13. *Каландия А. И.* Математические методы двумерной теории упругости. М., «Наука», 1973, 304 с.