

Ա. Ա. БАБЛОЯՆ, Ն. Օ. ԳՄԿԱՆՅԱՆ

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СОЕДИНЕНИЯ ИЗ ТРЕХ ПОЛУПОЛОС ИЗ РАЗЛИЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ*

1. Рассмотрим плоскую контактную задачу для Y-образной области, составленной из двух материалов (I и II) при наличии одной оси симметрии MN (фиг. 1). Предполагается, что между составляющими материалами имеет место полное сцепление, а на границах заданы внешние нагрузки.

В силу наличия симметрии достаточно рассмотреть только заштрихованную часть области. Обозначим упругие постоянные в области I через ν_1, E_1 , а в области II — через ν_2, E_2 .

Введем в рассмотрение две полярные системы координат r_n, φ_n ($n = 1, 2$) с полюсами соответственно в точках O_1 и O_2 [1, 2].

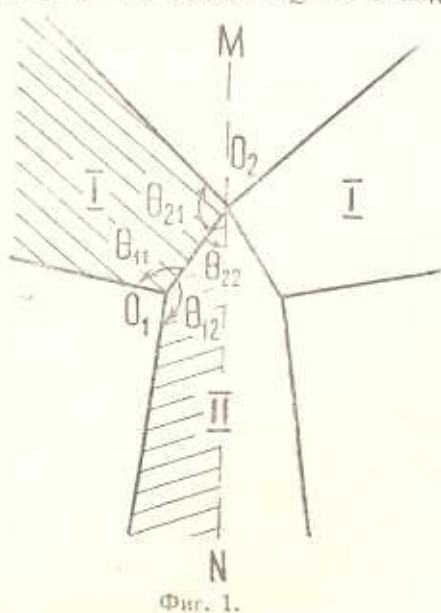
Как известно, плоская задача сводится к определению бигармонической функции Эйри, которая для рассматриваемой задачи ищется в виде суммы двух «местных» решений, то есть

$$F = \sum_{n=1}^2 F_n(r_n, \varphi_n) \quad (1.1)$$

При этом напряжения и перемещения в соответствующих координатах выразятся через функцию напряжений Эйри по следующим формулам:

$$\sigma_r^{(n)}(r_n, \varphi_n) = \frac{1}{r_n} \frac{\partial F}{\partial r_n} + \frac{1}{r_n^2} \frac{\partial F}{\partial \varphi_n^2}$$

$$\sigma_\varphi^{(n)}(r_n, \varphi_n) = \frac{\partial^2 F}{\partial r_n^2} \quad (1.2)$$



$$\tau_{r\varphi}^{(n)}(r_n, \varphi_n) = - \frac{\partial}{\partial r_n} \left(\frac{1}{r_n} \frac{\partial F}{\partial \varphi_n} \right)$$

$$\varepsilon_{rr}^{(n)} = \frac{\partial u_r^{(n)}}{\partial r_n} = \frac{1}{E_k} (\sigma_r^{(n)} - \nu_k \sigma_\varphi^{(n)})$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(n)} = \frac{\partial v_\varphi^{(n)}}{r_n \partial \varphi_n} + \frac{u_r^{(n)}}{r_n} = \frac{1}{E_k} (\sigma_\varphi^{(n)} - \nu_k \sigma_r^{(n)}) \quad (1.3)$$

* Работа доложена на Всесоюзной конференции по теории упругости в г. Ереване в 1979 г.

$$\varepsilon_{r\tau}^{(n)} = \frac{\partial v_z^{(n)}}{\partial r_n} - \frac{v_z^{(n)}}{r_n} + \frac{1}{r_n} \frac{\partial u_r^{(n)}}{\partial \bar{\varphi}_n} = \frac{2(1+\nu_k)}{E_k} \tau_{r\tau}^{(n)}(r_n, \bar{\varphi}_n)$$

Здесь
$$\bar{\varphi}_n = \begin{cases} \varphi_1 & \text{при } n = 1 \\ \varphi_2 - \pi & \text{при } n = 2 \end{cases}$$

а « k » принимает значение «1» для верхнего материала (область I) и значение «2» для нижнего материала (область II).

На оси симметрии должны быть выполнены условия

$$\begin{aligned} \tau_{r_1 r_1}^{(2)}(r_2, \theta_{22}) = 0 & \quad \left(\text{или } \frac{\partial v_z^{(2)}(r_2, \theta_{22})}{\partial r_2} = 0 \right) \\ v_z(r_2, \theta_{22}) = 0 & \end{aligned} \quad (1.4)$$

На границе рассматриваемой области заданы условия:

$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{\varphi}_n}^{(1)}(r_n, \theta_{n1}) = f_{n1}(r_n), \quad \tau_{r_n \bar{\varphi}_n}^{(1)}(r_n, \theta_{n1}) = g_{n1}(r_n) \\ \sigma_{\bar{\varphi}}^{(2)}(r_1, \theta_{12}) = f_{12}(r_1), \quad \tau_{r_1 \bar{\varphi}}^{(2)}(r_1, \theta_{12}) = g_{12}(r_1) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Потребуем, чтобы каждая из функций $F_n(r_n, \bar{\varphi}_n)$ на линии $O_1 O_2$ удовлетворяла условиям полного сцепления двух материалов, то есть

$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{\varphi}_n}^{(1)}(r_n, 0) = \sigma_{\bar{\varphi}}^{(2)}(r_n, 0), \quad \tau_{r_n \bar{\varphi}_n}^{(1)}(r_n, 0) = \tau_{r_n \bar{\varphi}}^{(2)}(r_n, 0) \\ u_{r_n}^{(1)}(r_n, 0) = u_{r_n}^{(2)}(r_n, 0), \quad v_{\bar{\varphi}_n}^{(1)}(r_n, 0) = v_{\bar{\varphi}_n}^{(2)}(r_n, 0) \end{aligned} \quad (n = 1, 2) \quad (1.6)$$

Функции $F_n(r_n, \bar{\varphi}_n)$ ($n = 1, 2$) ищем в виде интеграла Меллина

$$F_n(r_n, \bar{\varphi}_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_n - i\infty}^{c_n + i\infty} \Phi_n(s, \bar{\varphi}_n) r_n^{1-s} ds \quad (n = 1, 2) \quad (1.7)$$

где

$$-1 + \varepsilon < c_n < 0, \quad 0 < \varepsilon < 1$$

При этом

$$\Phi_n(s, \bar{\varphi}_n) = \int_0^\infty F_n(r_n, \bar{\varphi}_n) r_n^{s-2} dr_n \quad (1.8)$$

Функции $\Phi_n(s, \bar{\varphi}_n)$ представим в виде

$$\Phi_n(s, \bar{\varphi}_n) = \begin{cases} \Phi_{n1}(s, \bar{\varphi}_n) & \text{в области I} \\ \Phi_{n2}(s, \bar{\varphi}_n) & \text{в области II} \end{cases} \quad (1.9)$$

Из (1.8) и (1.9) следует, что функции $\Phi_{nk}(s, \bar{\varphi}_n)$ должны удовлетворять уравнению

$$\varepsilon_{r\bar{r}}^{(n)} = \frac{\partial v_z^{(n)}}{\partial r_n} - \frac{v_z^{(n)}}{r_n} + \frac{1}{r_n} \frac{\partial u_r^{(n)}}{\partial \bar{\varphi}_n} = \frac{2(1+\nu_k)}{E_k} \tau_{r\bar{r}}^{(n)}(r_n, \bar{\varphi}_n)$$

Здесь

$$\bar{\varphi}_n = \begin{cases} \varphi_1 & \text{при } n = 1 \\ \varphi_2 - \pi & \text{при } n = 2 \end{cases}$$

а « k » принимает значение «1» для верхнего материала (область I) и значение «2» для нижнего материала (область II).

На оси симметрии должны быть выполнены условия

$$\begin{aligned} \tau_{r_1\bar{r}_1}^{(2)}(r_2, \theta_{22}) = 0 & \quad \left(\text{или } \frac{\partial v_z^{(2)}(r_2, \theta_{22})}{\partial r_2} = 0 \right) \\ v_z(r_2, \theta_{22}) = 0 & \end{aligned} \quad (1.4)$$

На границе рассматриваемой области заданы условия:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r_n\bar{r}_n}^{(1)}(r_n, \theta_{n1}) = f_{n1}(r_n), \quad \tau_{r_n\bar{r}_n}^{(1)}(r_n, \theta_{n1}) = g_{n1}(r_n) \\ \varepsilon_{\varphi}^{(2)}(r_1, \theta_{12}) = f_{12}(r_1), \quad \tau_{r_1\bar{r}_1}^{(2)}(r_1, \theta_{12}) = g_{12}(r_1) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Потребуем, чтобы каждая из функций $F_n(r_n, \bar{\varphi}_n)$ на линии O_1O_2 удовлетворяла условиям полного сцепления двух материалов, то есть

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\varphi_n}^{(1)}(r_n, 0) = \varepsilon_{\varphi}^{(2)}(r_n, 0), \quad \tau_{r_n\bar{r}_n}^{(1)}(r_n, 0) = \tau_{r_n\bar{r}_n}^{(2)}(r_n, 0) \\ u_{r_n}^{(1)}(r_n, 0) = u_{r_n}^{(2)}(r_n, 0), \quad v_{\varphi_n}^{(1)}(r_n, 0) = v_{\varphi_n}^{(2)}(r_n, 0) \quad (n = 1, 2) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Функции $F_n(r_n, \bar{\varphi}_n)$ ($n = 1, 2$) ищем в виде интеграла Меллина

$$F_n(r_n, \bar{\varphi}_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_n - i\infty}^{c_n + i\infty} \Phi_n(s, \bar{\varphi}_n) r_n^{1-s} ds \quad (n = 1, 2) \quad (1.7)$$

где

$$-1 + \varepsilon < c_n < 0, \quad 0 < \varepsilon < 1$$

При этом

$$\Phi_n(\bar{s}, \bar{\varphi}_n) = \int_0^{\infty} F_n(r_n, \bar{\varphi}_n) r_n^{\bar{s}-2} dr_n \quad (1.8)$$

Функции $\Phi_n(s, \bar{\varphi}_n)$ представим в виде

$$\Phi_n(s, \bar{\varphi}_n) = \begin{cases} \Phi_{n1}(s, \bar{\varphi}_n) & \text{в области I} \\ \Phi_{n2}(s, \bar{\varphi}_n) & \text{в области II} \end{cases} \quad (1.9)$$

Из (1.8) и (1.9) следует, что функции $\Phi_{nk}(s, \bar{\varphi}_n)$ должны удовлетворять уравнению

$$\Phi_{nk}^{(IV)} + 2(s^2 + 1)\Phi_{nk}' + (s^2 - 1)^2\Phi_{nk} = 0 \quad (1.10)$$

решение которого имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_{nk}(s, \bar{z}_n) = & A_{nk} \cos(s-1)\bar{z}_n + B_{nk} \sin(s-1)\bar{z}_n + \\ & + C_{nk} \cos(s+1)\bar{z}_n + D_{nk} \sin(s+1)\bar{z}_n \end{aligned} \quad (1.11)$$

Если принять, что между коэффициентами A_{nk} , B_{nk} , C_{nk} и D_{nk} существуют связи

$$A_{n1} + C_{n1} = A_{n2} + C_{n2} = (s-1)^{-1}(\delta_2 C_{n2} - \delta_1 C_{n1}) \quad (1.12)$$

$$(s-1)B_{n1} + (s+1)D_{n1} = (s-1)B_{n2} + (s+1)D_{n2} = \delta_1 D_{n1} - \delta_2 D_{n2}$$

где

$$\delta_k = \frac{4}{\delta E_k}, \quad \delta = \frac{1+\gamma_1}{E_1} - \frac{1+\gamma_2}{E_2} \quad (k=1, 2) \quad (1.13)$$

то условия контакта (1.6) будут удовлетворены тождественно.

Удовлетворяя граничным условиям (1.5), условиям симметрии (1.4) и введя новые неизвестные функции $X_{nk}(s)$, $Y_{nk}(s)$

$$s(s-1)\Phi_{1k}(s, \theta_{1k}) = \alpha^2 X_{1k}, \quad s\Phi_{0k}'(s, \theta_{0k}) = \alpha^2 Y_{0k}(s)$$

$$s(s-1)\Phi_{21}(s, \theta_{21}) = \alpha^2 X_{21}$$

$$\frac{1}{4(s+1)}[\Phi_{22}''(s, \theta_{22}) + (s-1)^2\Phi_{22}'(s, \theta_{22})] = \alpha^2 X_{22}(s) \quad (n, k=1, 2) \quad (1.14)$$

после ряда преобразований для их определения получим следующую систему интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} X_{nk}(s) + \int_{\tilde{L}_p} [X_{pk}(\xi) K_{pk}^{(1)}(\xi, s) + Y_{pk}(\xi) K_{pk}^{(2)}(\xi, s) + \\ + X_{pm}(\xi) K_{pk}^{(3)}(\xi, s) + Y_{pm}(\xi) K_{pk}^{(4)}(\xi, s)] d\xi = \tilde{f}_{nk}(s) \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} Y_{nk}(s) + \int_{\tilde{L}_p} [X_{pk}(\xi) K_{pk}^{(5)}(\xi, s) + Y_{pk}(\xi) K_{pk}^{(6)}(\xi, s) + \\ + X_{pm}(\xi) K_{pk}^{(7)}(\xi, s) + Y_{pm}(\xi) K_{pk}^{(8)}(\xi, s)] d\xi = \tilde{g}_{nk}(s) \end{aligned}$$

(n, k=1, 2) (n+p=k+m=3)

Здесь ядра интегральных уравнений имеют вид

$$K_{pk}^{(q)}(\xi, s) = \frac{B(s+1, \xi-s)}{2\pi i \Delta_p(\xi)} k_{pk}^{(q)}(\xi, s) \quad (q=1, 2, \dots, 8) \quad (1.16)$$

где $B(x, y)$ — эйлеров интеграл первого рода, а функции $k_{pk}^{(q)}(\xi, s)$ определяются формулами

$$\begin{aligned}
 k_{pk}^{(1)}(\xi, s) &= \alpha_{nk}^+ M_{pk}^- + (-1)^{n-k} \beta_{nk}^- N_{pk}^+ - (-1)^m \alpha_{pm}^- \cos(s-1) \beta_{nk} + \\
 &\quad + (-1)^n b_{pk}^+ \sin(s-1) \beta_{nk} \\
 k_{pk}^{(2)}(\xi, s) &= \alpha_{nk}^+ N_{pk}^- - (-1)^{n-k} \beta_{nk}^- M_{pk}^+ - (-1)^m b_{pk}^- \cos(s-1) \beta_{nk} - \\
 &\quad - (-1)^n \alpha_{pk}^+ \sin(s-1) \beta_{nk} \\
 k_{pk}^{(3)}(\xi, s) &= -\alpha_{nk}^+ Q_{pm}^- + (-1)^{n-k} \beta_{nk}^- P_{pm}^+ + (-1)^m \alpha_{pm}^- \cos(s-1) \beta_{nk} - \\
 &\quad - (-1)^n b_{pm}^+ \sin(s-1) \beta_{nk} \\
 k_{pk}^{(4)}(\xi, s) &= \alpha_{nk}^+ P_{pm}^- + (-1)^{n-k} \beta_{nk}^- Q_{pm}^+ + (-1)^m b_{pm}^- \cos(s-1) \beta_{nk} + \\
 &\quad + (-1)^n \alpha_{pm}^+ \sin(s-1) \beta_{nk} \tag{1.17} \\
 k_{pk}^{(5)}(\xi, s) &= (-1)^{n-k} \beta_{nk}^+ M_{pk}^- - \alpha_{nk}^- N_{pk}^+ + (-1)^n \alpha_{pk}^- \sin(s-1) \beta_{nk} + \\
 &\quad + (-1)^m b_{pk}^+ \cos(s-1) \beta_{nk} \\
 k_{pk}^{(6)}(\xi, s) &= (-1)^{n-k} \beta_{nk}^+ N_{pk}^- + \alpha_{nk}^- M_{pk}^+ + (-1)^n b_{pk}^- \sin(s-1) \beta_{nk} - \\
 &\quad - (-1)^m \alpha_{pk}^+ \cos(s-1) \beta_{nk} \\
 k_{pk}^{(7)}(\xi, s) &= -(-1)^{n-k} \beta_{nk}^+ Q_{pm}^- - \alpha_{nk}^- P_{pm}^+ - (-1)^n \alpha_{pm}^- \sin(s-1) \beta_{nk} - \\
 &\quad - (-1)^m b_{pm}^+ \cos(s-1) \beta_{nk} \\
 k_{pk}^{(8)}(\xi, s) &= (-1)^{n-k} \beta_{nk}^+ P_{pm}^- - \alpha_{nk}^- Q_{pm}^+ - (-1)^n b_{pm}^- \sin(s-1) \beta_{nk} + \\
 &\quad + (-1)^m \alpha_{pm}^+ \cos(s-1) \beta_{nk}
 \end{aligned}$$

В этих формулах « p » и « k » принимают значения 1 и 2, кроме сочетания $p = 1, k = 2, q = 1 \div 4$, для этих значений параметров имеем

$$\begin{aligned}
 k_{12}^{(1)}(\xi, s) &= -M_{12}^-(\xi) \sin(s+1) \beta_{22} - N_{12}^+(\xi) \cos(s+1) \beta_{22} \\
 k_{12}^{(2)}(\xi, s) &= -N_{12}^-(\xi) \sin(s+1) \beta_{22} + M_{12}^+(\xi) \cos(s+1) \beta_{22} \\
 k_{12}^{(3)}(\xi, s) &= Q_{11}^-(\xi) \sin(s+1) \beta_{22} - P_{11}^+(\xi) \cos(s+1) \beta_{22} \tag{1.17'} \\
 k_{12}^{(4)}(\xi, s) &= -P_{11}^-(\xi) \sin(s+1) \beta_{22} - Q_{11}^+(\xi) \cos(s+1) \beta_{22}
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 M_{1k}^+(\xi) &= \delta_1 \delta_2 \gamma_{1k}^+ + d_{1m} \alpha_{1k}^+ + (-1)^k \delta_k (d_{1m} - \delta_m^2) \cos(\xi-1) \theta_{1k} \\
 M_{21}^+(\xi) &= \delta_1 \delta_2 \rho_{21}^+ + \alpha_{21} [S^+(\xi, \theta_{22}) + \delta_2 \sin 2\xi \theta_{22}] - \delta_1 S^+(\xi, \theta_{22}) \times \\
 &\quad \times \cos(\xi-1) \theta_{21} \\
 M_{22}^+(\xi) &= d_{21} \sin(\xi+1) \theta_{22}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{22}^-(\xi) &= \delta_1 \delta_2 | - (\xi + 1) \cos(\xi - 1) \theta_{22} + \cos[\xi(\theta_{22} - 2\theta_{21}) - \theta_{22}] + \\
&+ \xi \cos[\xi \theta_{22} - \theta_{22} + 2\theta_{21}] + \alpha_{22}^- d_{21} + 4\Delta_{21} \delta_2 \cos(\xi - 1) \theta_{22} \\
N_{1k}^+(\xi) &= \delta_1 \delta_2 \delta_{1k} - d_{1m} \beta_{1k}^+ - (-1)^k \delta_k (d_{1m} - \delta_m^2) \sin(\xi - 1) \theta_{1k} \\
N_{21}^+(\xi) &= \delta_1 \delta_2 \mu_{21} - \beta_{21}^+ [S^+(\xi, \theta_{22}) + \delta_2 \sin 2\xi \theta_{22}] + \delta_1 S^+(\xi, \theta_{22}) \sin(\xi - 1) \theta_{21} \\
N_{22}^+(\xi) &= \delta_1 \delta_2 [S^+(\xi, \theta_{21}) \cos(\xi - 1) \theta_{22} - C_{21}^- \sin(\xi - 1) \theta_{22} - \\
&- d_{21} \beta_{22}^+ - 4\delta_2 \Delta_{21} \sin(\xi - 1) \theta_{22} \quad (1.18)
\end{aligned}$$

$$N_{22}^-(\xi) = -d_{21} \cos(\xi + 1) \theta_{22}$$

$$P_{1k}^+(\xi) = (-1)^k \delta_k [(-1)^m \delta_m \alpha_{1k}^+ - \tilde{\beta}_{1k}^+ C_{1m}^- + \tilde{\alpha}_{1k}^- S^+(\xi, \theta_{1m})]$$

$$P_{21}^+(\xi) = \delta_1 \{ (\delta_1 - 1) \mu_{21}^+ + (1 \pm \xi) \nu_{21}^+ \mp \xi \nu_{21}^+ \}$$

$$\begin{aligned}
P_{22}^-(\xi) &= \delta_2 \{ \xi \cos(\xi + 1) \theta_{22} + (1 - \delta_1) \cos(\xi + 1) \theta_{22} - \\
&- \cos[\xi(\theta_{22} + 2\theta_{21}) + \theta_{22}] - \xi \cos[\xi \theta_{22} + (\theta_{22} - 2\theta_{21})] \}
\end{aligned}$$

$$P_{22}^+(\xi) = \delta_2 \{ S^+(\xi, \theta_{21}) \tilde{\alpha}_{22}^- - C_{21}^- \tilde{\beta}_{22}^+ - \delta_1 \beta_{22}^+ \}$$

$$Q_{1k}^+(\xi) = (-1)^k \delta_k [(-1)^m \delta_m \alpha_{1k}^+ - \tilde{\alpha}_{1k}^- C_{1m}^- - S^+(\xi, \theta_{1m}) \tilde{\beta}_{1k}^+]$$

$$Q_{21}^+(\xi) = \delta_1 | (1 - \delta_1) \mu_{21}^+ + \nu_{21}^+ (\xi - 1) - \xi \nu_{21}^+ \}$$

$$\begin{aligned}
Q_{22}^+(\xi) &= -\delta_2 \{ (\xi - 1) \sin(\xi + 1) \theta_{22} + \sin[\xi(\theta_{22} + 2\theta_{21}) + \theta_{22}] - \\
&- \xi \sin[\xi \theta_{22} + \theta_{22} - 2\theta_{21}] + \delta_1 \sin(\xi + 1) \theta_{22} \}
\end{aligned}$$

$$Q_{22}^-(\xi) = -\delta_2 [\delta_1 \tilde{\alpha}_{22}^- + \tilde{\alpha}_{22}^- C_{21}^+ + S^-(\xi, \theta_{21}) \tilde{\beta}_{22}^+]$$

$$a_{\rho k}^+(\xi) = \delta_k M_{\rho k}^+ + \delta_m Q_{\rho k}^+$$

$$b_{\rho k}^+(\xi) = \delta_k N_{\rho k}^+ - \delta_m P_{\rho k}^+$$

При этом

$$a_{1k}^+(\xi) = 4\delta_k \Delta_{1m} \tilde{\alpha}_{1k}^+ + (-1)^m \delta_1 \delta_2 [S^+(\xi, \theta_{1m}) \tilde{\beta}_{1k}^+ - C_{1m}^+ \alpha_{1k}^+]$$

$$b_{1k}^+(\xi) = -4\delta_k \Delta_{1m} \tilde{\beta}_{1k}^+ + (-1)^m \delta_1 \delta_2 [S^+(\xi, \theta_{1m}) \alpha_{1k}^+ + C_{1m}^+ \beta_{1k}^+]$$

$$\begin{aligned}
a_{21}^+(\xi) &= \delta_1 | S^+(\xi, \theta_{22}) \tilde{\alpha}_{21}^+ - \delta_2 [(S^-(\xi, \theta_{22} - \theta_{21}) - \\
&- S^+(\xi, \theta_{22})) \cos(\xi - 1) \theta_{21} + S^+(\xi, \theta_{21}) \mu_{21}^+ + C_{21}^+ \rho_{21}^+] \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{21}^+(\xi) &= \delta_1 | - \tilde{\beta}_{21}^+ S^+(\xi, \theta_{22}) + \delta_2 [(S^+(\xi, \theta_{22} - \theta_{21}) - \\
&- S^+(\xi, \theta_{22})) \sin(\xi - 1) \theta_{21} + S^+(\xi, \theta_{21}) \rho_{21}^+ - C_{21}^+ \mu_{21}^+] \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{22}^{\pm}(\xi) &= \delta_2 \{-\delta_1 [C_{21} \sin(\xi + 1) \theta_{22} + S^+(\xi, \theta_{21}) \cos(\xi + 1) \theta_{22}] + \\
&\quad + 4(-\delta_1 \sin^2 \xi \theta_{21} + \Delta_{21}) \sin(\xi + 1) \theta_{22}\} \\
\bar{a}_{22}(\xi) &= \delta_2 \{\delta_1 [2\bar{\beta}_{22} C_{21} - \beta_{22}^{\pm} S^-(\xi, \theta_{21})] + 4\Delta_{21} \bar{a}_{22}\} \\
b_{22}^{\pm}(\xi) &= -\delta_2 \{\delta_1 [S^+(\xi, \theta_{21}) 2\bar{\beta}_{22} + \beta_{22}^{\pm} C_{21}^{\pm}] + 4\Delta_{21} \bar{\beta}_{22}^{\pm}\} \\
\bar{b}_{22}(\xi) &= \delta_2 \{\delta_1 [C_{21}^{\pm} \cos(\xi + 1) \theta_{22} - S^-(\xi, \theta_{21}) \sin(\xi + 1) \theta_{22}] + \\
&\quad + 4(\delta_1 \sin^2 \xi \theta_{21} - \Delta_{21}) \cos(\xi + 1) \theta_{22}\} \quad (1.18')
\end{aligned}$$

$$S^{\pm}(\xi, \theta) = \sin 2\xi\theta \pm \xi \sin 2\theta$$

$$C_{pk}^{\pm}(\xi, \theta_{pk}) = -2(\sin^2 \xi \theta_{pk} \pm \xi \sin^2 \theta_{pk})$$

$$d_{pk}(\xi, \theta_{pk}) = \delta_k^2 + 4(-1)^k \delta_k \sin^2 \xi \theta_{pk} + 4\Delta_{pk}$$

$$\Delta_{pk}(\xi, \theta_{pk}) = \sin^2 \xi \theta_{pk} - \xi^2 \sin^2 \theta_{pk}$$

$$\begin{aligned}
\bar{a}_{pk}^{\pm}(\xi, \theta_{pk}) &= \bar{a}_{pk}^{\pm}(\xi, \theta_{pk}) - (-1)^k \delta_k \cos(\xi - 1) \theta_{pk} = \\
&= 2(1 \mp \xi) \sin \xi \theta_{pk} \sin \theta_{pk}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\beta}_{pk}^{\pm}(\xi, \theta_{pk}) &= \bar{\beta}_{pk}^{\pm}(\xi, \theta_{pk}) - (-1)^k \delta_k \sin(\xi - 1) \theta_{pk} = \\
&= (1 \pm \xi) \sin(\xi + 1) \theta_{pk} + (1 \mp \xi) \sin(\xi - 1) \theta_{pk}
\end{aligned}$$

$$x_{21}^{\pm} = 0.5 \{\cos[2\xi\theta_{22} + (\xi + 1)\theta_{21}] \mp \cos[(\xi + 1)\theta_{21} - 2\theta_{22}]\}$$

$$y_{21}^{\pm} = 0.5 \{\cos[2\xi\theta_{22} + (\xi - 1)\theta_{21}] \mp \cos[(\xi - 1)\theta_{21} - 2\theta_{22}]\}$$

$$e_{21}^{\pm} = 0.5 \{\sin[(\xi + 1)\theta_{21} - 2\theta_{22}] \mp \sin[2\xi\theta_{22} + (\xi + 1)\theta_{21}]\}$$

$$v_{21}^{\pm} = 0.5 \{\sin[(\xi - 1)\theta_{21} - 2\theta_{22}] \mp \sin[(\xi - 1)\theta_{21} + 2\xi\theta_{22}]\}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{1k}^{\pm} &= 2 \sin[\xi(\theta_{1m} + \theta_{1k}) - \theta_{1k}] \sin \xi \theta_{1m} \pm \\
&\quad \pm 2\xi \sin(\xi\theta_{1k} + \theta_{1m} - \theta_{1k}) \sin \theta_{1m}
\end{aligned}$$

$$\delta_{1k}^{\pm} = 2 \cos[\xi(\theta_{1m} + \theta_{1k}) - \theta_{1k}] \sin \xi \theta_{1m} \pm 2\xi \cos(\xi\theta_{1k} + \theta_{1m} - \theta_{1k}) \sin \theta_{1m}$$

$$2\beta_{21}^{\pm} = \sin[(\xi - 1)\theta_{21} - 2\xi\theta_{22}] \mp \sin[(\xi - 1)\theta_{21} + 2\theta_{22}]$$

$$2\mu_{21}^{\pm} = \cos[2\xi\theta_{22} - (\xi - 1)\theta_{21}] \mp \cos[2\theta_{22} + (\xi - 1)\theta_{21}]$$

$$\begin{aligned}
\Delta_1(\xi) &= 4(\delta_1^2 \Delta_{12} + \delta_2^2 \Delta_{11}) + 16(\Delta_{11} - \delta_1 \sin^2 \xi \theta_{11})(\Delta_{12} + \delta_2 \sin^2 \xi \theta_{12}) - \\
&\quad - 8\delta_1 \delta_2 [\sin \xi \theta_{11} \sin \xi \theta_{12} \cos \xi(\theta_{11} + \theta_{12}) - \xi^2 \sin \theta_{11} \sin \theta_{12} \cos(\theta_{11} - \theta_{12})]
\end{aligned}$$

$$\Delta_2(\xi) = \delta_1 \delta_2 [S^+(\xi, \theta_{22} - \theta_{21}) - S^-(\xi, \theta_{22})] + 4\delta_2 \Delta_{21} \sin 2\xi\theta_{22} + S^-(\xi, \theta_{22}) d_{21}$$

Свободные члены системы (1.15) выражаются через внешние нагрузки

$$\begin{aligned}\tilde{f}_{nk}(s) &= a^{-s} \int_0^{\tilde{z}} f_{nk}(r_n) r_n^s dr_n \\ \tilde{g}_{nk}(s) &= a^{-s} \int_0^{\tilde{z}} g_{nk}(r_n) r_n^s dr_n\end{aligned}\quad (1.19)$$

При этом

$$\tilde{f}_{22}(s) = \tilde{g}_{22}(s) = 0$$

В формулах (1.17) функции α_{nk} и β_{nk} зависят от аргументов (s, β_{nk}) , где $\beta_{nk} = \pi - |\theta_{nk}|$, а функции $M_{nk}, N_{nk}, P_{nk}, Q_{nk}, a_{nk}, b_{nk}$ зависят от аргумента ξ .

После решения интегральных уравнений старые неизвестные выражаются через X_{nk}, Y_{nk} по формулам

$$\begin{aligned}\xi \Delta_n(\xi) C_{nk}(\xi) &= a^{\xi} [X_{nk} M_{nk}^- + Y_{nk} N_{nk}^- - X_{nm} Q_{nm}^- + Y_{nm} P_{nm}^-] \\ \xi \Delta_n(\xi) D_{nk}(\xi) &= a^{\xi} [X_{nk} N_{nk}^+ - Y_{nk} M_{nk}^+ + X_{nm} P_{nm}^+ + Y_{nm} Q_{nm}^+] \quad (1.20) \\ \xi(\xi-1) \Delta_n(\xi) [A_{nk}(\xi) + C_{nk}(\xi)] &= a^{\xi} \sum_{k=1}^2 (-1)^k [X_{nk} a_{nk}^- + Y_{nk} b_{nk}^-] \\ \xi \Delta_n(\xi) [(\xi-1) B_{nk} + (\xi+1) D_{nk}] &= a^{\xi} \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} [X_{nk} b_{nk}^+ - Y_{nk} a_{nk}^+]\end{aligned}$$

которые получаются из решения систем (1.12) и (1.14).

Контактные напряжения на отрезке $O_1 O_2$ ($\bar{\varphi}_1 = \bar{\varphi}_2 = 0$, $r_1 + r_2 = a$) в силу (1.12) и (1.11) будут определяться по формулам:

$$\sigma_r = \frac{1}{2\pi i} \sum_{p,k}^2 \frac{(-1)^k}{r_p} \int_{L_p} [X_{pk}(\xi) a_{pk}^-(\xi) + Y_{pk}(\xi) b_{pk}^-] \left(\frac{a}{r_p}\right)^{\xi} \frac{d\xi}{\Delta_p(\xi)} \quad (1.21)$$

$$\tau_{r\varphi} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{p,k}^2 \frac{(-1)^k}{r_p} \int_{L_p} [Y_{pk} a_{pk}^+ - X_{pk} b_{pk}^+] \left(\frac{a}{r_p}\right)^{\xi} \frac{d\xi}{\Delta_p(\xi)}$$

$$\sigma_r^{(4)} = -\sigma_e - \frac{2}{\pi i} \sum_{p=1}^2 \int_{L_p} \xi C_{pk}(\xi) r_p^{-\xi-1} d\xi \quad (1.22)$$

Из (1.22) и (1.20) можно вычислить скачок нормального напряжения σ_r на линии контакта

$$\delta_1 \sigma_r^{(1)} - \delta_2 \sigma_r^{(2)} = (4 - \delta_1 + \delta_2) \sigma_e$$

Интегралы, входящие в выражения напряжений, можно вычислить с помощью теоремы о вычетах. Из интегральных уравнений (1.15) видно, что

неизвестные функции $X_{nk}(s)$ и $Y_{nk}(s)$ имеют полюсы в точках $s = -n$ ($n = 1, 2, \dots$). Кроме этого, подынтегральные функции имеют полюсы в точках $S = \xi_{pq}$, где $\Delta_p(\xi_{pq}) = 0$.

Если окрестности точек O_1 и O_2 свободны от внешней нагрузки, то напряжения выразятся через степенные ряды

$$a^{\sigma_q} = \sum_q \sum_{k=1}^2 \frac{(-1)^k}{\Delta_p(\xi_{pq})} [X_{pk}(\xi_{pq}) a_{pk}^-(\xi_{pq}) + Y_{pk}(\xi_{pq}) b_{pk}^-(\xi_{pq})] \times \\ \times \left(\frac{a}{r_p}\right)^{\xi_{pq}+1} + R_1$$

$$a^{\tau_q} = \sum_q \sum_{k=1}^2 \frac{(-1)^k}{\Delta_p(\xi_{pq})} [Y_{pk}(\xi_{pq}) a_{pk}^+(\xi_{pq}) - X_{pk}(\xi_{pq}) b_{pk}^-(\xi_{pq})] \times \\ \times \left(\frac{a}{r_p}\right)^{\xi_{pq}+1} + R_2 \quad (1.23)$$

$$a^{\sigma_r^{(1)}} = -a^{\tau_q} - 4 \sum_q \sum_{p=1}^2 \frac{1}{\Delta_p(\xi_{pq})} [X_{p1}(\xi_{pq}) M_{p1}^-(\xi_{pq}) + \\ + Y_{p1}(\xi_{pq}) N_{p1}^-(\xi_{pq}) - X_{p2}(\xi_{pq}) Q_{p2}^-(\xi_{pq}) + Y_{p2}(\xi_{pq}) P_{p2}^-(\xi_{pq})] \times \\ \times \left(\frac{a}{r_p}\right)^{\xi_{pq}+1} + R_2$$

$$a^{\tau_r^{(2)}} = -a^{\sigma_q} - 4 \sum_q \sum_{p=1}^2 \frac{1}{\Delta_p(\xi_{pq})} [-X_{p1}(\xi_{pq}) Q_{p1}^-(\xi_{pq}) + Y_{p1}(\xi_{pq}) P_{p1}^-(\xi_{pq}) + \\ + M_{p2}^-(\xi_{pq}) X_{p2}(\xi_{pq}) + Y_{p2}(\xi_{pq}) N_{p2}^-(\xi_{pq})] \left(\frac{a}{r_p}\right)^{\xi_{pq}+1} + R_4$$

где суммирование по q производится по всем ξ_{pq} — корням целых функций $\Delta_p(\xi)$, для которых $\text{Re}(\xi_{pq}) < 0$. Регулярные функции $R_k = R_k(r_1, r_2)$ ($r_1 + r_2 = a$, $k = 1 \div 4$) появляются [из-за конечности линии контакта.

При получении (1.23) были использованы значения

$$a_{ik}^+(-1) = 0, \quad b_{ik}^+(-1) = 0, \quad \Delta_1(-1) = 0$$

Исключением неизвестных X_{pn} , X_{pn} , Y_{pn} , Y_{pn} система сингулярных интегральных уравнений (1.15) сводится к двум независимым системам интегральных уравнений второго рода относительно неизвестных функций X_{nk} , X_{nk} , Y_{nk} , Y_{nk} с непрерывными ядрами

$$X_{nk}(s) [1 + \gamma_{nk}^{(1)}(s)] + Y_{nk}(s) \gamma_{nk}^{(2)}(s) + X_{nm}(s) \gamma_{nk}^{(3)}(s) + Y_{nm}(s) \gamma_{nk}^{(4)}(s) + \\ + \int_{L_n} [X_{nk}(z) \tilde{K}_{nk}^{(1)}(z, s) + Y_{nk}(z) \tilde{K}_{nk}^{(2)}(z, s) + X_{nm}(z) \tilde{K}_{nk}^{(3)}(z, s) +$$

$$\begin{aligned}
& + Y_{nm}(z) \bar{K}_{nk}^{(4)}(z, s) dz = \bar{f}_{nk}(s) - \int_{L_p} [\bar{f}_{pk}(z) K_{nk}^{(1)}(z, s) + \\
& + \bar{g}_{pk}(z) K_{nk}^{(2)}(z, s) + \bar{f}_{pm}(z) K_{nk}^{(3)}(z, s) + \bar{g}_{pm}(z) K_{nk}^{(4)}(z, s)] dz \quad (1.24) \\
& X_{nk}(s) \gamma_{nk}^{(5)}(s) + Y_{nk}(s) [1 + \gamma_{nk}^{(6)}(s)] + X_{nm}(s) \gamma_{nk}^{(7)}(s) + Y_{nm}(s) \gamma_{nk}^{(8)}(s) + \\
& + \int_{L_n} [X_{nk}(z) \bar{K}_{nk}^{(5)}(z, s) + Y_{nk}(z) \bar{K}_{nk}^{(6)}(z, s) + X_{nm}(z) \bar{K}_{nk}^{(7)}(z, s) + \\
& + Y_{nm}(z) \bar{K}_{nk}^{(8)}(z, s)] dz = \bar{g}_{nk}(s) - \int_{L_p} [\bar{f}_{pk}(z) K_{nk}^{(5)}(z, s) + \\
& + \bar{g}_{pk}(z) K_{nk}^{(6)}(z, s) + \bar{f}_{pm}(z) K_{nk}^{(7)}(z, s) + \bar{g}_{pm}(z) K_{nk}^{(8)}(z, s)] dz \\
& \quad (n, k = 1, 2; \quad n + p = k + m = 3)
\end{aligned}$$

где

$$\bar{K}_{nk}^{(q)}(z, s) = \frac{\Gamma(s+1)}{4\pi^2 \Gamma(z+1)} \int_{L_p} \frac{\Gamma(z-\xi) \Gamma(\xi-s)}{\Delta_n(z) \Delta_p(\xi)} \bar{K}_{nk}^{(q)}(z, \xi, s) d\xi$$

$$4\Delta_1(s) \Delta_2(s) \gamma_{nk}^{(q)}(s) = -\bar{K}_{nk}^{(q)}(s, s, s) \quad (q = 1, 2, \dots, 8) \quad (1.25)$$

$$\begin{aligned}
\bar{k}_{nk}^{(q)}(z, \xi, s) &= k_{nk}^{(q)}(z, \xi) k_{pk}^{(1)}(\xi, s) + k_{nk}^{(q+4)}(z, \xi) k_{pk}^{(7)}(\xi, s) + \\
&+ k_{nm}^{(1)}(z, \xi) k_{pk}^{(3)}(\xi, s) + k_{nm}^{(7+4)}(z, \xi) k_{pk}^{(4)}(\xi, s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{k}_{nk}^{(q+4)}(z, \xi, s) &= k_{nk}^{(q)}(z, \xi) k_{pk}^{(5)}(\xi, s) + k_{nk}^{(q-4)}(z, \xi) k_{pk}^{(6)}(\xi, s) + \\
&+ k_{nm}^{(1)}(z, \xi) k_{pk}^{(7)}(\xi, s) + k_{nm}^{(7+4)}(z, \xi) k_{pk}^{(8)}(\xi, s)
\end{aligned}$$

$$l = l(q), \quad l(1) = 3, \quad l(2) = 4, \quad l(3) = 1, \quad l(4) = 2.$$

При этом была использована формула Пуанкаре-Бертрана перестановки сингулярных интегралов

$$\int_L \frac{d\tau}{\tau-t} \int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau_1-\tau} d\tau_1 = -\pi^2 \varphi(t, t) + \int_L d\tau_1 \int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1) d\tau}{(\tau-t)(\tau_1-\tau)}$$

Свободные члены в (1.24) ограничены по модулю. При соблюдении условий $\theta_{11} - \theta_{12} \geq \pi$, $\theta_{22} - \theta_{21} \geq \pi$ из (1.25) и (1.17), а также из свойств функций $B(x, y)$ следует, что

$$\int_{L_n} \int_{L_k} |\bar{K}_{nk}^{(q)}(z, s)|^p dz ds < \infty \quad (p \geq 1) \quad (1.26)$$

то есть уравнения (1.24) являются Фредгольмовыми.

Система интегральных уравнений (1.15) может быть сведена также к решению бесконечной системы линейных уравнений.

Для этого представим неизвестные функции $X_{nk}(s)$ и $Y_{nk}(s)$ в виде рядов по функциям $\tilde{H}_q(s)$

$$X_{nk}(s) = \sum_{q=0}^{\infty} x_{nk}^{(q)} \tilde{H}_q(s) \quad (n, k = 1, 2) \quad (1.27)$$

$$Y_{nk}(s) = \sum_{q=0}^{\infty} y_{nk}^{(q)} \tilde{H}_q(s) \quad (s \in L_n)$$

где $\tilde{H}_q(s)$ — функции, связанные с многочленами Чебышева—Эрмита [4] следующим образом:

$$\tilde{H}_q(s) = i^n H_q\left(\frac{s-c}{i}\right), \quad s = c + iy \quad (1.28)$$

Подставляя (1.26) в (1.15), после некоторых преобразований для определения неизвестных коэффициентов разложений (1.27), получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$x_{nk}^{(l)} + \sum_{q=0}^{\infty} [A_{pk, lq}^{(1)} x_{pk}^{(q)} + A_{pk, lq}^{(2)} y_{pk}^{(q)} + A_{pk, lq}^{(3)} x_{pm}^{(q)} + A_{pk, lq}^{(4)} y_{pm}^{(q)}] = F_{nk, l}$$

$$y_{nk}^{(l)} + \sum_{q=0}^{\infty} [A_{pk, lq}^{(5)} x_{pk}^{(q)} + A_{pk, lq}^{(6)} y_{pk}^{(q)} + A_{pk, lq}^{(7)} x_{pm}^{(q)} + A_{pk, lq}^{(8)} y_{pm}^{(q)}] = G_{nk, l}$$

$$n, k = 1, 2; \quad n + p = 3; \quad k + m = 3; \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

где коэффициенты при неизвестных и свободные члены определяются соответственно по формулам

$$A_{pk, lq}^{(v)} = \frac{(-2)^{-l-1}}{l! \sqrt{\pi^3}} \int_{L_p} \int_{L_n} \frac{B(s+1, \xi-s)}{\Delta_p(\xi)} K_{pk}^{(v)}(\xi, s) \tilde{H}_q(\xi) \tilde{H}_l(\xi) e^{(s-v)\xi} d\xi ds$$

$$F_{nk, l} = \frac{(-2)^{-l-1}}{i \sqrt{\pi} l!} \int_{L_n} \tilde{f}_{nk}(s) \tilde{H}_l(s) \alpha^{-s} e^{(s-c)\gamma} ds$$

$$G_{nk, l} = \frac{(-2)^{-l-1}}{i \sqrt{\pi} l!} \int_{L_n} \tilde{g}_{nk}(s) \tilde{H}_l(s) \alpha^{-s} e^{(s-c)\gamma} ds$$

Заметим, что как коэффициенты, так и свободные члены бесконечной системы — действительные числа.

Использованием оценки (1.26) нетрудно доказать, что бесконечные системы являются квазивполне регулярными.

При некоторых значениях углов θ_{pk} из общего решения задачи могут быть получены решения для бесконечной плоскости с двумя горизонталь-

ными трещинами и одной вертикальной (или, наоборот), для полуплоскости с двумя симметрично расположенными полубесконечными трещинами, для полосы с полубесконечной трещиной, для T -образного тела и др.

Отметим, что аналогичные задачи другим методом рассмотрены Нуллером Б. М. [5]. Ворович И. И. [6] предложил приближенный метод для решения таких задач. Некоторые частные случаи рассмотрены Боджи Д. Б. [7], Чобаяном К. С. [8] экспериментальным методом исследована задача для составной полосы без трещины.

2. Рассмотрим некоторые частные случаи.

1) Если принять, что $E_2 = \infty$, то есть принять, что нижний материал абсолютно жесткий, то получим решение плоской задачи для бесконечного треугольника (фиг. 2), когда на линии O_1O_2 заданы нулевые перемещения, а на боковых ребрах верхнего материала заданы напряжения. При этом

$$\begin{aligned} \delta_2 &= 0, \quad \delta_1 = 4(1 + \nu_1)^{-1} \\ a_{p2}^1 &= b_{p2}^1 = Q_{p2}^1 = P_{p2}^1 = 0 \\ K_{p1}^{(3)} &= K_{p1}^{(4)} = K_{p1}^{(7)} = K_{p1}^{(8)} = 0 \end{aligned}$$

Решение этой задачи сводится к решению системы из четырех сингулярных уравнений относительно неизвестных X_{p1} и Y_{p1} ($p = 1, 2$)

$$\begin{aligned} X_{p1}(s) + \int_{L_n} \frac{B(s+1, \xi-s)}{2\pi i d_{p1}(\xi)} [X_{n1}(\xi) K_{n1}^{(1)}(\xi, s) + Y_{n1}(\xi) K_{n1}^{(2)}(\xi, s)] d\xi &= \tilde{f}_{p1}(s) \\ Y_{p1}(s) + \int_{L_n} \frac{B(s+1, \xi-s)}{2\pi i d_{p1}(\xi)} [X_{n1}(\xi) K_{n1}^{(3)}(\xi, s) + Y_{n1}(\xi) K_{n1}^{(6)}(\xi, s)] d\xi &= \tilde{g}_{p1}(s) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} K_{n1}^{(1)}(\xi, s) &= \bar{\alpha}_{n1}^+(s) \bar{\alpha}_{n1}^-(\xi) + (-1)^n \bar{\beta}_{n1}^+(\xi) \bar{\beta}_{n1}^-(s) \\ K_{n1}^{(2)}(\xi, s) &= - [(-1)^n \bar{\beta}_{n1}^-(s) \bar{\alpha}_{n1}^-(\xi) + \bar{\alpha}_{n1}^-(\xi) \bar{\alpha}_{n1}^+(s)] \\ K_{n1}^{(3)}(\xi, s) &= \bar{\beta}_{n1}^+(\xi) \bar{\alpha}_{n1}^-(s) + (-1)^n \bar{\alpha}_{n1}^-(\xi) \bar{\beta}_{n1}^+(s) \\ K_{n1}^{(6)}(\xi, s) &= (-1)^n \bar{\beta}_{n1}^-(\xi) \bar{\beta}_{n1}^+(s) + \bar{\alpha}_{n1}^+(\xi) \bar{\alpha}_{n1}^-(s) \end{aligned} \quad (2.2)$$

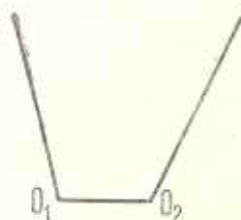
Суммирование в этом случае по индексу « q » при вычислении напряжений (1.23) производится по корням ξ_{p0} трансцендентного уравнения

$$d_{p1}(\xi, \delta_{p1}) = 0 \quad (\operatorname{Re} \xi < 0)$$

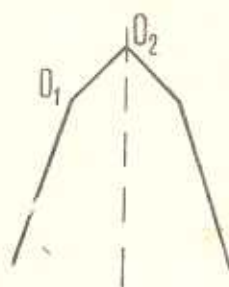
2) Пусть $E_1 = \infty$, тогда

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 0, \quad \delta_2 = -4(1 + \nu_2)^{-1} \\ Q_{p1}^1(\xi) &= P_{p1}^1(\xi) = a_{p1}^1(\xi) = b_{p1}^1(\xi) = 0 \\ K_{p2}^{(3)} &= K_{p2}^{(4)} = K_{p2}^{(7)} = K_{p2}^{(8)} = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

В этом случае получим решение для бесконечного симметричного четырехугольника (фиг. 3), на боковых гранях которого заданы напряжения, а на ломаной части границы — нулевые перемещения.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Решение этой задачи сводится к решению системы уравнений:

$$X_{12}(s) + \int_{L_2} \frac{B(s+1, \xi-s)}{2\pi i \tilde{S}^+(\xi, \theta_{22})} [X_{22}(\xi) K_{22}^{(1)}(\xi, s) + Y_{22}(\xi) K_{22}^{(2)}(\xi, s)] d\xi = \tilde{f}_{12}(s) \quad (2.4)$$

$$Y_{12}(s) + \int_{L_1} \frac{B(s+1, \xi-s)}{2\pi i \tilde{S}^+(\xi, \theta_{22})} [X_{22}(\xi) K_{22}^{(5)}(\xi, s) + Y_{22}(\xi) K_{22}^{(6)}(\xi, s)] d\xi = \tilde{g}_{12}(s)$$

$$X_{22}(s) + \int_{L_1} \frac{B(s+1, \xi-s)}{2\pi i a_{12}} [X_{12}(\xi) K_{12}^{(1)}(\xi, s) + Y_{12}(\xi) K_{12}^{(2)}(\xi, s)] d\xi = 0$$

$$Y_{22}(s) + \int_{L_1} \frac{B(s+1, \xi-s)}{2\pi i d_{12}} [X_{12}(\xi) K_{12}^{(5)}(\xi, s) + Y_{12}(\xi) K_{12}^{(6)}(\xi, s)] d\xi = 0$$

где ядра имеют вид

$$\begin{aligned} K_{22}^{(1)}(\xi, s) &= \tilde{\alpha}_{12}^+(s) \tilde{\alpha}_{22}^-(\xi) + \tilde{\beta}_{12}^-(s) \tilde{\beta}_{22}^+(\xi) \\ K_{22}^{(2)}(\xi, s) &= -\tilde{\alpha}_{12}^+(s) \cos(\xi+1)\theta_{22} + \tilde{\beta}_{12}^-(s) \sin(\xi+1)\theta_{22} \\ K_{22}^{(5)}(\xi, s) &= -\tilde{\beta}_{12}^+(s) \tilde{\alpha}_{22}^-(\xi) + \tilde{\alpha}_{12}^-(s) \tilde{\beta}_{22}^+(\xi) \\ K_{22}^{(6)}(\xi, s) &= \tilde{\beta}_{12}^+(s) \cos(\xi+1)\theta_{22} + \tilde{\alpha}_{12}^-(s) \sin(\xi+1)\theta_{22} \\ K_{12}^{(1)}(\xi, s) &= \tilde{\beta}_{12}^+(\xi) \cos(s+1)\theta_{22} - \tilde{\alpha}_{12}^-(\xi) \sin(s+1)\theta_{22} \\ K_{12}^{(2)}(\xi, s) &= \tilde{\beta}_{12}^-(\xi) \sin(s+1)\theta_{22} + \tilde{\alpha}_{12}^+(\xi) \cos(s+1)\theta_{22} \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$K_{12}^{(5)}(\xi, s) = \tilde{\beta}_{22}^+(s) \tilde{\alpha}_{12}^-(\xi) + \tilde{\alpha}_{22}^-(s) \tilde{\beta}_{12}^+(\xi)$$

$$K_{12}^{(6)}(\xi, s) = -\tilde{\beta}_{12}^-(\xi) \tilde{\beta}_{22}^+(s) + \tilde{\alpha}_{22}^-(s) \tilde{\alpha}_{12}^+(\xi)$$

$$\tilde{S}^+(\xi, \theta_{22}) = S^+(\xi, \theta_{22}) + \delta_2 \sin 2\xi \theta_{22}$$

Отметим, что, как и в общем случае, системы сингулярных интегральных уравнений (3.1) и (2.4) исключением неизвестных могут быть сведены к двум неизвестным регулярным интегральным уравнениям Фредгольма, каждое из которых содержит по два уравнения, а также могут быть сведены к бесконечным системам.

3) При $E_1 = E_2$ и $\nu_1 = \nu_2$ имеем случай одинаковых материалов, при этом $\delta_1 = \delta_2 = \infty$. В этом случае выражения ядер сингулярных интегральных уравнений (1.15) сильно упрощаются. Все величины в выражениях ядер, зависящие от ξ , заменяются следующими величинами:

$$\Delta_1(\xi) = 4[\sin^2 \xi (\theta_{11} - \theta_{12}) - \xi^2 \sin^2 (\theta_{11} - \theta_{12})]$$

$$\Delta_2(\xi) = S^+(\xi, \theta_{22} - \theta_{21})$$

$$M_{1k}^+(\xi) = -Q_{1k}^+(\xi) = -2 \sin [\theta_{1k} + \xi \theta_{1m}] \sin \xi (\theta_{1m} - \theta_{1k}) \mp \\ \mp 2\xi \sin (\xi \theta_{1k} + \theta_{1m}) \sin (\theta_{1k} - \theta_{1m})$$

$$M_{21}^+(\xi) = -Q_{21}^+(\xi) = p_{21}^+(\xi)$$

$$M_{22}^+(\xi) = -Q_{22}^+(\xi) = \sin(\xi + 1) \theta_{22}$$

$$M_{22}^-(\xi) = -Q_{22}^-(\xi) = 2 \sin (\theta_{22} + \xi \theta_{21}) \sin \xi (\theta_{22} - \theta_{21}) + \\ + 2\xi \sin (\xi \theta_{22} + \theta_{21}) \sin (\theta_{22} - \theta_{21})$$

$$N_{1k}^+(\xi) = P_{1k}^+(\xi) = 2 \sin \xi (\theta_{1m} - \theta_{1k}) \cos (\xi \theta_{1m} + \theta_{1k}) \pm \\ \pm 2\xi \sin (\theta_{1m} - \theta_{1k}) \cos (\theta_{1m} + \xi \theta_{1k})$$

$$N_{21}^+(\xi) = P_{21}^+(\xi) = p_{21}^+(\xi)$$

$$N_{22}^+(\xi) = P_{22}^+(\xi) = 2 \sin \xi (\theta_{21} - \theta_{22}) \cos (\xi \theta_{21} + \theta_{22}) + \\ + 2\xi \sin (\theta_{21} - \theta_{22}) \cos (\xi \theta_{22} + \theta_{21})$$

$$N_{22}^-(\xi) = P_{22}^-(\xi) = -\cos(\xi + 1) \theta_{22}$$

$$a_{1k}^+(\xi) = 4\Delta_{1m} (-1)^k \cos(\xi - 1) \theta_{1k} + (-1)^m [S_{1m}^- \beta_{1k}^+ - C_{1m}^+ \alpha_{1k}^+]$$

$$b_{1k}^+(\xi) = (-1)^m [S_{1m}^+ \alpha_{1k}^+ + C_{1m}^+ \beta_{1k}^+] - 4(-1)^k \Delta_{1m} \sin(\xi - 1) \theta_{1k}$$

$$a_{21}^+(\xi) = -S^+(\theta_{22} - \theta_{21}) \cos(\xi - 1) \theta_{21} - S_{21}^+ \beta_{21}^+ - C_{21}^+ \alpha_{21}^+$$

$$b_{21}^+(\xi) = S^+(\theta_{22} - \theta_{21}) \sin(\xi - 1) \theta_{21} + S_{21}^+ \alpha_{21}^+ - C_{21}^+ \beta_{21}^+$$

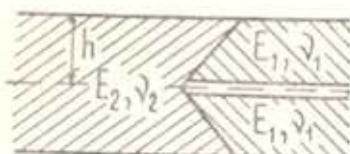
$$a_{22}^+(\xi) = -[C_{21}^- \sin(\xi + 1) \theta_{22} + S_{21}^- \cos(\xi + 1) \theta_{22}] - 4 \sin^2 \xi \theta_{21} \sin(\xi + 1) \theta_{22}$$

$$a_{21}^-(\xi) = a_{21}^- C_{21}^- - \beta_{22}^+ S_{21}^- + 4 \Delta_{21} \cos(\xi - 1) \theta_{22}$$

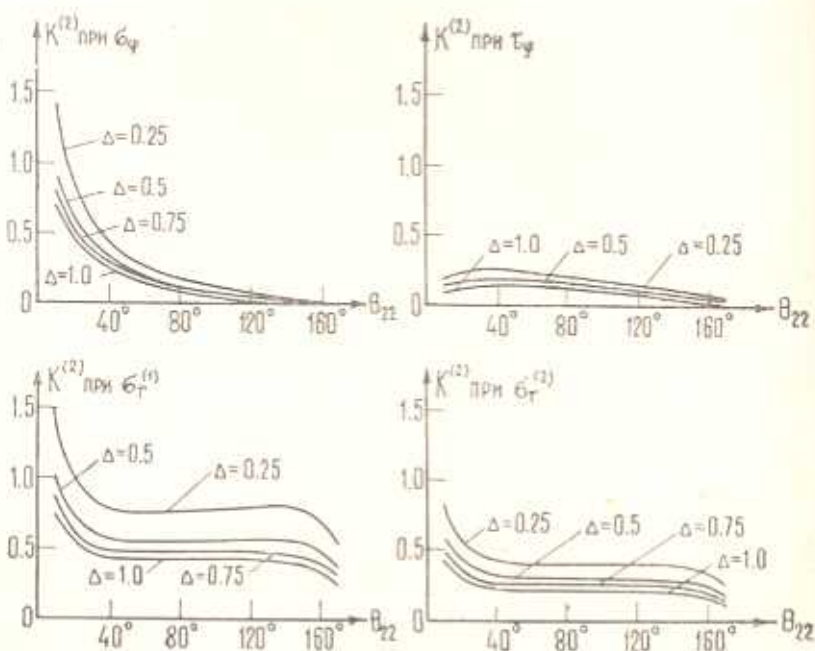
$$b_{22}^+(\xi) = -[S_{21}^+ a_{22}^- + \beta_{22}^- C_{21}^- + 4 \Delta_{21} \sin(\xi - 1) \theta_{22}]$$

$$b_{21}^-(\xi) = C_{21}^+ \cos(\xi + 1) \theta_{22} - S_{21}^- \sin(\xi + 1) \theta_{22} + 4 \sin^2 \xi \theta_{21} \cos(\xi + 1) \theta_{22}$$

3. В качестве числового примера рассмотрим бесконечную составную полосу с полубесконечной трещиной, когда материалы соединены под углом (фиг. 4), а также составные области, представленные на фиг. 8—11.



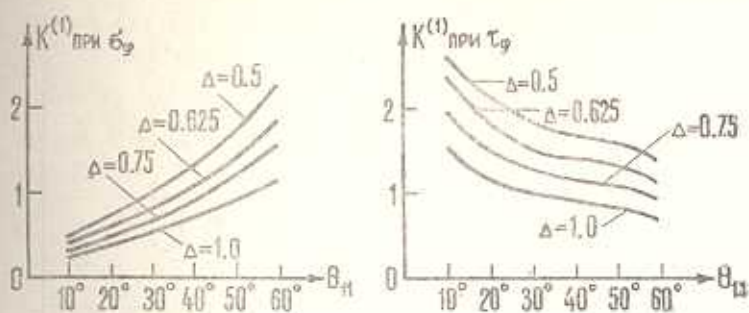
Фиг. 4.



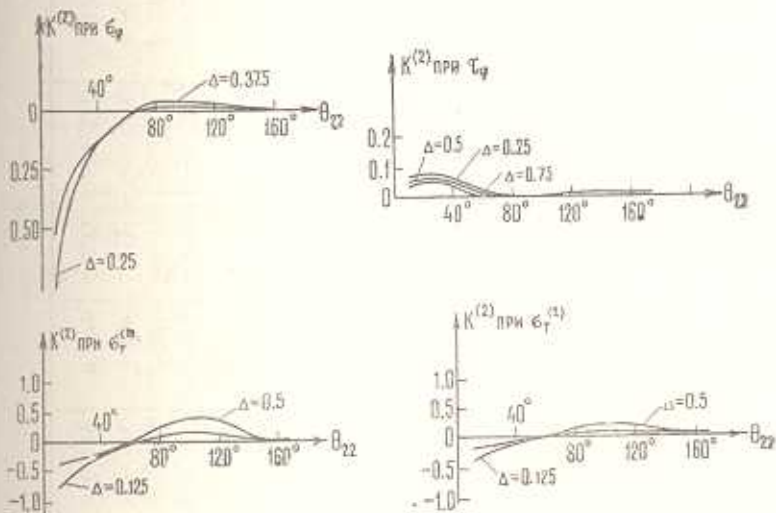
Фиг. 5.

Расчеты выполнены на ЭВМ «ЕС 1022». Для всех областей принято $E_1/E_2 = 2$, $\nu_1 = 0.33$, $\nu_2 = 0.25$, а также принято, что внешние нагрузки приложены в виде сосредоточенных сил, действующих на расстоянии «с» от ближайшего угла, то есть

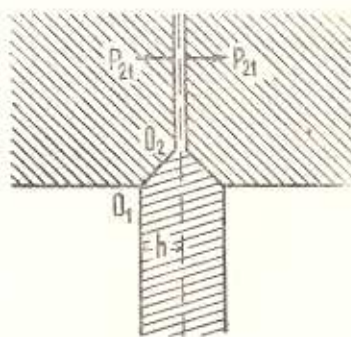
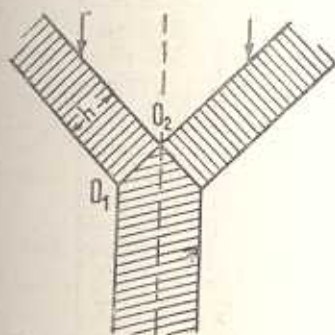
$$f_{nk}(r_n) = P_{nk} \delta(r_n - c), \quad g_{nk}(r_n) = Q_{nk} \delta(r_n - c)$$



Фиг. 6.



Фиг. 7.



Фиг. 9.

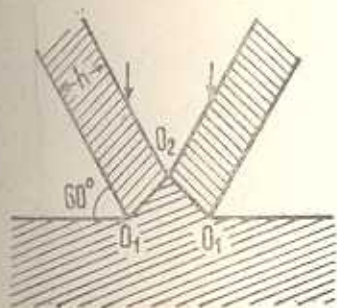
Таблица 1

θ_{11}	ξ_{21}	ξ_{11}	θ_{11}	ξ_{21}	ξ_{11}	θ_{11}	ξ_{21}	ξ_{11}	θ_{11}	ξ_{21}	ξ_{11}
10°	0.9125	0.4823	60°	0.4170	0.9821	110°	0.4451	—	160°	0.4451	0.4971
20°	0.8777	0.4655	70°	0.4144	—	120°	0.4582	—	170°	0.4582	0.4996
30°	0.8793	0.4407	80°	0.4166	—	130°	0.4709	—		0.4709	
40°	0.9043	0.4356	90°	0.4231	—	140°	0.4822	—		0.4822	
50°	0.9439	0.4243	100°	0.4330	—	150°	0.4912	—		0.4912	

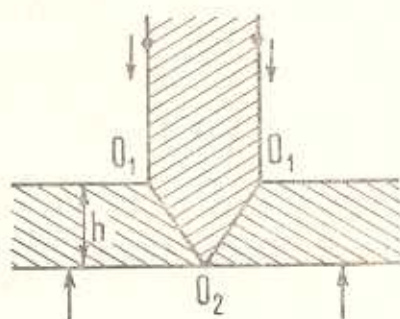
Таблица 2

№. № Фур.	θ_{11}	$-\theta_{12}$	$-\theta_{21}$	θ_{22}	ξ_{11}	ξ_{21}	K(1) при				K(2) при			
							σ_c	τ_c	$\sigma_r^{(1)}$	$\tau_r^{(1)}$	$\sigma_r^{(2)}$	$\tau_r^{(2)}$	σ_c	τ_c
8	90°	135°	90°	90°	0.658	0.434	-0.288	-0.155	-0.175	-0.109	-0.100	0.127	-0.193	-0.104
9	135°	135°	45°	45°	0.557	0.429	0.165	0.022	0.145	0.085	0.206	0.137	0.421	0.226
10	120°	180°	60°	90°	0.50	0.429	-0.227	-0.078	-0.420	-0.227	0.025	0.162	0.132	0.068
10	100°	200°	80°	70°	0.481	0.422	-0.182	-0.095	-0.493	-0.250	0.020	0.181	0.071	0.037
10	80°	220°	100°	50°	0.469	0.430	-0.144	-0.087	-0.544	-0.283	0.006	0.201	0.005	0.003
11	150°	120°	30°	60°	0.571	0.411	-0.148	0.001	-0.126	-0.074	-3.899	0.267	-6.03	-3.308

В табл. 1, приведены значения наименьших по модулю корней ξ_{11} и ξ_{21} (для которых $|\operatorname{Re} \xi_{pq}| < 1$) соответственно функций $\Delta_1(\xi)$ и $\Delta_2(\xi)$ для полосы с полубесконечной трещиной (фиг. 4), а в табл. 2 — для областей, изображенных на фиг. 8—11.



Фиг. 10.



Фиг. 11.

Для различных точек приложения внешних нагрузок (то есть различных $\Delta = c/h$, см. фиг. 4—11) в зависимости от угла наклона линии соединения материалов первые коэффициенты в разложениях (1,23), то есть коэффициенты интенсивности концентрации напряжений $K^{(p)}$ ($p = 1, 2$) у полюсов O_1 и O_2 .

Результаты вычислений для бесконечной полосы приведены на фиг. 5—7, при этом фиг. 5 соответствует случаю приложения нагрузок, когда $P_{21} = -1$, а остальные нагрузки равны нулю, фиг. 6 и 7 — случаю, когда $Q_{11} = 1$, $Q_{12} = -1$, а остальные силы равны нулю.

Из фиг. 5 видно, что коэффициент концентрации $K^{(2)}$ у полюса O_2 при σ_φ , τ_φ , $\sigma_r^{(1)}$ и $\sigma_r^{(2)}$ в пределах изменения угла θ_{22} от 60° до 140° практически остается постоянным. Из фиг. 6 имеем, что коэффициент концентрации $K^{(1)}$ у полюса O_1 при σ_φ при изменении угла θ_{11} от 10° до 60° минимальное значение принимает при $\theta_{11} = 10^\circ$, а $K^{(1)}$ при τ_φ — при $\theta_{11} = 60^\circ$.

Заметим, что в обоих случаях значения коэффициентов $K^{(p)}$ ($p = 1, 2$) при удалении точки приложения внешних нагрузок, то есть при увеличении отношения $\Delta = c/h$, до значения $\Delta = 1$, по абсолютному значению уменьшаются. Из фиг. 7 следует, что коэффициенты концентрации $K^{(2)}$ при σ_φ и τ_φ получаются минимальными, когда θ_{22} принимает значения, большие 60° , а коэффициенты концентрации $K^{(2)}$ при $\sigma_r^{(1)}$ и $\sigma_r^{(2)}$ получают минимальные значения при изменении угла θ_{22} в пределах от 50° до 70° и свыше 130° .

В табл. 2 приведены значения этих же коэффициентов для областей, изображенных на фиг. 8—11, для $\Delta = 1$.

Отметим, что аналогичным, как в данной статье, образом можно рассмотреть несимметричные задачи.

ՏԱՐԲԵՐ ԵՅՈՒԹԵՐԻՑ ԵՐԵՔ ԿՐՍԱՆԵՐՏԵՐԻ ՄԻԱՅՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱՐ
ՀԱՐՔ ԽՆՅԻՐ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Ֆիտարկվում է հարթ կոնտակտային խնդիր Y-աձև տիրույթի համար՝ որը բաղկացած է երկու տարրեր նյութերից՝ սիմետրիայի մեկ MN (ֆիգ. 1) առանցքի առկայության դեպքում: Ենթադրվում է, որ միացված նյութերի միջև աեղի ունի լրիվ ամրակցում, իսկ եզրային պայմանները արված են շարունակելով: Ստացված են կոնտակտային բարձրանքներ՝ արոնց արտահայտություններում ելլակիրությունները առանձնացված են:

Բերվում են թվային օրինակներ:

A PLANE PROBLEM FOR A COUPLING OF THREE SEMISTRIPS
OF DIFFERENT MATERIALS

A. A. BABLOYAN, N. O. GULKANIAN

S u m m a r y

A plane contact problem for Y shape region, composed of two materials, with one axis of symmetry, is considered. A complete coupling is assumed between the composing materials and boundary conditions are given in stresses. Formulas for contact stresses with singled out particularities are obtained. Numerical examples are presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баблоян А. А., Гуканян Н. О. Плоская задача теории упругости для области, составленной из двух усеченных клиньев. Докл. АН Армянской ССР, 1976, т. LXII, № 3.
2. Баблоян А. А. Плоская контактная задача для двух усеченных клиньев. Докл. АН Армянской ССР, 1977, т. LXV, № 5.
3. Уфланд Я. С. Интегральные преобразования и задачах теории упругости. Л., изд. «Наука», 1968.
4. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М., Гос. изд-во техн. теор. лит., 1953.
5. Нумлер Б. М. О новых обобщениях метода кусочно-однородных решений. Изв. ВНИИГ, 1978, т. 124.
6. Развитие теории контактных задач в СССР. М., «Наука», 1976.
7. Боджи Д. Б. Плоская статическая задача о напряженной трещине, заканчивающейся на границе раздела двух материалов. Прикл. мех., тр. ASME, 1971, т. 38, сер. E, № 4.
8. Чобанян К. С. Материалы заявки № ОУ-6436 на открытие, 1971, (Диплом № 102).