ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXIV, № 1, 1981 Механика

Г. С. ГРИГОРЯН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ МАТЕРИАЛА

Проблема устойчивости в условиях ползучести материала, поставленная, по-видимому, впервые в [1], разрабатывалась в различных аспектах и для различных деформируемых систем во многих исследованиях [2—4, 17]. В [16а, б] был предложен метод определения критического значения $q_{кр}$ грузового параметра в тонкостенных конструкциях, гибких по Т. Карману [7], основанный на теории устойчивости движения А. М. Ляпунова [5]. В дальнейшем, имея в виду теорию устойчивости движения в конечном интервале времени, основы которой, сформулированные впервые Н. Г. Четаевым, развиты в хорошо известных работах Н. Д. Моисеева, Г. В. Каменкова, Г. Н. Дубошина, А. А. Лебедева, С. К. Персидского, К. А. Абгаряна и др., был предложен метод определения $q_{кр}$ [16, в], исходя из достаточных условий устойчивости С. К. Персидского [18]. В [16, а, б] задачи об устойчивости железобетонных оболочек решались в первом приближении методом Бубнова—Галеркина. В настоящей работе излагается метод, учитывающий второе приближение по Бубнову—Галеркину (симметричная и антисимметричная формы потери устойчивости).

§ 1. Имея в виду линейную ограниченную ползучесть материала [6, 8], полагая, что коэффициент Пуассона при этом не меняется [6, 9—11], рассматривая пологую длинную круговую, гибкую по Т. Карману, цилиндрическую панель радиуса R и толщины h, при размере панели вдоль образующей, значительно превышающем размер b вдоль дуги так, что изогнутую срединную поверхность ее можно считать цилиндрической, полагая панель шарнирно закрепленной неподвижными, жесткими, продольными ребрами и загруженной равномерно распределенным давлением интенсивности q с выпуклой стороны, приходим к следующему уравнению равновесия:

$$\overline{D}\,\frac{\partial^4 w(y,t)}{\partial y^4}+p(t)\left[\frac{\partial^2 w(y,t)}{\partial y^2}+\frac{1}{R}\right]=q \qquad (1.1)$$

где

$$\overline{D} = \frac{h^3}{12(1-\nu^2)}\overline{E}$$

$$p(t) = \frac{h}{b(1-\nu^2)}\overline{E}\left[-\frac{1}{2}\int_0^b\left(\frac{\partial w(y,t)}{dy}\right)^2 dy + \int_0^b \frac{w(y,t)}{R}\,dy\right] \qquad (1.2)$$

$\overline{E}$ — некоторый ограниченный линейный оператор, связывающий напряжения (σ) и деформации (ε) при осевом растяжении — сжатии в момент времени t соотношением

$$\sigma = \overline{E}\varepsilon \qquad (1.3)$$

В (1.1) использована перестановка операций по геометрическим координатам и тех же операций по времени. Вывод уравнения, соответствующего (1.1) при упругой работе материала, см. [13].

Исходя из линейной теории ползучести Маслова—Арутюняна и полагая $E=\mathrm{const}$, взамен (1.3) будем иметь [6]*

$$\sigma'' + \gamma\sigma' = E(\varepsilon'' + \eta'\varepsilon'), \qquad \eta' = \gamma\left(1 + C_0 + \frac{A_1}{t}\right) \qquad (1.4)$$

где γ, C_0, A_1 — постоянные.

В случае вязко-упругого материала Кельвина взамен (1.3) будем иметь [10]

$$\sigma' + \lambda\sigma = E(\varepsilon' + \mu\varepsilon) \qquad (1.5)$$

где E, μ, λ — постоянные.

Известны и другие соотношения, связывающие σ и ε при линейной ползучести материала. Например, [15]

$$\left(p_2\frac{d^2}{dt^2} + p_1\frac{d}{dt} + p_0\right)\sigma = \left(q_2\frac{d^2}{dt^2} + q_1\frac{d}{dt} + q_0\right)\varepsilon \qquad (1.6)$$

где p_i, q_i $(i = 0,\ 1,\ 2)$ — постоянные.

Соотношение (1.6) имеет в виду т. н. линейную четырехзвенную модель вязко-упругого материала. Получение на основе (1.5) и (1.6) результатов, аналогичных приведенным ниже, причем более простых, не представляет трудностей.

---

* В [16, 6] рассматривались оболочки, состоящие из трех симметрично расположенных слоев, имеющих различные упругие и реологические характеристики, в [4] — устойчивость в бесконечном и конечном интервалах времени (по А. М. Ляпунову и Н. Г. Четаеву, соответственно) стержня из неоднородно стареющего материала, упругие и реологические характеристики которого меняются во времени в зависимости от геометрических координат. Теорию ползучести неоднородно стареющих тел см. в [19, а, б].

§ 2. В соответствии с методом Бубнова—Галеркина (второе приближение, симметричная форма), примем

$$w(y,\,t)=\theta_1(t)\sin\beta y+\theta_2(t)\sin 3\beta y \tag{2.1}$$

и выпишем уравнения

$$\int\limits_0^b X\sin\beta y\,dy=0,\qquad \int\limits_0^b X\sin 3\beta y\,dy=0 \tag{2.2}$$

где, в соответствии с (1.1),

$$X=\overline{D}\,\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+p\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{1}{R}\right)-q \tag{2.3}$$

Подстановка (2.1) в (1.2) и (2.2) с учетом (2.3) дает

$$\overline{E}\left(\frac{2}{\pi}y_1+\frac{2}{3\pi}y_2-3a_3y_1^2-27a_3y_2^2\right)=Ey_3$$

$$\overline{E}\,y_1=(a_1y_1y_3-3a_2y_3+4q_0)\,E \tag{2.4}$$

$$243\overline{E}\,y_2=(27a_1y_2y_3-3a_2y_3+4q_0)\,E$$

$$y_1=\frac{\theta_1}{R}\qquad y_2=\frac{\theta_2}{R}\qquad y_3=\frac{p(1-\nu^2)}{Eh}\qquad \beta=\frac{\pi}{b}$$

$$a_1=\frac{12}{\beta^2h^2}\qquad a_2=\frac{16}{\pi R^2h^2\beta^4}\qquad a_3=\frac{\beta^2R^2}{12}\qquad q_0=\frac{12q(1-\nu^2)}{\pi\beta^4h^3ER} \tag{2.5}$$

На основе (1.4) перепишем (2.4) в виде

$$\sum_j b_{kj}\,y'_{k+3}=b_k\qquad (j,\;k=1,\;2,\;3) \tag{2.6}$$

Здесь приняты обозначения:

$$y'_k=y_{k+3}\qquad y^{\cdot}_k=y'_{k+3}\qquad (k=1,\;2,\;3) \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}
&b_{11}=1-a_1y_3 && b_{12}=0 && b_{13}=3a_2-a_1y_1\\
&b_{21}=0 && b_{22}=243-27a_1y_3 && b_{23}=3a_2-27a_1y_2\\
&b_{31}=\frac{2}{\pi}-6a_3y_1 && b_{32}=\frac{2}{3\pi}-54a_3y_2 && b_{33}=-1
\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}
&b_1=-\gamma y_4+2a_1y_4y_6+\gamma'a_1(y_3y_4+y_1y_6)-3a_2\gamma'y_6\\
&b_2=-243\gamma y_5+54a_1y_5y_6+27a_1\gamma'(y_3y_5+y_2y_6)-3a_2\gamma'y_4\\
&b_3=\gamma'y_6-\frac{2}{\pi}\gamma y_4-\frac{2}{3\pi}\gamma y_5+6a_3(y_4^2+\gamma y_1y_4)+54a_3(y_5^2+\gamma y_2y_5)
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Учитывая, что определитель $|b_{ij}|\neq 0$ $(i, j=1, 2, 3)$, решим (2.6) относительно y'_{k+3} и окончательно запишем

$$y'_k = y_{k+3}, \qquad y'_{k+3} = \frac{|a_{ij}^{(k)}|}{|b_{ij}|}$$

$$a_{ij}^{(k)} = \begin{cases} b_{ij} & j\neq k \\ b_k & j=k \end{cases} \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \tag{2.10}$$

Из (2.5)—(2.9) следует

$$|a_{ij}^{(k)}| = |a_{ij}^{(k)}|\ (y_1, y_2, \ldots, y_6, t); \qquad |b_{ij}| = |b_{ij}|\ (y_1, y_2, y_3) \tag{2.11}$$

Таким образом, уравнение равновесия (1.1) приведено к нелинейной системе из шести дифференциальных уравнений первого порядка (2.10), разрешенных относительно производных. Правые части ее содержат t явно.

Пусть заданному фиксированному значению грузового параметра q_0 соответствует частное решение

$$y_i(t) = f_i(t) \qquad (i=1, 2, \ldots, 6) \tag{2.12}$$

системы (2.10), проходящее при $t=t_0$ через точку

$$f_i(t_0) = f_i^0 \qquad (i=1, 2, \ldots, 6) \tag{2.13}$$

Принимая в (2.4) $t=t_0$ и учитывая (2.12) и (2.13), напишем

$$\begin{gathered} f_1^0 = a_1 f_1^0 f_3^0 - 3a_2 f_3^0 + 4q_0 \\ 243 f_2^0 = 27 a_1 f_2^0 f_3^0 - 3a_2 f_3^0 + 4q_0 \\ f_3^0 = \frac{2}{\pi} f_1^0 + \frac{2}{3\pi} f_2^0 - 3a_3 f_1^{0^2} - 27 a_3 f_2^{0^2} \end{gathered} \tag{2.14}$$

Следуя [14] и обозначив

$$\psi = \frac{f_2^0}{f_1^0} \tag{2.15}$$

из первых двух уравнений (2.14) получим

$$\psi = \frac{1 - a_1 f_3^0}{243 - 27 a_1 f_3^0} \tag{2.16}$$

При этом система (2.14) сводится к кубическому уравнению

$$3a_1 a_3 (1+9\psi^2) f_1^{0^3} - \left[\frac{2a_1}{\pi}\left(1+\frac{\psi}{3}\right) + 9a_2 a_3 (1+9\psi^2)\right] f_1^{0^2} + $$
$$+ \left[\frac{6}{\pi} a_2 \left(1+\frac{\psi}{3}\right) + 1\right] f_1^0 - 4q_0 = 0 \tag{2.17}$$

Полагая ψ и f_1^0 известными, получим

$$f_3^0 = \frac{f_1^0 - 4q_0}{a_1 f_1^0 - 3a_2}, \qquad f_2^0 = \psi f_1^0 \tag{2.18}$$

При малых нагрузках $\psi \approx \frac{1}{243}$, при больших нагрузках $\psi \approx \frac{1}{27}$ [14]. Если ставится задача определения верхней критической нагрузки, следует исходить из значений, близких к $\psi \approx \frac{1}{27}$, принимая при этом f_1^0 равным наименьшему действительному корню кубического уравнения (2.17).

Продифференцировав, далее, (2.4) по t, приравняв $t = t_0$ [6], учитывая (2.7), (2.12), (2.13) и считая f_k^0 уже известными, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных f_{k+3}^0 $(k = 1, 2, 3)$

$$\sum_j m_{kj} f_{k+3}^0 = m_k \qquad (j, k = 1, 2, 3) \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned} &m_{11} = 1 - a_1 f_3^0 && m_{12} = 0 && m_{13} = 3a_2 - a_1 f_1^0 \\ &m_{21} = 0 && m_{22} = 243 - 27a_1 f_3^0 && m_{23} = 3a_2 - 27a_1 f_2^0 \\ &m_{31} = \frac{2}{\pi} - 6a_3 f_1^0 && m_{32} = \frac{2}{3\pi} - 54a_3 f_3^0 && m_{33} = -1 \end{aligned} \tag{2.20}$$

$$m_1 = \gamma\varphi^0 f_1^0 \qquad m_2 = 243\gamma\varphi^0 f_2^0$$

$$m_3 = \gamma\varphi^0\left(\frac{2}{\pi} f_1^0 + \frac{2}{3\pi} f_2^0 - 3a_3 f_1^{0^2} - 27a_3 f_2^{0^2}\right) \qquad \varphi^0 = C_0 + \frac{A_1}{t_0} \tag{2.21}$$

Учитывая, что $|m_{ij}| \neq 0$, получаем

$$f_{k+3}^0 = \frac{|n_{ij}^{(k)}|}{|m_{ij}|} \qquad n_{ij}^{(k)} = \begin{cases} m_{ij} & j \neq k \\ m_k & j = k \end{cases} \qquad i, j, k = 1, 2, 3 \tag{2.22}$$

§ 3. Пусть требуется определить верхнее критическое значение грузового параметра $q_{0\,\text{кр}}$ такое, что при

$$q_0 < q_{0\,\text{кр}} \tag{3.1}$$

равновесие рассматриваемой панели в условиях ограниченной ползучести материала устойчиво, а при

$$q_0 \geqslant q_{0\,\text{кр}} \tag{3.2}$$

неустойчиво. В [13] справедливо отмечается, что нижняя критическая нагрузка при ползучести не может являться характеристикой несущей способности.

Поскольку уравнение равновесия (1.1) рассматриваемой панели сведено к системе дифференциальных уравнений (2.10), можно поставленную задачу определения $q_{0\,\text{кр}}$ по (3.1), (3.2) заменить задачей определения $q_{0\,\text{кр}}$ такого, что при (3.1) частное решение (2.12) системы дифференциальных уравнений (2.10), проходящее при $t=t_0$ через точку (2.13), устойчиво, а при (3.2) — неустойчиво.

Кажущееся противоречие в таком подходе является следствием того, что задача об устойчивости равновесия сведена к задаче об устойчивости движения, это объясняется тем, что ползучесть является медленным процессом, который может быть рассмотрен и как состояние равновесия, и как состояние движения. Напряженно-деформированное состояние находящейся под нагрузкой системы при ползучести материала, рассматриваемое, обычно, как состояние равновесия, как сделано выше при получении уравнения (1.1), в последующих выкладках рассматривается как состояние движения, что обосновывается полученной системой дифференциальных уравнений (2.10).

Этот подход лежит в основе предложенной в [16а] методики расчета на устойчивость в условиях ползучести материала, позволяющей использовать хорошо разработанный аппарат теории устойчивости движения А. М. Ляпунова, что открывает, по мнению автора, широкие возможности.

Приведем доказанное А. М. Ляпуновым положение ([5], n° 14), что «...при решении вопросов устойчивости достаточно будет рассматривать только значения t, бо́льшие сколь угодно больших T, и заменять рассмотрение начальных значений функций x_s рассмотрением их значений, соответствующих $t=T$».

В дальнейшем это утверждение упоминается как Положение (*) Ляпунова.

Выпишем также следующие хорошо известные теоремы Ляпунова, относящиеся к установившемуся движению.

Теорема 1. Когда определяющее уравнение, соответствующее системе дифференциальных уравнений возмущенного движения, имеет корни с отрицательными вещественными частями, то каковы бы ни были остальные его корни для невозмущенного движения будет существовать известная условная устойчивость. А именно, в случае существования k таких корней движение это будет устойчивым для возмущений, подчиненных некоторым $n-k$ уравнениям вида

$$F_j(a_1, a_2, \ldots, a_k) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-k) \tag{3.3}$$

в которых F_j суть голоморфные функции начальных значений a_s функций x_s, обращающиеся в нули, когда все a_s делаются нулями и которые позволяют выражать все эти значения как голоморфные функции k независимых величин.

Теорема II. Когда между корнями определяющего уравнения находятся такие, вещественные части которых положительны, невозмущенное движение неустойчиво.

Вернемся к системе дифференциальных уравнений (2.10). Переходя к уравнениям в возмущениях подстановкой

$$x_s(t) = y_s(t) - f_s(t) \qquad (s = 1, 2, \dots, 6) \tag{3.4}$$

где $x_s(t)$ — возмущения, запишем

$$x'_k = x_{k+3}; \quad x'_{k+3} = \frac{|a_{ij}^{(k)}|(f_1 + x_1, \dots, f_6 + x_6, t)}{|b_{ij}|(f_1 + x_1, f_2 + x_2, f_3 + x_3)} - \frac{|a_{ij}^{(k)}|(f_1, \dots, f_6, t)}{|b_{ij}|(f_1, f_2, f_3)} \tag{3.5}$$

$$a_{ij}^{(k)} = \begin{cases} b_{ij} & j \neq k \\ b_k & j = k \end{cases}$$

$$(i, j, k = 1, 2, 3)$$

Задача об устойчивости частного решения (2.12) системы дифференциальных уравнений (2.10) равносильна задаче об устойчивости нулевого решения

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_6 = 0 \tag{3.6}$$

системы дифференциальных уравнений (3.5), которое эта система, как нетрудно убедиться, имеет.

Разложив правые части системы (3.5) в ряд по степеням x_s и оставив только линейные части, выпишем систему уравнений первого приближения, соответствующую системе (3.5)

$$x'_k = x_{k+3}, \quad x'_{k+3} = p_{k+3\,1}(t)\,x_1 + p_{k+3\,2}(t)\,x_2 + \cdots + p_{k+3\,6}(t)\,x_6 \tag{3.7}$$

$$(k = 1, 2, 3)$$

Имея в виду ограниченную ползучесть материала, примем

$$f_k|_{t>T} = \overline{f}_k - \text{const} \qquad (k = 1, 2, 3) \tag{3.8}$$

При этом будем иметь

$$\overline{f}_{k+3} = f'_k|_{t>T} = 0 \qquad (k = 1, 2, 3) \tag{3.9}$$

Из (2.8)—(2.10), (3.8) и (3.9) следует

$$\overline{b}_k = b_k|_{t>T} = 0, \qquad |a_{ij}^{(k)}|(y_1, \dots, y_6, t)|_{t>T} = 0 \qquad (i, j, k = 1, 2, 3)$$

При этом, принимая, в соответствии с Положением (*) Ляпунова, $t > T$ и обозначив

$$c_{k+3\,s} = p_{k+3\,s}|_{t>T} \qquad (k = 1, 2, 3; \ s = 1, 2, \dots, 6)$$

приходим к следующему определяющему уравнению системы (3.5):

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}-\lambda & c_{45} & c_{46} \\ 0 & 0 & 0 & c_{54} & c_{55}-\lambda & c_{56} \\ 0 & 0 & 0 & c_{64} & c_{65} & c_{66}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{3.10}$$

$$c_{44} = \frac{1}{B}\left(B_{24}\bar{b}_{32}\bar{b}_{31} - B_{14}\bar{b}_{32}\bar{b}_{23} + B_{34}\bar{b}_{22}\bar{b}_{13}\right)$$

$$c_{45} = \frac{1}{B}\left(B_{25}\bar{b}_{13}\bar{b}_{32} - B_{35}\bar{b}_{22}\bar{b}_{13}\right)$$

$$c_{46} = \frac{1}{B}\left(B_{26}\bar{b}_{32}\bar{b}_{13} + B_{36}\bar{b}_{22}\bar{b}_{13} - B_{16}\bar{b}_{12} - B_{16}\bar{b}_{23}\bar{b}_{32}\right)$$

$$c_{54} = \frac{1}{B}\left(B_{24}\bar{b}_{23}\bar{b}_{31} + B_{24}\bar{b}_{11} - B_{24}\bar{b}_{31}\bar{b}_{13} - B_{34}\bar{b}_{23}\bar{b}_{11}\right)$$

$$c_{55} = \frac{1}{B}\left(B_{25}\bar{b}_{11} - B_{25}\bar{b}_{31}\bar{b}_{13} + B_{35}\bar{b}_{12} + B_{35}\bar{b}_{23}\bar{b}_{11}\right) \tag{3.11}$$

$$c_{56} = \frac{1}{B}\left(B_{21}\bar{b}_{23}\bar{b}_{31} - B_{26}\bar{b}_{11} - B_{26}\bar{b}_{31}\bar{b}_{13}\right)$$

$$c_{64} = \frac{1}{B}\left(B_{34}\bar{b}_{11}\bar{b}_{22} - B_{14}\bar{b}_{31}\bar{b}_{22} - B_{24}\bar{b}_{32}\bar{b}_{11}\right)$$

$$c_{65} = \frac{1}{B}\left(B_{25}\bar{b}_{32}\bar{b}_{11} + B_{35}\bar{b}_{11}\bar{b}_{22}\right)$$

$$c_{66} = \frac{1}{B}\left(B_{36}\bar{b}_{22}\bar{b}_{11} - B_{16}\bar{b}_{31}\bar{b}_{22} - B_{26}\bar{b}_{11}\bar{b}_{32}\right)$$

$$B_{ij} = \frac{\partial b_i}{\partial x_j} \qquad \bar{b}_{ij} = b_{ij}|_{t=T} \qquad B = |b_{ij}|_{t=T} \qquad (i,\ j = 1,\ 2,\ 3)$$

Уравнение (3.10) имеет три нулевых корня, а остальные три определяются как корни уравнения

$$\lambda^3 + k_1\lambda^2 + k_2\lambda + k_3 = 0 \tag{3.12}$$

Нетрудно показать, что возмущения, введенные в (3.4), подчиняются трем уравнениям вида (3.3). Учитывая (2.15) и приняв $x_2^0 - 4x_1^0 = 0$, увидим, что будут удовлетворены все условия приведенной выше теоремы I А. М. Ляпунова (при $n = 6$, $k = 2$). Поэтому еще один корень уравнения (3.10) может быть принят равным нулю без нарушения условий этой теоремы. Таким образом, взамен (3.12) получим

$$\lambda^2 + k_1\lambda + k_2 = 0 \tag{3.13}$$

Для невозмущенного движения, то есть решения (3.6) системы (3.5), будет иметь место: а) — известная условная устойчивость, если вещественные части корней уравнения (3.13) отрицательны; б) — неустойчивость, если вещественная часть хотя бы одного из этих корней положительна. Если же не выполнены ни условие а), ни условие б), то устойчивость или неустойчивость решения (3.6) системы (3.5) не могут быть установлены на основе рассмотрения лишь линейного приближения (3.7) — критический случай. Этот случай в настоящей работе не рассматривается.

Будем вычислять частные решения (2.12) системы дифференциальных уравнений (2.10) при увеличиваемых с малым шагом фиксированных q_0, начиная с некоторого его достаточно малого значения, при котором заведомо имеет место устойчивость. Вычисления при каждом фиксированном q_0 будем доводить до t_{n+1}, при котором числовые значения функций $f_s(t_n)$ и $f_s(t_{n+1})$ $(s = 1, 2, \ldots, 6)$ отличаются друг от друга на малые величины. Принимая $t_n > T$, вычислим c_{ik} $(i, k = 4, 5, 6)$ по (3.11) и, решив уравнение (3.13), определим его корни.

Возможны, вообще говоря, следующие случаи:

Случай 1. Существует q_{01} такое, что при всяком $q_0 < q_{01}$ имеет место устойчивость, а при всяком $q_0 \geqslant q_{01}$ — неустойчивость. При этом, в соответствии с (3.1), (3.2), будем иметь $q_{0\,кр} = q_{01}$.

Случай 2. Существует q_{01} такое, что при всяком $q_0 < q_{01}$ имеет место критический случай, а при всяком $q_0 \geqslant q_{01}$ — неустойчивость. При этом, на основе рассмотрения лишь первого приближения, то есть системы (3.7), не удается определить величину $q_{0\,кр}$. Можно будет лишь утверждать, что $q_{0\,кр} \leqslant q_{01}$.

Случай 3. Существуют $q_{02} > q_{01} > 0$ такие, что при $q_0 < q_{01}$ имеет место устойчивость, при $q_{01} \leqslant q_0 < q_{02}$ имеет место критический случай, а при $q_0 \geqslant q_{02}$ — неустойчивость. В этом случае, на основе рассмотрения системы уравнений (3.7), можно лишь утверждать, что $q_{01} \leqslant q_{0\,кр} < q_{02}$. Предлагаемый метод определения $q_{0\,кр}$ будет, очевидно, тем более эффективен, чем более узка вилка (q_{01}, q_{02}).

Случай 4. При любом $q_0 > 0$ имеет место критический случай. При этом нет возможности определить $q_{0\,кр}$ на основе рассмотрения лишь системы уравнений (3.7).

Заметим в заключение, что приведенные выше соображения о выборе числового значения $\psi = \dfrac{f_2^0}{f_1^0}$ содержат определенный произвол, поэтому вычисления должны быть проведены при различных значениях ψ. Искомому значению $q_{0\,кр}$, очевидно, соответствует то значение ψ, при котором имеет место $q_{0\,кр}^{\min}$.

§ 4. Имея в виду несимметричную форму, во втором приближении в методе Бубнова—Галеркина примем

$$w(y,\ t) = \theta_1(t)\sin\beta y + \theta_2(t)\sin 2\beta y \tag{4.1}$$

и выпишем уравнения

$$\int_0^b X\sin\beta y dy = 0 \qquad \int_0^b X\sin 2\beta y dy = 0 \tag{4.2}$$

Здесь X имеет вид (2.3). Подставляя (2.3) в (1.2) и (4.2), получим уравнения, которые приводятся к виду (2.10), где, однако, взамен (2.8) и (2.9) приняты обозначения

$$\begin{aligned} &b_{11} = 1 - a_1 y_3 \qquad && b_{12} = 0 \qquad && b_{13} = 3a_2 - a_1 y_2 \\ &b_{21} = 0 && b_{22} = 4 - a_1 y_3 && b_{23} = -a_1 y_2 \\ &b_{31} = \frac{2}{\pi} - a_3 y_1 && b_{32} = -8a_3 y_2 && b_{33} = -1 \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned} b_1 &= -\gamma y_4 + 2a_1 y_4 y_6 + a_1\gamma'(y_3 y_4 + y_1 y_6) - 3a_2\gamma' y_6 \\ b_2 &= -4\gamma y_5 + 2a_1 y_5 y_6 + a_1\gamma'(y_3 y_5 + y_2 y_6) \\ b_3 &= -\frac{2}{\pi}\gamma y_4 + 2a_3(y_4^2 + \gamma y_1 y_4) + 8a_3(y_5^2 + \gamma y_2 y_5) + \gamma' y_6 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Таким образом, уравнение равновесия (4.1), соответствующее несимметричной форме второго члена разложения в методе Бубнова—Галеркина, также сведено к системе дифференциальных уравнений вида (2.10). Следовательно, задача определения $q_{кр}$ и в этом случае решается изложенным выше методом. Подробности опускаем.

Заключение

На основе теории устойчивости движения А. М. Ляпунова разработан для гибких тонкостенных конструкций метод определения критического значения $q_{кр}$ грузового параметра в условиях линейной ограниченной ползучести материала. Метод реализован на основе теории ползучести Маслова—Арутюняна, отмечается возможность его применения также и на основе различных известных линейных дифференциальных соотношений вязко-упругих материалов.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 11 IV 1980

Գ. Ս. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ ՆՅՈՒԹԻ ՍՈՂՔԻ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Բարակ, ճկուն, երկար, շրջանային, գլանաձև պանելի օրինակի վրա նյութի սահմանափակ գծային սողքի պայմաններում կրիտիկական բեռի որոշման համար առաջարկվում է շարժման կայունության Ա. Մ. Լյապունովի տեսության մի քանի թեորեմների վրա հիմնված մեթոդ։ Դիտարկվում են համաչափ և հակահամաչափ ձևերով կայունության կորստի Բուբնովի-Գալյորկինի մեթոդի երկրորդ մոտավորությունները։ Խնդիրը բերված է ածանցյալների նկատմամբ լուծված առաջին կարգի վեց դիֆերենցիալ հավասարումների ոչ գծային համակարգի մասնավոր լուծումների հաշվմանը ԷՀՄ-ով բեռի պարամետրի տրված փոքր քայլով աճող արժեքների համար։ Շարադրումը կատարվում է Մասլովի-Հարությունյանի սահմանափակ գծային սողքի տեսության հիման վրա, նշվում է մեթոդի կիրառման հնարավորությունը նաև առաձգական-մածուցիկ նյութի համար հայտնի այլ գծային դիֆերենցիալ առնչությունների ակնառումով։

Մեթոդի հիմունքները, պարզաբանված Բուբնովի-Գալյորկինի մեթոդի առաջին մոտավորությամբ, հրապարակված են 1962 և 1964 թթ.։

ON STABILITY IN CREEP

G. S. GRIGORIAN

S u m m a r y

A long, thin, shallow, flexible, circular cylindrical panel is used as an example to develop a method of stability calculation in linear limited creep based on some Lapunov's theorems of stability of motion. The second approximation of Bubnov—Galerkin method concerned with symmetric and antisymmetric forms of stability loss is considered. The problem is reduced to computerization of partial solutions of a nonlinear system of six first order ordinary differential equations solvable for derivatives, when the load parameter increases with a given small step and to verification of their Lapunov stability. The principles of the method, illustrated by a first step approximation of the Bubnov—Galerkin method, were published in 1962 and 1964.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ржаницын А. Р.* Процессы деформирования конструкций из неупругих элементов. ДАН СССР, 1956, т. 52, вып. 1.
2. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966.

3. *Прокопович Н. Е., Линник А. С.* О влиянии ограниченной нелинейной ползучести на устойчивость сжатых стержней. Стр. мех. и расчет сооружений, 1973, № 3.
4. *Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Г.* Об устойчивости неоднородно-стареющих вязко-упругих стержней. ПММ, 1979, т. 43, вып. 4.
5. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М., ГТТИ, 1950.
6. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М., ГТТИ, 1952.
7. *Kărmăn Th.* Festigkeitsprobleme im Maschinenbau, Enzykl. der math. Wiss. 1910, IV (4), 348—351.
8. *Сосоян А. С.* О некоторых закономерностях ползучести древесины. Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. наук, 1958, т. XI, № 2.
9. *Duglas Mc. Henry*, A new Aspect of Creep in Concrets and its Application to Design. ASTM, 1949, vol. 43, p. 1069—1087.
10. *Ржаницын А. Р.* Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени. М., ГТТИ, 1949.
11. *Панарин Н. Я.* Некоторые вопросы расчета армированного и неармированного бетона с учетом ползучести. Л.—М., 1957.
12. *Работнов Ю. Н.* Равновесие упругой среды с последействием. ПММ, 1948, т. XIII, вып. 1.
13. *Прокопович Н. Е., Малахова Н. А., Михеева Н. Р.* О возможности перехода к новым равновесным формам нелинейно-деформирующихся систем в условиях неустановившейся ползучести. Строит. мех. и расчет сооруж., 1977, № 5.
14. *Вольмир А. С.* Гибкие пластинки и оболочки. М., ГИТТЛ, 1956.
15. *Бленд Д.* Теория линейной вязко-упругости. Библиотека сб. «Механика», М., «Мир», 1965.
16. *Григорян Г. С.* а) К расчету прочности и устойчивости тонких железобетонных оболочек с учетом ползучести бетона. ЦНИИСК, Совещание по вопросам ползучести стр. материалов и конструкций (тезисы докл.), М., 1962.

б) К расчету прочности, жесткости и устойчивости гибких оболочек и стержней в условиях ползучести. Ползучесть строительных материалов и конструкций. Сб. тр. под ред. А. Р. Ржаницына. М., Стройиздат, 1964.

в) К расчету устойчивости в ограниченном интервале времени. Изв. АН Армянской ССР, серия физ.-мат. наук, 1965, т. XVIII, № 3.
17. *Вирпаусо П.* Устойчивость пологой арки при ограниченной ползучести материала. Стр. мех. и расчет сооруж., 1973, № 2.
18. *Персидский С. К.* а) Об устойчивости на конечном промежутке. Вести. АН Казахской ССР, 1959, вып. 9 (172).

б) Некоторые вопросы теории устойчивости движения. Канд. диссертация, МГУ, 1960.
19. *Арутюнян Н. Х.* а) Некоторые задачи теории ползучести для неоднородно-стареющих тел. Изв. АН СССР, МТТ, 1976, № 2.

б) О теории ползучести для неоднородно наследственно-стареющих сред. Докл. АН СССР, 1976, т. 229, № 3.