ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIV, № 1, 1981 Механика

Н. Н. РОГАЧЕВА

УТОЧНЕННАЯ ТЕОРИЯ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

На основе приближенного интегрирования [1] трехмерных уравнений пьезоупругости выводится уточненная линейная теория тонких пьезокерамических оболочек, равномерно поляризованных в нормальном к срединной поверхности направлении.

1. Рассмотрим произвольную пьезокерамическую оболочку.

Выберем триортогональную систему координат $\alpha_1, \alpha_2, \gamma$ следующим образом: пусть координатные линии α_1, α_2 совпадают с линиями главных кривизн срединной поверхности оболочки, а координатная линия γ им ортогональна.

Выпишем систему уравнений пьезоупругости в выбранных координатах.

Все используемые здесь обозначения, относящиеся к неэлектрическим величинам, взяты из [1], а обозначения, относящиеся к электроупругости и электростатике, заимствованы из [2], [3].

Уравнения движения

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial\tau_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_j}\frac{\partial\tau_{ij}}{\partial\alpha_j}+k_j(\tau_i-\tau_j)+k_i(\tau_{ij}+\tau_{ji})+$$

$$+\frac{1}{a_i}\frac{\partial}{\partial\gamma}(a_i^2\tau_{i3})-\rho\frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2}=0 \tag{1.1}$$

$$-\frac{\tau_1}{R_1}-\frac{\tau_2}{R_2}+\frac{1}{A_1}\frac{\partial\tau_{13}}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial\tau_{23}}{\partial\alpha_2}+k_2\tau_{13}+k_1\tau_{23}+\frac{\partial\tau_3}{\partial\gamma}-\rho\frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2}=0$$

Уравнения пьезоэффекта

$$\tau_i=\frac{1}{s_{11}^E(1-\nu^2)}\left(\frac{a_j}{a_i}e_i+\nu e_j\right)-\frac{s_{13}^E}{s_{11}^E}\frac{1}{1-\nu}\frac{\tau_3}{a_i}-\frac{d_{31}}{s_{11}^E}\frac{a_j}{1-\nu}E_3$$

$$\tau_{ij}=\frac{1}{s_{66}^E}\left(\frac{a_i}{a_j}m_i+m_j\right)$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial\gamma}=s_{13}^E\left(\frac{\tau_1}{a_2}+\frac{\tau_2}{a_1}\right)+s_{33}^E\frac{\tau_3}{a_1a_2}+d_{33}E_3 \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial\gamma}+\frac{g_i}{a_i}=s_{44}^E\frac{\tau_{i3}}{a_j}+d_{15}E_i$$

$$D_i = \varepsilon_{11}^T E_i + d_{15} \frac{\tau_{i3}}{a_j}$$

$$D_3 = \varepsilon_{33}^T E_3 + d_{31}\left(\frac{\tau_1}{a_2} + \frac{\tau_2}{a_1}\right) + d_{33}\frac{\tau_3}{a_1 a_2} \tag{1.2}$$

Уравнения вынужденной электростатики диэлектриков

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D} = 0, \qquad \boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} \psi \tag{1.3}$$

Здесь и далее из каждого равенства, содержащего индексы i и j, можно получить два различных — одно, полагая $i = 1$, $j = 2$, другое, полагая $i = 2$, $j = 1$.

В (1.1)—(1.2) для удобства дальнейших выкладок вместо симметричного тензора напряжений σ_i, σ_{ij}, σ_{i3}, σ_3 введен несимметричный тензор τ_i, τ_{ij}, τ_{i3}, τ_3 следующими формулами:

$$\tau_i = \left(1 + \frac{\gamma}{R_j}\right)\sigma_i, \quad \tau_{ij} = \left(1 + \frac{\gamma}{R_i}\right)\sigma_{ij}$$

$$\tau_{i3} = \tau_{3i} = \left(1 + \frac{\gamma}{R_j}\right)\sigma_{i3}, \quad \tau_3 = \left(1 + \frac{\gamma}{R_1}\right)\left(1 + \frac{\gamma}{R_2}\right)\sigma_3 \tag{1.4}$$

Для краткости записи в уравнениях (1.1), (1.2) введены обозначения, которые расшифровываются следующими формулами:

$$e_i = \frac{1}{A_i}\frac{\partial v_i}{\partial \alpha_i} + \frac{v_3}{R_i} - k_i v_j, \qquad m_i = \frac{1}{A_j}\frac{\partial v_i}{\partial \alpha_j} - k_j v_j$$

$$g_i = \frac{1}{A_i}\frac{\partial v_3}{\partial \alpha_i} - \frac{v_i}{R_i}, \quad a_i = 1 + \frac{\gamma}{R_i}, \quad k_i = \frac{1}{A_i}\frac{1}{A_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}, \quad \nu = -\frac{s_{12}^E}{s_{11}^E} \tag{1.5}$$

В предыдущих формулах v_i, v_3 — перемещения, A_i — коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности, R_i — ее главные радиусы кривизн, s_{11}^E, s_{12}^E, s_{13}^E, s_{33}^E, s_{44}^E — упругие податливости при нулевом электрическом поле, d_{31}, d_{15}, d_{33} — пьезоэлектрические постоянные, ε_{11}^T, ε_{33}^T — диэлектрические проницаемости при нулевых напряжениях, $\boldsymbol{E}$ — вектор напряженности электрического поля, $\boldsymbol{D}$ — вектор электрической индукции.

Для построения теории пьезокерамических оболочек надо рассмотреть краевую задачу, заключающуюся в интегрировании уравнений (1.1)—(1.3) с учетом условий на лицевых поверхностях $\gamma = \pm h$ для напряжений

$$\left.\frac{\tau_{i3}}{a_j}\right|_{\gamma=\pm h} = \pm q_i^{\pm}, \qquad \left.\frac{\tau_3}{a_1 a_2}\right|_{\gamma=\pm h} = \pm q_3^{\pm} \tag{1.6}$$

и условий для электрических величин. Различные варианты последних приведены в [4]. Например, в случае возбуждения колебаний электрическим полем на электродах, покрывающих лицевые поверхности оболочки, задается значение потенциала

$$\psi\big|_{\gamma=\pm h} = \pm V(t) \tag{1.7}$$

Если колебания вызываются механической нагрузкой и оболочка не имеет электродов, то условия на лицевых поверхностях записываются следующим образом (внешняя среда—вакуум или воздух):

$$D_3\big|_{\gamma=\pm h} = 0 \tag{1.8}$$

Чтобы получить условия на внешней поверхности оболочки, надо в (1.6)—(1.8) оставить только плюсы, условия на внутренней поверхности получаются, если взять минусы.

2. Для напряженно-деформированного состояния примем следующее асимптотическое представление:

$$\begin{gathered}
\frac{v_i}{s_{11}^E R} = \eta^{c} v_{i*}, \qquad \frac{v_3}{s_{11}^E R} = \eta^{c} v_{3*}, \qquad (\tau_i,\ \tau_{ij}) = (\tau_{i*},\ \tau_{ij*}) \\
\tau_{i3} = \eta^{1-s}\tau_{i3*}, \qquad \tau_3 = \eta^{1-c}\tau_{3*}, \qquad \frac{d_{31}}{s_{11}^E} E_3 = E_{3*} \\
\frac{d_{31}}{s_{11}^E} E_i = \eta^{1-s} E_{i*}, \qquad \frac{d_{31}}{s_{11}^E \varepsilon_{11}^T} D_i = \eta^{1-s} D_{i*} \\
\frac{d_{31}}{\varepsilon_{33}^T s_{11}^E} D_3 = D_{3*}, \qquad \frac{d_{31}}{s_{11}^E R}\psi = \eta^{1}\psi_*
\end{gathered} \tag{2.1}$$

где число c определяется формулой

$$c = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leqslant s \leqslant 1/2 \\ -1+2s & \text{при } 1/2 \leqslant s < 1 \end{cases}$$

Здесь η — относительная полутолщина оболочки, R — характерный радиус, s, согласно терминологии, принятой в [1],— показатель изменяемости внутреннего напряженного состояния.

Величины $v_{i*}, \ldots, \psi_*$ имеют одинаковый асимптотический порядок (при $\eta \to 0$) и одинаковую размерность.

Подтверждением принятой асимптотики служат физические соображения и тот факт, что с помощью (2.1) можно построить в первом приближении непротиворечивую систему дифференциальных уравнений.

Выполним в уравнениях пьезоупругости обычное для асимптотических методов растяжение масштаба по координатам

$$\alpha_i = \eta^s R \xi_i, \qquad \gamma = \eta^1 R \zeta, \qquad t = \eta^r \sqrt{\rho s_{11}^E}\,\tau \tag{2.2}$$

Здесь r — показатель изменяемости по времени.

Подставим (2.1), (2.2) в исходные уравнения (1.1)—(1.6), в результате получим

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial\tau_{i*}}{\partial\xi_i}+\frac{1}{A_j}\frac{\partial\tau_{ij*}}{\partial\xi_j}+\eta^s Rk_j(\tau_{i*}-\tau_{j*})+\eta^s Rk_i(\tau_{ij*}+\tau_{ji*})+$$

$$+\frac{1}{a_i}\frac{\partial}{\partial\zeta}(a_i^2\tau_{i3*})-\eta^{s-2r}\frac{\partial^2 v_{i*}}{\partial\tau^2}=0$$

$$-\eta^c R\left(\frac{\tau_{1*}}{R_1}+\frac{\tau_{2*}}{R_2}\right)+\eta^{1-2s+c}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial\tau_{13*}}{\partial\xi_1}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial\tau_{23*}}{\partial\xi_2}\right)+ \tag{2.3}$$

$$+\eta^{1-s+c}R(k_2\tau_{13*}+k_1\tau_{23*})+\frac{\partial\tau_{3*}}{\partial\zeta}-\eta^{s-2r+2c}\frac{\partial^2 v_{3*}}{\partial\tau^2}=0$$

$$\tau_{i*}=\frac{1}{1-\nu^2}\left(\frac{a_j}{a_i}e_{i*}+\nu e_j\right)-\eta^{1-c}\frac{s_{13}^E}{s_{11}^E(1-\nu)}\tau_{3*}-\frac{d_{31}a_j}{s_{11}^E(1-\nu)}E_{3*}$$

$$\tau_{ij*}=\frac{s_{11}^E}{s_{66}^E}\left(\frac{a_i}{a_j}m_{i*}+m_{j*}\right)$$

$$\frac{dv_{3*}}{d\zeta}=\eta^{2-2c}\frac{s_{33}^E}{s_{11}^E}\frac{1}{a_1a_2}\tau_{3*}+\eta^{1-c}\frac{s_{13}^E}{s_{11}^E}\left(\frac{\tau_{1*}}{a_2}+\frac{\tau_{2*}}{a_1}\right)+\eta^{1-c}\frac{d_{33}}{d_{31}}E_{3*}$$

$$\frac{dv_{i*}}{d\zeta}+\eta^{1-2s+c}\frac{g_{i*}}{a_i}=\eta^{2-2s}\frac{s_{44}^E}{s_{11}^E}\frac{\tau_{i3*}}{a_j}+\eta^{2-2s}\frac{d_{15}}{d_{31}}E_{i*} \tag{2.4}$$

$$D_{i*}=E_{i*}+\frac{d_{31}d_{15}}{s_{11}^E\varepsilon_{11}^T}\frac{\tau_{i3*}}{a_j}$$

$$D_{3*}=E_{3*}+\frac{d_{31}^2}{s_{11}^E\varepsilon_{33}^T}\left(\frac{\tau_{1*}}{a_2}+\frac{\tau_{2*}}{a_1}\right)+\eta^{1-c}\frac{d_{31}d_{33}}{\varepsilon_{33}^T s_{11}^E}\frac{\tau_{3*}}{a_1a_2}$$

$$\frac{\partial D_{3*}}{\partial\zeta}+\eta^{2-2s}\frac{\varepsilon_{11}^T}{\varepsilon_{33}^T}\left[\frac{1}{A_1}\frac{\partial D_{1*}}{d\xi_1}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial D_{2*}}{\partial\xi_2}+\eta^s R(k_1D_{2*}+k_2D_{1*})\right]=0$$

$$E_{3*}=-\frac{\partial\psi_*}{\partial\zeta},\qquad E_{i*}=-\frac{1}{A_i}\frac{\partial\psi_*}{\partial\xi_i} \tag{2.5}$$

$$e_{i*}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial v_{i*}}{\partial\xi_i}+\eta^s Rk_iv_{j*}+\eta^c\frac{R}{R_i}v_{3*},\qquad m_{i*}=\frac{1}{A_j}\frac{\partial v_{i*}}{\partial\xi_j}-\eta^s Rk_jv_{j*}$$

$$g_{i*}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial v_{3*}}{\partial\xi_i}-\eta^{2s-c}\frac{R}{R_i}v_{i*},\qquad a_i=1+\eta^c\zeta\frac{R}{R_i} \tag{2.6}$$

Так же, как в теории неэлектрических оболочек, в дальнейшем ограничимся значениями $r\leqslant c$ (случай $r>c$ требует специального рассмотрения).

3. Для того, чтобы трехмерные уравнения пьезоупругости приближенно свести к двумерным, выполним интегрирование уравнений (2.3)—(2.6) по ζ по схеме, изложенной в [1]. В полученных асимптотических разложениях будем отбрасывать члены порядка ε, где

$$\varepsilon = O(\eta^{2-2s}) \tag{3.1}$$

В результате интегрирования каждая из искомых величин (перемещения, напряжения, компоненты вектора напряженности электрического поля, компоненты вектора электрической индукции, разность потенциалов) будет представлена в виде полинома по ζ и остатка ряда, наибольшие члены которого — малые величины порядка η^{2-2s}

$$P = \sum_{l=0}^{n} \zeta^l a_l P_{\cdot l} + O(\eta^{2-2s}), \qquad a_0 = 1 \tag{3.2}$$

Наибольшие степени полиномов и коэффициенты a_l для различных величин задаются следующими формулами:

$$\begin{aligned}
&n=1, \quad a_1 = \eta^{1-2s+c} && \text{для} \quad v_{i*},\ e_{i*},\ m_{i*},\ E_{3*},\ \tau_{i*},\ \tau_{ij*} \\
&n=1, \quad a_1 = \eta^{1-c} && \text{для} \quad v_{3*},\ g_{i*} \\
&n=2, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = \eta^{1-2s+c} && \text{для} \quad E_{i*},\ \tau_{i3*},\ D_{i*},\ \psi_* \\
&n=3, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = \eta^{1-2s+c}, \quad a_3 = \eta^{2-4s+2c} && \text{для} \quad \tau_{3*} \\
&n=0 && \text{для} \quad D_{3*}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Подставим (3.2), (3.3) в уравнения (2.3)—(2.6). После приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ζ получим систему дифференциальных уравнений, которая содержит 50 уравнений и столько же неизвестных.

Так как уравнения равновесия пьезокерамической оболочки имеют обычный вид, выпишем здесь только уравнения состояния и уравнения вынужденной электростатики

$$\tau_{i,0} = \frac{1}{1-\nu^2}(e_{i,0} + \nu e_{j,0}) + \eta^{1-c}\frac{s_{13}^E}{s_{11}^E}\frac{1}{1-\nu}\tau_{3,0} - \frac{1}{1-\nu}E_{3,0}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{i,1} = \frac{1}{1-\nu^2}\left[e_{i,1} + \nu e_{j,1} + \eta^{2s-c}\left(\frac{R}{R_j} - \frac{R}{R_i}\right)e_{i,0}\right] + \\
+ \eta^{2s-2c}\frac{s_{13}^E}{s_{11}^E}\frac{1}{1-\nu}\tau_{3,1} - \frac{1}{1-\nu}E_{3,1} - \eta^{2s-c}\frac{R}{R_j}\frac{1}{1-\nu}E_{3,0}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\tau_{ij} = \frac{s_{11}^E}{s_{66}^E}(m_{i,0} + m_{j,0})$$

$$\tau_{ij,1} = \frac{s_{11}^E}{s_{66}^E}\left[m_{i,1} + m_{j,1} + \eta^{2s-c}\left(\frac{R}{R_i} - \frac{R}{R_j}\right)m_{i,0}\right]$$

$$v_{3,1} = \frac{s_{13}^E}{s_{11}^E}(\tau_{1,0} + \tau_{2,0}) + \frac{d_{33}}{d_{31}} E_{3,0}$$

$$v_{i,1} = -g_{i,0}$$

$$D_{i,0} = E_{i,0} + \frac{d_{31}d_{15}}{s_{11}^E \varepsilon_{11}^T} \tau_{i3,0}$$

$$D_{i,1} = E_{i,1} + \frac{d_{31}d_{15}}{s_{11}^E \varepsilon_{11}^T}\left(\tau_{i3,1} - \eta_i^1 \frac{R}{R_j}\tau_{i3,0}\right)$$

$$D_{i,2} = E_{i,2} + \frac{d_{31}d_{15}}{s_{11}^E \varepsilon_{11}^T}\left(\tau_{i3,2} - \eta_i^{2s-c} \frac{R}{R_j}\tau_{i3,1}\right)$$

$$D_{3,0} = E_{3,0} + \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E \varepsilon_{33}^T}(\tau_{1,0} + \tau_{2,0}) + \eta_i^{1-c} \frac{d_{32}d_{33}}{\varepsilon_{33}^T s_{11}^E}\tau_{3,0}$$

$$E_{3,1} + \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E \varepsilon_{33}^T}\left[\tau_{1,1} + \tau_{2,1} - \eta_i^{2s-c} R\left(\frac{\tau_{1,0}}{R_2} + \frac{\tau_{2,0}}{R_1}\right) + \eta_i^{2s-2c}\tau_{3,1}\right] = 0 \tag{3.4}$$

$$E_{3,0} = -\psi_{,1}, \quad E_{3,1} = -2\psi_{,2}, \quad E_{i,k} = -\frac{1}{A_i}\frac{\partial \psi_{,k}}{\partial \xi_i} \quad (k = 0, 1, 2)$$

$$\tau_{i3,0} + \eta_i^{1-2s+c}\tau_{i3,2} = \frac{1}{2}\left[q_i^+ - q_i^- + \eta_i^1 \frac{R}{R_j}(q_i^+ + q_i^-)\right]$$

$$\tau_{i3,1} = \frac{1}{2}\left[q_i^+ + q_i^- + \eta_i^1 \frac{R}{R_j}(q_i^+ - q_i^-)\right]$$

$$\tau_{3,0} + \eta_i^{1-2s+c}\tau_{3,2} = \frac{1}{2}\left[q_3^+ - q_3^- + \eta_i^1\left(\frac{R}{R_1} + \frac{R}{R_2}\right)(q_3^+ + q_3^-)\right]$$

$$\tau_{3,1} + \eta_i^{2-4s+2c}\tau_{3,3} = \frac{1}{2}\left[q_3^+ + q_3^- + \eta_i^1\left(\frac{R}{R_1} + \frac{R}{R_2}\right)(q_3^+ - q_3^-)\right]$$

Величины $e_{i,0}$, $g_{i,0}$, $m_{i,0}$, $m_{i,1}$ расшифровываются по формулам (2.6), в которых звездочку следует заменить нуликом или единицей соответственно, а для $e_{i,1}$ и $g_{i,1}$ имеют место следующие формулы:

$$e_{i,1} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial v_{i,1}}{\partial \xi_i} + \eta_i^s R k_i v_{j,1} + \eta_i^{2s-c} R \frac{v_{3,1}}{R_i}$$

$$g_{i,1} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial v_{3,1}}{\partial \xi_i} - \eta_i^c R \frac{v_{i,1}}{R_i} \tag{3.5}$$

4. Перейдем в полученных уравнениях к принятым в теории оболочек обозначениям.

Перемещения срединной поверхности оболочки u_i, w связаны с трехмерными перемещениями v_i, v_3 с учетом (2.1), (3.2), (3.3) следующим образом:

$$u_i = v_i\big|_{\zeta=0} = \eta^s R s_{11}^E v_{i,0}, \qquad w = -v_3\big|_{\zeta=0} = -\eta^c R s_{11}^E v_{3,0} \tag{3.6}$$

Усилия и моменты выражаются через напряжения с учетом формул (2.1), (3.2), (3.3) так:

$$T_i = \int_{-h}^{+h} \tau_i \, d\gamma = 2h\tau_{i,0}, \qquad S_{ij} = \int_{-h}^{+h} \tau_{ij} \, d\gamma = 2h\tau_{ij,0}$$

$$G_i = -\int_{-h}^{+h} \tau_i \gamma \, d\gamma = -\frac{2h^3}{3}\eta^{1-2s+c}\tau_{i,1} \tag{3.7}$$

$$H_{ij} = \int_{-h}^{h} \tau_{ij}\gamma \, d\gamma = \frac{2h^2}{3}\eta^{1-2s+c}\tau_{ij,1}$$

Опуская громоздкие, но простые выкладки, выпишем некоторые промежуточные результаты

$$e_{i,0} = \frac{1}{s_{11}^E}\varepsilon_i, \qquad m_{i,0} = \frac{1}{s_{11}^E}\omega_j$$

$$g_{i,0} = \eta^{s-c}\frac{1}{s_{11}^E}\gamma_i, \qquad v_{i,1} = -\eta^{s-c}\frac{1}{s_{11}^E}\gamma_i \tag{3.8}$$

$$v_{3,1} = \frac{s_{13}^E}{s_{11}^E(1-\nu)}(e_{i,0} + e_{j,0}) + \left[\frac{d_{33}}{d_{31}} - \frac{2s_{13}^E}{s_{11}^E(1-\nu)}\right]E_{3,0}$$

После преобразования формул (3.4) с помощью (3.6)—(3.8) получим следующие соотношения:

уравнения состояния пьезоупругих оболочек

$$T_i = \frac{2h}{s_{11}^E(1-\nu^2)}(\varepsilon_i + \nu\varepsilon_j) - \frac{2hd_{31}}{s_{11}^E(1-\nu)}E_3^{(0)} + \left[\frac{hs_{13}^E}{s_{11}^E(1-\nu)}(q_3^+ - q_3^-)\right]$$

$$S_{ij} = \frac{2h}{s_{66}^E}\omega, \qquad H_{ij} = \frac{4h^3}{3s_{66}^E}\left(\tau - \frac{\omega}{2R_i}\right)$$

$$\begin{aligned} G_i = {}& -\frac{2h^3}{3s_{11}^E(1-\nu^2)}(\varkappa_i + \nu\varkappa_j) + \frac{2h^3}{3(1-\nu)}\frac{d_{31}}{s_{11}^E}E_3^{(1)} + \\ & + \frac{2h^3}{3s_{11}^E(1-\nu^2)}\left[\left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_j}\right)\varepsilon_i + \frac{s_{13}^E}{s_{11}^E(1-\nu)}\left(\frac{1}{R_i} + \frac{\nu}{R_j}\right)(\varepsilon_i + \varepsilon_j) + \right. \\ & + \left(d_{33} - \frac{2s_{13}^E d_{31}}{(1-\nu)s_{11}^E}\right)\left(\frac{1}{R_i} + \frac{\nu}{R_j}\right)E_3^{(0)} - \frac{d_{31}(1+\nu)}{R_j}E_3^{(0)} + \\ & \left. + \frac{s_{13}^E(1+\nu)}{2h}(q_3^+ + q_3^-)\right] \end{aligned} \tag{3.9}$$

Для электрических величин имеют место следующие формулы:

$$E_3 = E_3^{(0)} + \gamma E_3^{(1)}, \qquad E_i = E_i^{(0)} + \gamma E_i^{(1)} + \gamma^2 E_i^{(2)}, \qquad D_3 = D_3^{(0)}$$
$$D_i = D_i^{(0)} + \gamma D_i^{(1)} + \gamma^2 D_i^{(2)}, \qquad \psi = \psi^0 + \gamma\psi^1 + \gamma^2\psi^{(2)} \tag{3.10}$$

где

$$\frac{2h^3}{3} E_3^{(1)} = \frac{d_{31}}{\varepsilon_{33}^T}(G_1 + G_2) + \left[\frac{d_{31}}{\varepsilon_{11}^T}\frac{h^2}{3}\left(\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2}\right) - \frac{h^2}{3}\frac{d_{33}}{\varepsilon_{33}^T}(q_3^+ + q_3^-)\right]$$

$$E_3^{(0)} = -\psi^{(1)}, \qquad E_3^{(1)} = -2\psi^{(2)}, \qquad E_i = -\frac{1}{A_i}\frac{\partial\psi^{(k)}}{\partial\alpha_i} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2)$$

$$D_3^{(0)} = \varepsilon_{33}^T E_3^{(0)} + \frac{d_{31}}{2h}(T_1 + T_2) + \left[\frac{d_{33}}{2}(q_3^+ - q_3^-)\right] \tag{3.11}$$

$$D_i^{(0)} = \varepsilon_{11}^T E_i^{(0)} + \frac{3d_{15}}{2h} N_i - d_{15}(q_i^+ - q_i^-)$$

$$D_i^{(1)} = \varepsilon_{11}^T E_i^{(1)} + \frac{d_{15}}{2h}(q_i^+ + q_i^-) - \left[\frac{d_{15}}{2R_j}(q_i^+ - q_i^-)\right]$$

$$D_i^{(2)} = \varepsilon_{11}^T E_i^{(2)} - \frac{3d_{15}}{2h^3} N_i + \frac{3d_{15}}{2h^2}(q_i^+ - q_i^-) - \left[\frac{d_{15}}{2hR_j}(q_i^+ + q_i^-)\right]$$

Члены, заключенные в квадратные скобки, малы. Они порядка η^1 по сравнению с главными членами. Если ими пренебречь, то получим соотношения электроупругости, совпадающие с приведенными в [3] и имеющими погрешность $O(\eta^1)$.

Так же, как для неэлектрических оболочек [1], точность (3.1) является предельной в рамках гипотез Кирхгофа—Лява (если составить более точные двумерные уравнения, то повысится порядок системы дифференциальных уравнений, потребуется учет поперечных сдвигов и других малых величин, которыми пренебрегают в теориях типа Лява).

Уравнения равновесия вместе с соотношениями электроупругости (3.9), формулами (3.10), (3.11) и краевыми условиями составляют полную систему.

Опишем схему расчета пьезокерамической оболочки в случае условий для электрических величин (1.7), (1.8).

Из условия (1.7) и формул (3.10), (3.11) найдем, что

$$E_3^{(0)} = -\psi^{(1)} = -V \tag{3.12}$$

где V — известная величина.

Из условия (1.8) и формулы (3.11) для $D_3^{(0)}$ найдем, что

$$E_3^{(0)} = -\frac{d_{31}}{2h\varepsilon_{33}^T}(T_1 + T_2) - \frac{d_{33}}{2\varepsilon_{33}^T}(q_3^+ - q_3^-) \tag{3.13}$$

Подставим в уравнения состояния (3.9) вместо $E_3^{(0)}$ его значение (3.12) или (3.13), соответствующее рассматриваемому случаю, и исключим из соотношений электроупругости для изгибающих моментов $E_3^{(1)}$ с помощью первой формулы (3.11). В результате получим соотношения упругости (3.9) почти такого же вида, как в обычной теории оболочек. Различие заключается в смысле коэффициентов, стоящих перед компонентами деформаций. Проинтегрировав преобразованные таким образом уравнения состояния совместно с уравнениями равновесия, формулами деформации-смещения, удовлетворив механическим граничным условиям на краях оболочки, найдем усилия, моменты, перемещения.

После того как решена механическая задача, все электрические величины можно вычислить с помощью алгебраических действий над уже найденными усилиями и моментами.

Автор благодарит А. Л. Гольденвейзера за постоянное внимание к работе и ценные консультации.

Институт проблем механики
АН СССР

Поступила 31 III 1980

Ն. Ն. ՌՈԳԱՉԵՎԱ

ՊՅԵԶՈԿԵՐԱՄԻԿ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՃՇԳՐՏՎԱԾ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է էլեկտրաառաձգական դեֆորմացված վիճակ, որն առաջանում է պյեզոկերամիկ թաղանթներում մեխանիկական և էլեկտրական բեռնավորման տարբեր պայմանների ժամանակ։

Ա. Լ. Գոլդենվեյզերի կողմից մշակված փոքր պարամետրով հավասարումների սիստեմի մոտավոր ինտեգրման մեթոդով պյեզոառաձգականության եռաչափ հավասարումները բերվում են պյեզոկերամիկ թաղանթների երկչափ հավասարումներին։ Կառուցված հավասարումների սիստեմը, ինչպես և Կիրխհոֆ-Լյավի տիպի տեսությունների հավասարումները, ունի ութերորդ կարգ։ Ճշգրտումը հնարավոր է դառնում ուղղահայացի երկարացման և միջին մակերևույթին ուղղահայաց լարումների հաշվառման հաշվին։ Պյեզոկերամիկ թաղանթների համար, որոնք որպես օրենք ունեն միջին հաստություն, ճշտության այդպիսի բարձրացումը շատ էական է և նա ստացվում է էլեկտրաառաձգականության հավասարումների ոչ մեծ բարդացման գնով։

THE REFINED THEORY OF PIEZOCERAMIC SHELLS

N. N. ROGACHOVA

S u m m a r y

Electroelastic deformation of piezoceramic shells under different conditions of mechanical and electrical loading is considered.

Reduction of three-dimensional equations of piezoelasticity to two-dimensional equations of piezoceramic shells is performed, making use of Gol'denveizer's method of approximate integration of systems of differential equations with a small parameter. A system of the eighth order is obtained the same as in Kirchhoff—Love's theories. The refinement consists in taking into account the change in length of the normal as well as the effect of stresses in the direction of the normal to the middle surface. For piezoceramic shells, which usually have a moderate thickness, that approach is essential and it can be achieved by means of a generalization of the equations of piezoelasticity.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М., «Наука», 1976.
2. Методы и приборы ультразвуковых исследований. Под ред. У. Мэзона, М., «Мир», 1966.
3. *Борисейко В. А., Гринченко В. Т., Улитко А. Ф.* Соотношения электроупругости для пьезокерамических оболочек вращения. Прикл. механика, 1976, т. XII, № 2.
4. *Улитко А. Ф.* К теории колебания пьезокерамических тел. В кн. «Тепловые напряжения в элементах конструкций», 15. К., «Наукова думка», 1975.