

Л. В. АБРАМЯН

К УСТОЙЧИВОСТИ ОРТОТРОПНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ СМЕШАННЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

В настоящей работе рассматривается устойчивость равномерно сжатой в одном направлении ортотропной прямоугольной пластинки с конечной сдвиговой жесткостью при следующих граничных условиях: стороны, к которым приложены усилия, свободно оперты, а на двух других заданы смешанные граничные условия: часть кромки закреплена, а остальная часть шарнирно оперта.

Подобные задачи для изотропной пластинки без учета поперечных сдвигов рассматривались в работах [1], [2].

1. Уравнения устойчивости ортотропной пластинки конечной сдвиговой жесткости имеют вид [3]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{12P}{h^3} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

$$\left[ B_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y^2} \right] w - \frac{h^2}{10} \left[ a_{35} \left( B_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + B_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \varphi + a_{44} (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right] + \varphi = 0 \quad (1.1)$$

$$\left[ B_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^2}{\partial y \partial x^2} \right] w - \frac{h^2}{10} \left[ a_{44} \left( B_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \psi + a_{35} (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right] + \psi = 0$$

Здесь сохранены обозначения [3].

Имеем следующие граничные условия (фиг. 1):

на краях  $x = 0, a$

$$w = \psi = 0 \quad (1.2)$$

$$M_x = -D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{h^2}{10} \left( a_{35} D_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + a_{44} D_{12} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0$$

на краях  $y = \pm b$

$$w = \varphi = \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{при } 0 \leq x \leq c$$

$$w = \varphi = 0 \quad \text{при } c < x \leq a \quad (1.3)$$

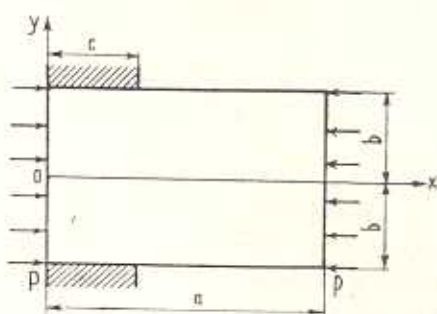
$$M_y = -D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{h^2}{10} \left( a_{44} D_{22} \frac{\partial \psi}{\partial y} + a_{55} D_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = 0$$

Решение системы (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2), ищем в виде рядов

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} W_m(y) \sin \frac{m\pi}{a} x$$

$$\varphi = \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(y) \cos \frac{m\pi}{a} x \quad (1.4)$$

$$\psi = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m(y) \sin \frac{m\pi}{a} x$$



Фиг. 1.

Подставляя (1.4) в (1.1) и исключая функции  $\Phi_m(y)$  и  $\psi_m(y)$ , приходим к следующему дифференциальному уравнению для  $W_m(y)$ :

$$\begin{aligned} h^2 W_m^{VI}(y) + \left\{ h^2 \lambda^2 \left[ -\frac{a_{44}}{a_{55}} - \frac{B_{11}}{B_{66}} + \frac{B_{12}}{B_{22}} \left( 2 + \frac{B_{12}}{B_{66}} \right) \right] - \frac{10}{a_{55} B_{66}} + \right. \\ \left. + \frac{12P\lambda^2 h a_{44}}{10} \right\} W_m^{IV}(y) + \lambda^2 \left\{ h^2 \lambda^2 \left[ \frac{a_{44}}{a_{55}} \left[ \frac{B_{11}}{B_{66}} - \frac{B_{12}}{B_{22}} \left( 2 + \frac{B_{12}}{B_{66}} \right) \right] + \frac{B_{11}}{B_{22}} \right] + \right. \\ \left. + \frac{20}{a_{55} B_{22}} \left( 2 + \frac{B_{12}}{B_{66}} \right) - \frac{12P}{h^2} \left[ \frac{a_{44} h^4 \lambda^2}{10} \left[ \frac{B_{11}}{B_{66}} - \frac{B_{12}}{B_{22}} \left( 2 + \frac{B_{12}}{B_{66}} \right) \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{h^2}{B_{22}} \left( 1 + \frac{a_{44}}{a_{55}} \frac{B_{22}}{B_{66}} \right) \right] \right\} W_m^{II}(y) + \frac{\lambda^2}{a_{55} B_{22} B_{66}} (10 + h^2 \lambda^2 a_{44} B_{66}) \left[ -B_{11} \lambda^2 + \right. \\ \left. + \frac{12P}{10h^2} (10 + h^2 \lambda^2 B_{11} a_{55}) \right] W_m(y) = 0 \quad (1.5) \end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{m\pi}{a}$$

Учитывая, что в уравнении (1.5) участвуют лишь четные производные, характеристическое уравнение представим в виде ( $W_m(y) = e^{\omega y}$ )

$$Z^3 + a_1 Z^2 + a_2 Z + a_3 = 0 \quad (1.6)$$

где

$$Z = h^2 \omega^2 \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned}
 a_1 &= -\frac{10}{a_{55} B_{66}} \mu \left[ \frac{a_{44}}{a_{55}} + \frac{B_{11}}{B_{66}} - \frac{B_{12}}{B_{22}} \left( 2 + \frac{B_{12}}{B_{66}} \right) - \frac{12P a_{44}}{10h} \right] \\
 a_2 &= \mu \left[ \frac{20}{a_{55} B_{22}} \left( 2 + \frac{B_{12}}{B_{66}} \right) + \mu \left\{ \frac{B_{11}}{B_{22}} + \frac{a_{44}}{a_{55}} \left[ \frac{B_{11}}{B_{66}} - \frac{B_{12}}{B_{22}} \left( 2 + \frac{B_{12}}{B_{66}} \right) \right] \right\} \right] - \\
 &\quad - \frac{12P}{h} \left\{ \frac{\mu a_{44}}{10} \left[ \frac{B_{11}}{B_{66}} - \frac{B_{12}}{B_{22}} \left( 2 + \frac{B_{12}}{B_{66}} \right) \right] + \frac{1}{B_{22}} \left( 1 + \frac{a_{44}}{a_{55}} \frac{B_{22}}{B_{66}} \right) \right\} \\
 a_3 &= \mu \frac{B_{11}}{a_{55} B_{22} B_{66}} \left( 10 + \mu a_{44} B_{66} \right) \left[ \frac{12P}{10h B_{11}} (10 + \mu B_{11} a_{55}) - \mu \right] \\
 \mu &= h^2 \gamma^2
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

При фиксированных значениях  $P$  и упругих коэффициентов характер корней уравнения (1.6) находится в зависимости от числа полуволн  $m$ . Численное исследование показывает, что при этом возможны три случая:

а)  $1 \leq m \leq m_1$ , один из корней уравнения (1.6) отрицательный, а два других — положительные. Этот вариант для случая неупругой прямоугольной пластинки с однородными граничными условиями подробно исследован в работе [4];

б)  $m_1 < m \leq m_2$ , все три корня положительные;

в)  $m > m_2$ , действительный корень — положительный, а два других — комплексно-сопряженные.

Понятно, что  $m_1$  и  $m_2$  в зависимости от геометрических и физических параметров пластинки принимают различные значения.

Общие решения (1.5) для каждого из перечисленных случаев будут:

$$\begin{aligned}
 \text{а) } W_m(y) &= C_m^{(1)} \sin \omega_1 y + C_m^{(2)} \cos \omega_1 y + C_m^{(3)} \operatorname{sh} \omega_2 y + \\
 &\quad + C_m^{(4)} \operatorname{ch} \omega_2 y + C_m^{(5)} \operatorname{sh} \omega_3 y + C_m^{(6)} \operatorname{ch} \omega_3 y
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

где

$$\begin{aligned}
 \omega_1 &= \frac{\sqrt{-Z_1}}{h} = \frac{1}{h} \left[ 2 \sqrt{-\frac{\xi}{3}} \cos \left( \frac{\vartheta}{3} - \frac{\pi}{3} \right) + \frac{a_1}{3} \right]^{1/2} \\
 \omega_2 &= \frac{\sqrt{Z_2}}{h} = \frac{1}{h} \left[ -2 \sqrt{-\frac{\xi}{3}} \cos \left( \frac{\vartheta}{3} + \frac{\pi}{3} \right) - \frac{a_1}{3} \right]^{1/2} \\
 \omega_3 &= \frac{\sqrt{Z_3}}{h} = \frac{1}{h} \left[ 2 \sqrt{-\frac{\xi}{3}} \cos \frac{\vartheta}{3} - \frac{a_1}{3} \right]^{1/2}, \quad \xi = a_2 - \frac{a_1^2}{3} \\
 q &= 2 \left( \frac{a_1}{3} \right)^3 - \frac{a_1 a_2}{3} + a_3, \quad \cos \vartheta = -\frac{q}{2 \sqrt{-\left( \frac{\xi}{3} \right)^3}}
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

$$6) W_m(y) = C_m^{(1)} \operatorname{sh} \omega_1 y + C_m^{(2)} \operatorname{ch} \omega_1 y + C_m^{(3)} \operatorname{sh} \omega_2 y + \\ + C_m^{(4)} \operatorname{ch} \omega_2 y + C_m^{(5)} \operatorname{sh} \omega_3 y + C_m^{(6)} \operatorname{ch} \omega_3 y \quad (1.11)$$

где  $\omega_2$  и  $\omega_3$ , как и в случае а), принимают значения (1.10), а  $\omega_1$  будет:

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{Z_1}}{h} = \frac{1}{h} \left[ -2 \sqrt{-\frac{\xi}{3}} \cos\left(\frac{\delta}{3} - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{a_1}{3} \right]^{1/4} \quad (1.12)$$

$$в) W_m(y) = C_m^{(1)} \operatorname{sh} \omega_1 y + C_m^{(2)} \operatorname{ch} \omega_1 y + (C_m^{(3)} \cos ty + C_m^{(4)} \sin ty) \operatorname{ch} sy + \\ + (C_m^{(5)} \cos ty + C_m^{(6)} \sin ty) \operatorname{sh} sy \quad (1.13)$$

где

$$\omega_1 = \frac{1}{h} \sqrt{-2z - a_1} \quad (1.14)$$

$$s = \frac{1}{h} \left[ \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \eta^2}}{2} \right]^{1/4}, \quad t = \frac{1}{h} \frac{\eta}{|2(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \eta^2})|^{1/4}}$$

здесь  $\alpha$  и  $\eta$  определяются следующим образом:

при  $\xi > 0$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\xi}{3}} \operatorname{ctg} 2\delta - \frac{a_1}{3}, \quad \eta = \sqrt{\xi} \operatorname{cosec} 2\delta$$

$$\operatorname{tg} \delta = \sqrt[3]{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{2}{q} \sqrt{\left(\frac{\xi}{3}\right)^3}$$

при  $\xi < 0$

$$\alpha = \sqrt{-\frac{\xi}{3}} \operatorname{cosec} 2\delta - \frac{a_1}{3}, \quad \eta = \sqrt{-\xi} \operatorname{ctg} 2\delta$$

$$\operatorname{tg} \delta = \sqrt[3]{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}, \quad \sin x = \frac{2}{q} \sqrt{\left(-\frac{\xi}{3}\right)^3}$$

В дальнейшем, при определении критических усилий из бесконечных систем уравнений (1.25), вполне достаточно оставить столько уравнений, число которых меньше, чем  $m_c$ . Только поэтому формулы для случая  $m > m_c$  не приводятся.

Имея выражения  $W_m(y)$ , для определения  $\Phi_m(y)$  и  $\psi_m(y)$  получаем неоднородные дифференциальные уравнения. Не вдаваясь в подробности, приводим общие решения этих уравнений:

$$а) \Phi_m(y) = C_m^{(1)} A_1 \sin \omega_1 y + C_m^{(2)} A_1 \cos \omega_1 y + \Phi_m^1(y) \\ \psi_m(y) = -C_m^{(1)} B_1 \cos \omega_1 y + C_m^{(2)} B_1 \sin \omega_1 y + \psi_m^1(y) \quad (1.15) \\ б) \Phi_m(y) = C_m^{(1)} A_1' \operatorname{sh} \omega_1 y + C_m^{(2)} A_1' \operatorname{ch} \omega_1 y + \Phi_m^1(y) \\ \psi_m(y) = C_m^{(1)} B_1' \operatorname{ch} \omega_1 y + C_m^{(2)} B_1' \operatorname{sh} \omega_1 y + \psi_m^1(y)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Phi_m^I(y) &= C_m^{(2)} A_2 \operatorname{sh} \omega_2 y + C_m^{(4)} A_2 \operatorname{ch} \omega_2 y + C_m^{(5)} A_3 \operatorname{sh} \omega_3 y + C_m^{(6)} A_3 \operatorname{ch} \omega_3 y \\ \psi_m^I(y) &= C_m^{(3)} B_2 \operatorname{ch} \omega_2 y + C_m^{(4)} B_2 \operatorname{sh} \omega_2 y + C_m^{(5)} B_3 \operatorname{ch} \omega_3 y + C_m^{(6)} B_3 \operatorname{sh} \omega_3 y \\ A_2 &= \frac{-g_0 + g_1 \omega_1^2}{-G_0 + G_1 \omega_1^2}, \quad A_1 = \frac{g_0 + g_1 \omega_1^2}{G_0 + G_1 \omega_1^2}, \quad A_3 = \frac{g_0 + g_1 \omega_3^2}{G_0 + G_1 \omega_3^2} \\ A_3 &= \frac{g_0 + g_1 \omega_3^2}{G_0 + G_1 \omega_3^2}, \quad B_i = \frac{\lambda}{\omega_i} \left( A_i - \frac{12P\lambda}{h^2} \right) \quad (i=1, 2, 3) \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$g_0 = \left[ \frac{12Pa_{44}}{10h} \left( \frac{B_{12} + B_{66}}{B_{66}} \right) - \frac{B_{11}}{B_{66}} \right] \nu^0, \quad g_1 = h^2 \nu^0 \frac{B_{12} + 2B_{66}}{B_{66}}$$

$$G_0 = -\frac{a_{55} h^2}{10} \left[ \frac{10}{a_{55} B_{66}} + \nu \left( \frac{B_{11}}{B_{66}} - \frac{a_{44}}{a_{55}} \frac{B_{12} + B_{66}}{B_{66}} \right) \right], \quad G_1 = \frac{a_{55} h^2}{10}$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.3), для коэффициентов  $C_m^{(1)}$  и  $C_m^{(2)}$  получаем следующие системы уравнений:

1) для асимметричных форм потери устойчивости

$$\begin{aligned} &\sum_{m=1}^{m_1} C_m^{(1)} \frac{\sin \omega_1 b}{A_2 - A_1} [(A_2 - A_1) (\omega_2 \operatorname{cth} \omega_2 b - \omega_2 \operatorname{cth} \omega_2 b) + \\ &\quad + (A_2 - A_2) (\omega_1 \operatorname{ctg} \omega_1 b - \omega_2 \operatorname{cth} \omega_2 b)] \sin \frac{m\pi}{a} x + \\ &\quad + \sum_{m=m_1+1}^{m_2} C_m^{(1)} \frac{\operatorname{sh} \omega_1 b}{A_2 - A_2} [(A_2 - A_1) (\omega_2 \operatorname{cth} \omega_2 b - \omega_2 \operatorname{cth} \omega_2 b) + \\ &\quad + (A_2 - A_2) (\omega_1 \operatorname{cth} \omega_1 b - \omega_2 \operatorname{cth} \omega_2 b)] \sin \frac{m\pi}{a} x + \sum_{m=m_2+1}^{\infty} \dots = 0 \\ &\quad (0 \leq x \leq c) \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} &\sum_{m=1}^{m_1} C_m^{(1)} \frac{\sin \omega_1 b}{A_2 - A_2} [(A_2 - A_1) (M_2 - M_2) + (A_2 - A_2) (M_1 - M_2)] \sin \frac{m\pi}{a} x + \\ &\quad + \sum_{m=m_1+1}^{m_2} C_m^{(1)} \frac{\operatorname{sh} \omega_1 b}{A_2 - A_2} [(A_2 - A_1) (M_2 - M_2) + \\ &\quad + (A_2 - A_2) (M_1 - M_2)] \sin \frac{m\pi}{a} x + \dots = 0 \\ &\quad (c < x \leq 0) \end{aligned}$$

2) для симметричных форм потери устойчивости

$$\sum_{m=1}^{m_1} C_m^{(2)} \frac{\cos \omega_1 b}{A_3 - A_2} [(A_2 - A_1)(\omega_3 \operatorname{th} \omega_3 b - \omega_2 \operatorname{th} \omega_2 b) - (A_3 - A_2)(\omega_1 \operatorname{tg} \omega_1 b + \\ + \omega_2 \operatorname{th} \omega_2 b)] \sin \frac{m\pi}{a} x + \sum_{m=n_1+1}^{m_2} C_m^{(2)} \frac{\operatorname{ch} \omega_1 b}{A_3 - A_2} [(A_2 - A_1)(\omega_3 \operatorname{th} \omega_3 b - \omega_2 \operatorname{th} \omega_2 b) + \\ + (A_3 - A_2)(\omega_1 \operatorname{th} \omega_1 b - \omega_2 \operatorname{th} \omega_2 b)] \sin \frac{m\pi}{a} x + \dots = 0 \\ (0 \leq x \leq c) \quad (1.18)$$

$$\sum_{m=1}^{m_1} C_m^{(2)} \frac{\cos \omega_1 b}{A_2 - A_1} [(A_2 - A_1)(M_3 - M_1) + (A_3 - A_2)(M_1 - M_2)] \sin \frac{m\pi}{a} x + \\ + \sum_{m=m_1+1}^{m_2} C_m^{(2)} \frac{\operatorname{ch} \omega_1 b}{A_3 - A_2} [(A_2 - A_1)(M_3 - M_2) + \\ + (A_3 - A_2)(M_1 - M_2)] \sin \frac{m\pi}{a} x + \dots = 0 \\ (c \leq x \leq a)$$

где

$$M_1 = D_{22}\omega_1^2 + \frac{h^2}{10} (a_{44}D_{22}B_1\omega_1 - \lambda a_{55}D_{12}A_1) \\ M_1' = -D_{22}\omega_1^2 + \frac{h^2}{10} (a_{44}D_{22}B_1\omega_1 - \lambda a_{55}D_{12}A_1) \\ M_2 = -D_{22}\omega_2^2 + \frac{h^2}{10} (a_{44}D_{22}B_2\omega_2 - \lambda a_{55}D_{12}A_2) \\ M_3 = -D_{22}\omega_3^2 + \frac{h^2}{10} (a_{44}D_{22}B_3\omega_3 - \lambda a_{55}D_{12}A_3) \quad (1.19)$$

а для коэффициентов  $C_m^{(3)}$ ,  $C_m^{(4)}$ ,  $C_m^{(5)}$ ,  $C_m^{(6)}$  имеем:

$$\text{а) } C_m^{(3)} = C_m^{(1)} \frac{\sin \omega_1 b}{\operatorname{sh} \omega_2 b} \frac{A_1 - A_3}{A_3 - A_2}, \quad C_m^{(5)} = C_m^{(1)} \frac{\sin \omega_1 b}{\operatorname{sh} \omega_3 b} \frac{A_2 - A_1}{A_3 - A_2} \\ C_m^{(4)} = C_m^{(2)} \frac{\cos \omega_1 b}{\operatorname{ch} \omega_2 b} \frac{A_1 - A_3}{A_3 - A_2}, \quad C_m^{(6)} = C_m^{(2)} \frac{\cos \omega_1 b}{\operatorname{ch} \omega_2 b} \frac{A_2 - A_1}{A_3 - A_2} \quad (1.20) \\ \text{б) } C_m^{(3)} = C_m^{(1)} \frac{\operatorname{sh} \omega_1 b}{\operatorname{sh} \omega_2 b} \frac{A_1 - A_3}{A_3 - A_2}, \quad C_m^{(5)} = C_m^{(1)} \frac{\operatorname{sh} \omega_1 b}{\operatorname{sh} \omega_3 b} \frac{A_2 - A_1}{A_3 - A_2} \\ C_m^{(4)} = C_m^{(2)} \frac{\operatorname{ch} \omega_1 b}{\operatorname{ch} \omega_2 b} \frac{A_1 - A_3}{A_3 - A_2}, \quad C_m^{(6)} = C_m^{(2)} \frac{\operatorname{ch} \omega_1 b}{\operatorname{ch} \omega_3 b} \frac{A_2 - A_1}{A_3 - A_2}$$

Учитывая, что наименьшее значение критического усилия получается в случае симметрии по отношению к оси  $x$ , в дальнейшем будем рассматривать лишь систему (1.18). В то же время отметим, что все дальнейшее исследование системы (1.18) аналогичным образом можно распространить и на (1.17).

Вводя обозначения

$$X_m = C_m^{(2)} \frac{\cos \omega_1 b}{A_3 - A_2} \frac{(A_2 - A_1)(M_3 - M_2) + (A_3 - A_2)(M_1 - M_2)}{m} \quad (1 \leq m \leq m_1) \quad (1.21)$$

$$X_m = C_m^{(2)} \frac{\operatorname{ch} \omega_1 b}{A_3 - A_2} \frac{(A_2 - A_1)(M_3 - M_2) + (A_3 - A_2)(M_1 - M_2)}{m} \quad (m_1 < m \leq m_2)$$

$$\varphi = \frac{\pi x}{a}, \quad \beta = \frac{\pi c}{a}$$

из (1.18) получим

$$\sum_{m=1}^{\infty} X_m (1 - N_m) \sin m \varphi = 0 \quad (0 \leq \varphi \leq \beta) \quad (1.22)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} m X_m \sin m \varphi = 0 \quad (\beta < \varphi \leq \pi)$$

где

$$N_m = 1 - m \frac{(A_2 - A_1)(\omega_3 \operatorname{th} \omega_3 b - \omega_2 \operatorname{th} \omega_2 b) - (A_3 - A_2)(\omega_1 \operatorname{tg} \omega_1 b + \omega_2 \operatorname{th} \omega_2 b)}{(A_2 - A_1)(M_3 - M_2) + (A_3 - A_2)(M_1 - M_2)} \quad (1 \leq m \leq m_1) \quad (1.23)$$

$$N_m = 1 - m \frac{(A_2 - A_1)(\omega_3 \operatorname{th} \omega_3 b - \omega_2 \operatorname{th} \omega_2 b) + (A_3 - A_2)(\omega_1 \operatorname{th} \omega_1 b - \omega_2 \operatorname{th} \omega_2 b)}{(A_2 - A_1)(M_3 - M_2) + (A_3 - A_2)(M_1 - M_2)} \quad (m_1 < m \leq m_2)$$

Продифференцируем первое уравнение (1.22) по  $\varphi$ , умножим на  $\cos \varphi / 2 \cdot (\cos \varphi - \cos \theta)^{-1/2}$ , а затем проинтегрируем по  $\varphi$  от 0 до  $\theta$ . Второе уравнение умножим на  $\cos \varphi / 2 \cdot (\cos \theta - \cos \varphi)^{-1/2}$  и проинтегрируем по  $\varphi$  от  $\theta$  до  $\pi$ .

После перечисленных преобразований, используя формулы для интегральных представлений полиномов Лежандра [5]

$$y_n(\cos \theta) = P_{m-1}(\cos \theta) + P_m(\cos \theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos m\varphi \cdot \cos \varphi/2}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \theta}} d\varphi =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin m\varphi \cdot \cos \varphi/2}{\sqrt{\cos \theta - \cos \varphi}} d\varphi$$

$$z_n(\cos \theta) = P_{m-1}(\cos \theta) - P_m(\cos \theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin m\varphi \cdot \sin \varphi/2}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \theta}} d\varphi =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos m\varphi \cdot \sin \varphi/2}{\sqrt{\cos \theta - \cos \varphi}} d\varphi$$

парные ряды-уравнения сведем к виду

$$\sum_{m=1}^{\infty} m X_m (1 - N_m) y_m(\cos \theta) = 0 \quad (0 < \theta < \beta) \quad (1.24)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} m X_m y_m(\cos \theta) = 0 \quad (\beta < \theta < \pi)$$

Согласно [6] для определения неизвестных коэффициентов  $X_m$  получим следующую бесконечную систему линейных однородных алгебраических уравнений:

$$X_n = \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} N_m X_m \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (1.25)$$

где

$$a_{nm} = \frac{m}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} y_m(\cos \theta) y_n(\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta =$$

$$= \frac{m}{2} \frac{ny_m(\cos \beta) z_n(\cos \beta) - my_n(\cos \beta) z_m(\cos \beta)}{n^2 - m^2} \quad (1.26)$$

$$a_{nn} = \frac{n}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} y_n^2(\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{1}{4} \left\{ 2 - 2P_{n-1}(\cos \beta) P_n(\cos \beta) + \right.$$

$$\left. + P_{n-1}^2(\cos \beta) - P_n^2(\cos \beta) - 4 \sum_{k=1}^{n-1} P_k(\cos \beta) [\cos \beta P_k(\cos \beta) - P_{k+1}(\cos \beta)] \right\}$$

Для существования нетривиальных решений необходимо, чтобы определитель системы однородных уравнений

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} N_m X_m - X_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (1.27)$$



равнялся нулю. Раскрывая определитель, составленный из усеченной системы уравнений (1.27), получим трансцендентное уравнение, решение которого являются собственными значениями рассматриваемой задачи. Наименьшее собственное значение будет критическим усилием.

2. Так как в случае ортотропного материала зависимость корней  $\omega$ , характеристического уравнения от параметра  $m$  неявная, то доказать сходимость процесса итераций не удастся. Покажем это на примере трансверсально изотропного материала [7] ( $B_{11} = B_{22} = B_{12} + 2B_{66} = E/(1 - \nu^2)$ ,  $B_{12} + B_{66} = E/2(1 - \nu)$ ,  $a_{44} = a_{55} = 1/G'$ ).

Используя решение [8] для трансверсально изотропной пластинки и удовлетворяя граничным условиям (1.3), после преобразований, аналогичных преобразованиям § 1, парные ряды, представляющие симметричную форму потери устойчивости, опять приводим к системе (1.22). Выражение  $N_m$  в этом случае (при  $m > m_1$ ) будет

$$N_m = 1 - m \frac{\omega_1 \operatorname{th} \omega_1 b - \omega_2 \operatorname{th} \omega_2 b}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \frac{\pi \left( 2 - \frac{kP}{2D} \right)}{a} \quad (2.1)$$

где

$$\omega_{1,2} = \left[ i^2 \left( 1 - \frac{kP}{2D} \right) + \sqrt{\frac{P_i^2}{D} \left( 1 + \frac{k^2 P_i^2}{4D} \right)} \right]^{1/2} \quad (2.2)$$

Здесь сохранены обозначения [3].

После несложных преобразований выражения (2.2) приводим к виду

$$\omega_1 = i \left( 1 - \frac{kP}{2D} - \frac{1}{2k\lambda^2} \right), \quad \omega_2 = i \left( 1 + \frac{1}{2k\lambda^2} \right) \quad (2.3)$$

Учитывая (2.3), а также то обстоятельство, что при больших  $m$   $\operatorname{th} \omega_1 b \rightarrow \operatorname{th} \omega_2 b \rightarrow 1$ , из (2.1) получаем, что  $N_m$  имеет экспоненциальный порядок убывания, то есть

$$N_m \approx e^{-m\delta}, \quad \text{где } \delta = 2\pi b/a \quad (2.4)$$

Далее, поскольку функции  $y_m(x)$  и  $z_m(x)$  являются линейными комбинациями полиномов Лежандра, то при больших  $m$  для них будем иметь следующую оценку [5], [6]:

$$\begin{cases} |y_m(x)| \\ |z_m(x)| \end{cases} \leq \frac{1}{m^{1/2}}, \quad (m \gg 1) \quad |x| < 1 - \varepsilon \quad (2.5)$$

Процесс итераций будет сходящимся, если, согласно [9], определитель бесконечной матрицы коэффициентов системы (1.27) будет нормальным. Для этого необходимо, чтобы ряд  $\sum_{n, m=1}^{\infty} |a_{nm} N_m|$  был сходящимся. Это требование можно заменить условием сходимости рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{nn} N_n| \quad \text{и} \quad \sum_{\substack{n, m=1 \\ n+m}}^{\infty} (a_{nm} N_m)^2$$

Приведем именно такое доказательство, то есть докажем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{nn} N_n| < \infty \quad \sum_{\substack{n, m=1 \\ n+m}}^{\infty} a_{nm}^2 N_m^2 < \infty$$

С учетом (1.26), (2.4) и (2.5) получим

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{nn} N_n| &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} N_n \int_0^{\beta} y_n^2 (\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta < \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\delta} = \frac{e^{-\delta}}{1 - e^{-\delta}} < \infty \\ \sum_{\substack{n, m=1 \\ n+m}}^{\infty} a_{nm}^2 N_m^2 &= \sum_{\substack{n, m=1 \\ n+m}}^{\infty} \frac{m^2}{4} \frac{(ny_m z_n - my_n z_m)^2}{(n^2 - m^2)^2} e^{-2m\delta} = \\ &= \sum_{\substack{n, m=1 \\ n+m}}^{\infty} \frac{m^2}{4} \frac{n^2 y_n^2 z_n^2 - 2nmy_n y_m z_n z_m + m^2 y_n^2 z_m^2}{(n^2 - m^2)^2} e^{-2m\delta} < \\ &< \sum_{\substack{n, m=1 \\ n+m}}^{\infty} \frac{m^2}{4} \frac{n^2 \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m} + 2nm \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m} + m^2 \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m}}{(n^2 - m^2)^2} e^{-2m\delta} = \\ &= \sum_{\substack{n, m=1 \\ n+m}}^{\infty} \frac{m^2}{4} \frac{(n+m)^2 e^{-2m\delta}}{nm(n^2 - m^2)^2} = \frac{1}{4} \sum_{\substack{n, m=1 \\ n+m}}^{\infty} \frac{m e^{-2m\delta}}{n(n-m)^2} = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} m e^{-2m\delta} \sum_{\substack{n=1 \\ n+m}}^{\infty} \frac{1}{n(n-m)^2} < \sum_{m=1}^{\infty} e^{-2m\delta} \left( \frac{\pi^2}{3} - \frac{3}{m^2} \right) < \infty \end{aligned}$$

3. Приведем некоторые результаты численных вычислений, которые проводились на ЭВМ «Минск-22» с программой, составленной на языке «Алгол». Были введены следующие обозначения [3]:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\nu_1}{\nu_2} = k_1, \quad \frac{E_1}{G_{12}} = k_2, \quad \frac{E_1}{G_{13}} = \frac{E_2}{G_{23}} = k_3$$

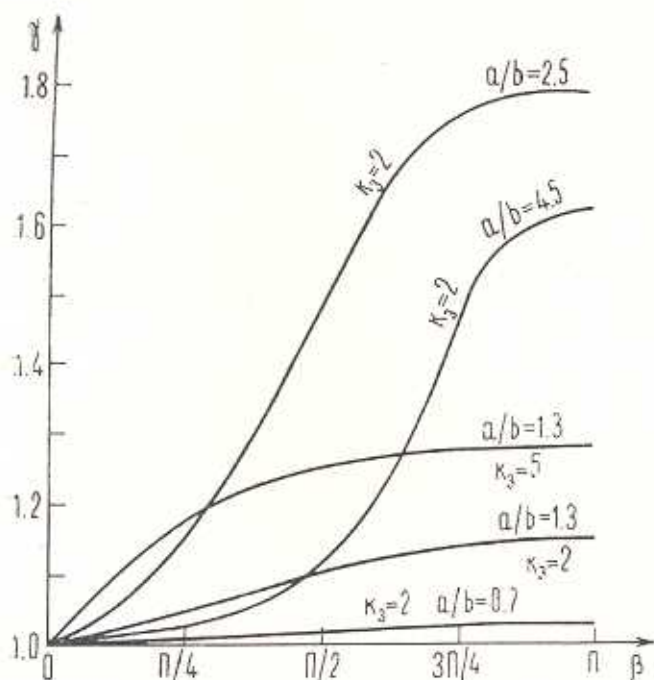
Рассматривались пластинки с параметрами

$$\frac{h}{b} = \frac{1}{5}, \quad k_1 = k_2 = 5, \quad k_3 = 2; 5, \quad \nu_1 = 0.3$$

при различных значениях отношений сторон  $a/b$  и разных длинах защемления  $\beta$ . В тех случаях, когда  $a/b \leq 1.3$ , сходимость процесса была достигнута уже при решении определителей второго и третьего по-

рядка, а при  $a/b > 1.3$  — восьмого и десятого. Полученные результаты практически совпадали (наибольшее отклонение результатов составило 0.9%).

Для наглядности полученных результатов на фиг. 2 приведены кривые изменения безразмерных усилий  $P(2b)^2/\pi^2 D_{11}$  (вычисленные из определителей третьего ( $a/b \leq 1.3$ ) и десятого ( $a/b > 1.3$ ) порядка) в зависимости от длины участка защемления ( $\beta$ ). По оси абсцисс отложено  $\beta$ , а по оси ординат — безразмерный параметр  $\gamma$ , равный отношению критического усилия для данного  $\beta$  к усилию, когда стороны  $y = \pm b$  полностью свободно оперты ( $\beta = 0$ ).



Фиг. 2.

В том случае, когда все края пластинки шарнирно оперты ( $\beta = 0$ ), в системе (1.18) первое уравнение отпадает и остается только второе. Нетривиальное решение при этом получается при условии:

$$\omega_1 b = \frac{n\pi}{2} \quad (n = 1, 3, 5, \dots) \quad (3.1)$$

Очевидно, минимальное значение критического усилия получается при  $n = 1$ . Значения безразмерных усилий, вычисленных по (3.1), совпадают с приведенными в [3] решениями.

Когда края пластинки  $y = \pm b$  полностью заделаны ( $\beta = \pi$ ), коэффициенты  $a_{nm}$  в определителе системы (1.27) будут

$$a_{nm} = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m \\ 1 & \text{при } n = m \end{cases}$$

и, следовательно, из определителя получим

$$N_m - 1 = 0 \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.2)$$

откуда для определения критического усилия получается следующее трансцендентное уравнение:

$$(A_2 - A_1)(\omega_3 \operatorname{th} \omega_3 b - \omega_2 \operatorname{th} \omega_2 b) - (A_3 - A_2)(\omega_1 \operatorname{tg} \omega_1 b + \omega_2 \operatorname{th} \omega_2 b) \quad (3.3)$$

Легко заметить, что уравнение (3.3) получается также из системы (1.18), если принять  $c = a$ .

В заключение выражаю благодарность Л. А. Мовсисяну за постоянное внимание, оказанное при выполнении настоящей работы.

Институт механики  
АН Армянской ССР

Поступила 2 XI 1979

Լ. Վ. ԱԲՐԱՄՅԱՆ

ՕՐՏՈՏՐՈՊ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ՍԱԼԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ  
ԽԱՌԸ ԵՂՐԱՅԻՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Դիտարկվում է վերջավոր սահմանի կոշտություն ունեցող օրտոտրոպ ուղղանկյուն սալ, որի երկու հանդիպակաց կողմերը ազատ հենված են, իսկ մյուս երկու կողմերի համար տրված են խառք պայմաններ: Ուժերը կիրառված են ազատ հենված կողմերի վրա:

Սալի կայունության խնդրի հավասարումների լուծումները փնտրվում են Ֆուրյեի շարքերի տեսքով: Եղբային պայմաններին բավարարելով ինտեգրման հաստատունների որոշման համար ստացվում են զույգ շարք-հավասարումներ, որոնք բերվում են դծային հանրահաշվական համասեռ հավասարումների անվերջ սիստեմի: Զիզերի կրիտիկական արժեքները որոշվում են այդ սիստեմի որոշիչի զրո լինելու պայմանից: Բերվում են թվային արդյունքներ:

ON THE STABILITY OF ORTHOTROPIC RECTANGULAR  
PLATE WITH MIXED BOUNDARY CONDITIONS

L. V. ABRAMIAN

S u m m a r y

The stability of an orthotropic rectangular plate with finite shear stiffness is determined. The two opposite sides of the plate are freely supported; for the other two sides mixed boundary conditions are given. The forces are applied to those two opposite sides which are freely supported.

The solutions of equations on the stability of the plate are taken in Fourier series. Satisfying boundary conditions for the constants of integration, dual series—equations are obtained, which are reduced to an infinite set of linear homogeneous equations. The values of critical forces are defined by equating the determinant of the set to zero. Numerical results are given.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Мовсисян Г. А. К определению критических усилий потери устойчивости прямоугольных пластин при смешанных граничных условиях. Изв. АН Армянской ССР, Механика, 1971, т. XXIV, № 6.
2. Кир, Сталь. Задачи о собственных значениях прямоугольных пластин при смешанных краевых условиях. Труды американского общества инженеров-механиков. ПМ, 1972, № 2.
3. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. М., «Наука», 1967.
4. Киракосян Р. М. Об устойчивости неупругой прямоугольной пластинки, шарнирно опертой по двум противоположным сторонам, с учетом поперечных сдвигов. Изв. АН Армянской ССР, Механика, 1977, т. XXX, № 2.
5. Лебедев Н. П. Специальные функции и их приложения. М., ГИТТЛ, 1953.
6. Баблоян А. А. Решение некоторых парных уравнений. ПММ, 1967, т. 31, в. 4.
7. Пелех Б. Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев, «Наукова думка», 1973.
8. Мелконян А. П., Хачатрян А. А. Об устойчивости прямоугольных трансверсально изотропных пластинок. ПМ, АН УССР, 1966, т. 11, в. 2.
9. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.—Л., Физматгиз, 1962.