

Л. Д. АЗАТЯН

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ  
 ПРИ ДИФРАКЦИИ СИЛЬНОЙ МАГНИТОГАЗОДИНАМИЧЕСКОЙ  
 УДАРНОЙ ВОЛНЫ ОКОЛО УГЛА, БЛИЗКОГО  
 К РАЗВЕРНУТОМУ

В настоящей работе рассматривается нестационарная пространственная задача о движении электропроводящей сжимаемой жидкости в магнитном поле при дифракции сильной магнитогазодинамической ударной волны около угла, стороны которого образуют угол, близкий к  $\pi$ . При отсутствии магнитного поля данная задача рассмотрена в [1]. Исследование слабых ударных волн дано в [2], [3]. Задачи о взаимодействии сильных ударных волн с тонкими телами изучались в [4, 5].

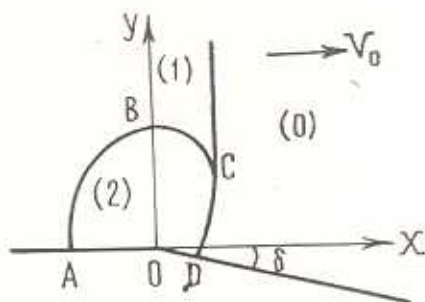
Как указано в [6], в магнитной газодинамике почти отсутствуют результаты по решению пространственных нестационарных задач, вместе с тем решение задач по отражению магнитогазодинамических ударных волн от преград представляет как теоретический, так и практический интерес. В работах [11—13] дается решение ряда задач о дифракции сильных магнитогазодинамических ударных волн и проникании клина в жидкость методом Смирнова—Соболева [7].

В § 1 настоящей работы рассматривается задача о дифракции сильной магнитогазодинамической ударной волны около угла, близкого к  $\pi$ , причем плоскость ударной волны до начала дифракции перпендикулярна, а начальное магнитное поле параллельно одной из сторон угла. Здесь определены параметры газа за скачком, и методами [7] и [1] приведено решение соответствующей граничной задачи.

В § 2 проведено устранение особенностей линейного решения на магнитозвуковой волне методом [2].

§ 1. Пусть плоская сильная магнитогазодинамическая ударная волна движется со скоростью  $U_n$  в покоящемся электропроводящем газе, ограниченном плоской стенкой, стороны которой образуют угол  $(\pi - \delta)$ , выпуклый по отношению к течению. Ударная волна перпендикулярна одной из сторон стенки, начальное магнитное поле  $\vec{B}_0$  предположено перпендикулярным плоскости скачка и постоянным. Начало координат  $O$  системы  $(X, Y)$  выбрано в вершине угла, направление осей  $OX, OY$  указано на фиг. 1. После достижения скачком вершины угла  $O$  имеет место дифракционная картина (фиг. 1). Так как угол  $\delta$  мал, то влияние

угла можно рассматривать как малое возмущение скачка, причем искривленную часть скачка  $CD$  можно рассматривать как результат падения ударной волны, сопровождаемого дифракцией. Область неравномерного течения  $ABCD$  примыкает к области равномерного течения за фронтом невозмущенного скачка по дуге магнитозвуковой волны  $ABC$ , последняя образует границу, до которой дошла волна возмущения, порожденная малым углом  $\delta$ . В обычной газодинамике граница  $ABC$  будет представлять собой дугу окружности радиуса  $ct$ , где  $c$  — местная скорость звука. Пусть индекс 0 обозначены параметры покоящегося газа впереди магнитогазодинамической ударной волны, индекс 1 будем приписывать давлению  $P$ , плотности  $\rho$ , скорости частиц



Фиг. 1.

газа  $\vec{q}$ , магнитному полю  $\vec{B}$ , местной скорости звука  $c$  за фронтом невозмущенной ударной волны (прямолинейный участок скачка), а в области неравномерного течения  $ABCD$  всем величинам будем приписывать индекс 2. Определим течение позади невозмущенной ударной волны. Так как вектор  $\vec{B}$ , перпендикулярен плоскости скачка (параллелен скоростям частиц газа), то параметры газа за прямолинейной частью скачка определяются из соотношений на прямом скачке уплотнения газовой динамики [1].

$$P_1 = \frac{2\gamma M^2 - (\gamma - 1)}{\gamma(\gamma + 1)M^2} \rho_0 U_0^2, \quad v_1 = \frac{(\gamma + 1)M^2}{(\gamma - 1)M^2 + 2} v_0 \quad (1.1)$$

$$q_1 = \frac{2(M^2 - 1)}{(\gamma - 1)M^2} U_0$$

Здесь  $M = \frac{U_0}{c_0}$  — число Маха падающей ударной волны. Для  $\gamma = \frac{7}{5}$  значения этих величин даны в [1]. Введем обозначение

$$M_1 = \frac{q_1}{c_1} = \frac{q_1}{(\gamma P_1 / \rho_1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2(M^2 - 1)}{[2\gamma M^2 - (\gamma - 1)]^{\frac{1}{2}} [(\gamma - 1)M^2 + 2]^{\frac{1}{2}}} \quad (1.2)$$

Здесь, как и в соответствующей задаче газовой динамики [1], возможны дозвуковое и сверхзвуковое течения газа.

Для определенности рассмотрим случай  $M_1 < 1$ , причем для  $M_1 > 1$  рассмотрение изменится незначительно [1]. В области неравномерного течения  $ABCD$  параметры  $P_2$ ,  $\rho_2$ ,  $\vec{q}_2$ ,  $\vec{B}_2$  будут отличаться от параметров с индексом 1 на величины порядка  $\delta$  и для нахождения величин

$$P^* = \frac{P_2 - P_1}{\rho_1 q_1 c_1}, \quad \bar{p} = \frac{p_2 - p_1}{\rho_1}, \quad \bar{q} = \frac{q_2 - q_1}{q_1}, \quad \bar{b} = \frac{\bar{B}_2 - \bar{B}_1}{\frac{1}{\rho_1} q_1} \quad (1.3)$$

может быть применена теория возмущений. Линеаризуя по  $\delta$  уравнения магнитной газодинамики, получим в переменных  $x = X - q_1 t$ ,  $y =$

$$\frac{\partial b_x}{\partial t} = -\frac{\bar{B}_1}{\frac{1}{\rho_1}} \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -c_1 \frac{\partial P^*}{\partial y} + \frac{B_1}{4\pi \rho_1^{\frac{1}{2}}} \left( \frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial b_y}{\partial t} = \frac{B_1}{\frac{1}{\rho_1}} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial P^*}{\partial t} = -c_1 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -c_1 \frac{\partial P^*}{\partial x} \quad (1.4)$$

Здесь  $u$ ,  $v$  — проекции вектора  $\bar{q}$  на оси  $Ox$ ,  $Oy$ . Учитывая автономность задачи, можно ввести координаты

$$\xi = \frac{X - q_1 t}{c_1 t}, \quad \eta = \frac{y}{c_1 t}$$

и сократить число измерений задачи с трех до двух. Тогда уравнения (1.4) запишутся в виде

$$\xi \frac{\partial b_x}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial b_x}{\partial \eta} = \frac{B_1}{c_1 \rho_1^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial v}{\partial \eta}, \quad \xi \frac{\partial P^*}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial P^*}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta}$$

$$\xi \frac{\partial b_y}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial b_y}{\partial \eta} = -\frac{B_1}{c_1 \rho_1^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial v}{\partial \xi}, \quad \xi \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial P^*}{\partial \xi} \quad (1.5)$$

$$\xi \frac{\partial v}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{\partial P^*}{\partial \eta} - \frac{B_1}{4\pi c_1 \rho_1^{\frac{1}{2}}} \left( \frac{\partial b_y}{\partial \xi} - \frac{\partial b_x}{\partial \eta} \right)$$

На плоскости  $\xi$ ,  $\eta$  область неравномерного течения имеет вид (фиг. 2). В линейной постановке кривая  $CD$  (фиг. 1) заменяется отрезком  $C, D$ , прямой линией  $\xi = k_0$  (фиг. 2), причем на  $C, D$ ,

$$\xi = \frac{U_0 - q_1}{c_1} = \left| \frac{(\gamma - 1) M^2 + 2}{2\gamma M^2 - (\gamma - 1)} \right|^{\frac{1}{2}} = k_0 < 1$$

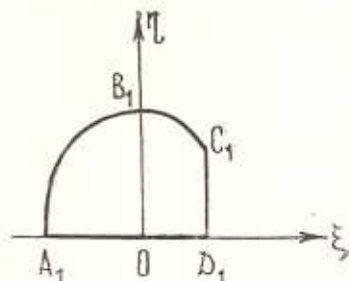
а стенка  $AOD$  аппроксимируется прямолинейным отрезком  $A_1 O D_1$  оси  $\eta = 0$ . Граничное условие на стенке выражается равенством  $v = 0$  для  $\xi < -M_1$  и  $v = -\xi$  для  $\xi > -M_1$ , где  $(-M_1, 0)$  — координаты вершины угла в системе  $(\xi, \eta)$ . На граничной дуге  $A_1 B_1 C_1$

$$P^* = 0 \quad (1.6)$$

так как дуга  $A, B, C$ , является поверхностью слабого разрыва, на которой все функции, в частности, давление непрерывны.

Далее с использованием граничных условий на стенке и дуге  $A, B, C$ , показывается, что задача определения течения в области дифракции может быть решена независимо от задачи определения магнитного поля внутри клина [8]. Действительно, из второго уравнения системы (1.5) получаем, что при  $\eta = 0$  (на стенке)  $b_y = \text{const}$ . В силу непрерывности функций на дуге  $A_1 B_1 C_1$  (на  $A_1 B_1 C_1$  имеем  $\vec{B}_1 = \vec{B}_2$ ,  $\vec{b} = 0$ ) принимаем, что для  $\xi < -M_1$  (слева от вершины)  $b_y = 0$ , тогда, как следует из (1.5), для  $\xi > -M_1$

$$b_y = -\frac{B_1 \delta}{\frac{1}{2} q_1}$$



Фиг. 2.

Проекция вектора  $\vec{B}_2$  на нормаль к стенке будет

$$\vec{B}_{2n} = \vec{B}_{1n} + q_1 \rho_1^{\frac{1}{2}} \vec{b}_n = 0$$

Отсюда видно, что силовые линии магнитного поля обтекают стенку, следовательно, данная задача решается вне зависимости от задачи определения магнитного поля в клине, который может быть как проводящим, так и диэлектриком [8].

Найдем граничное условие для возмущенного давления  $P^*$  на стенке и в окрестности вершины угла. Из системы (1.4) можно получить

$$\left[ \frac{c_1 B_1^2}{4\pi \rho_1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \left( \frac{B_1^2}{4\pi \rho_1 c_1} + c_1 \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \frac{\partial P^*}{\partial y} = \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{B_1^2}{4\pi \rho_1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial v}{\partial t} \quad (1.7)$$

При  $y = 0$  правая часть (1.7) обращается в нуль, следовательно, на стенке можно полагать

$$\frac{\partial P^*}{\partial y} = \frac{\partial P^*}{\partial \eta} = 0 \quad (1.8)$$

Условие в вершине угла получается из (1.7), где учтено, что на стенке  $v = \sigma(X)(-\delta)$ ,  $X = x + q_1 t$ , что позволяет полагать  $\frac{\partial}{\partial t} \Big|_x = q_1 \frac{\partial}{\partial X}$ .

Здесь  $\sigma(X)$  — единичная функция. Тогда из (1.7) получается при  $y = \eta = 0$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{-\delta_1 - \delta}^{-\delta_1 + \delta} \frac{\partial P^*}{\partial \eta} d\xi = \frac{c_1 q_1 \delta (4\pi \rho_1 q_1^2 - B_1^2)}{B_1^2 (q_1^2 - c_1^2) + 4\pi \rho_1 c_1^2 q_1^2} \quad (1.9)$$

Для того, чтобы найти граничное условие на  $\xi = k_0$ , представим возмущенный фронт волны в виде

$$\xi = k_0 + f(\eta)$$

где  $f(\eta)$  — функция, определяющая неизвестную форму возмущенной ударной волны  $CD$ . Записывая соотношения магнитной газодинамики [8], выполняющиеся на скачке  $CD$  и линеаризуя их относительно потока за прямолинейным скачком, получим систему уравнений, решение которой после исключения функции  $f$  имеет вид

$$u = AP^*, \quad \gamma \frac{\partial v}{\partial \eta} = B \frac{\partial P^*}{\partial \eta}, \quad b_x = 0, \quad \gamma \frac{\partial b_y}{\partial \eta} = C \frac{\partial P^*}{\partial \eta} \quad (1.10)$$

на  $\xi = k_0$

где коэффициенты  $A, B, C$  следующие:

$$A = \left[ \frac{2\gamma M^2 - (\gamma - 1)}{(\gamma - 1)M^2 + 2} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{(M^2 + 1)}{2M^2}$$

$$B = \frac{(\gamma + 1)(M^2 - 1)}{2[(\gamma - 1)M^2 + 2 - \tilde{a}_1^2(\gamma + 1)M^2]} \quad (1.11)$$

$$C = \frac{\tilde{a}_1(\gamma + 1)(M^2 - 1)}{2[\tilde{a}_1^2(\gamma + 1)M^2 - (\gamma - 1)M^2 - 2]} \left| \frac{4\pi(\gamma + 1)M^2}{(\gamma - 1)M^2 + 2} \right|^{\frac{1}{2}}$$

$$\tilde{a}_1^2 = \frac{B_0^2}{4\pi\epsilon_0 U_0^2}$$

Исключая из уравнений (1.10)  $u, v, b_y$  с помощью уравнений движения (1.5), получим граничное условие на  $\xi = k_0$  для одной только функции  $P^*$

$$\frac{\partial P^* / \partial \xi}{\partial P^* / \partial \eta} = \frac{(A_0 + k_0)\gamma - Bk_0\gamma^{-1}}{1 - k_0^2} \quad (1.12)$$

В дополнение к (1.12) берется также условие на  $\xi = k_0$ , получаемое из (1.10), а также из условий  $v = 0$  в точке  $C_1$  и  $v = -\delta$  в точке  $D_1$

$$\int \frac{\partial v}{\partial \eta} d\eta = \int \frac{B}{\gamma} \frac{\partial P^*}{\partial \eta} d\eta = \delta \quad (1.13)$$

где интегрирование ведется вдоль скачка  $C_1D_1$ .

Итак, решается система уравнений (1.4) или (1.5) в области дифракции  $A, B, C, D_1$  (фиг. 2) с граничными условиями (1.6), (1.8), (1.9), (1.12) и (1.13). Для решения сформулированной граничной задачи применяется метод Смирнова—Соболева [7], который справедлив для произвольной гиперболической системы уравнений с постоянными ко-



Введем комплексную плоскость  $K = \frac{1}{z} = \zeta + i\mu$ . В плоскости  $K$  стенке  $AOD$  и магнитозвуковой волне  $A_1B_1C_1$  будет соответствовать часть действительной оси  $O\zeta$ , что же касается отрезка  $C_1D_1$ , то при использовании функции  $\beta(z)$  в виде (1.17) образом  $C_1D_1$  будет довольно сложная кривая. В дальнейшем для того, чтобы привести задачу к решению уравнения Лапласа для возмущенного давления  $P^*$  в некоторой канонической области, предполагаем параметр  $a_1^{*2}$  малым и заменяем  $\beta(z)$  формулой

$$\beta(z) \approx \beta_0(z) + \frac{\partial \beta_0(z)}{\partial a_1^{*2}} \Big|_{a_1^{*2}=0} a_1^{*2} = \left(1 - \frac{a_1^{*2}}{2}\right) \sqrt{1 - z^2} \quad (1.19)$$

Тогда вблизи ударной волны  $C_1D_1$  получим

$$\zeta = \frac{\xi}{1 - (\gamma')^2}, \quad \mu = \frac{\eta' \sqrt{1 - \xi^2 - (\gamma')^2}}{1 - (\gamma')^2}, \quad \gamma' = \gamma \left(1 - \frac{a_1^{*2}}{2}\right) \quad (1.20)$$

Функция (1.20) отображает область плоскости  $\xi, \eta$  на верхнюю полу-плоскость комплексной плоскости  $\zeta, \mu$  с выброшенной частью, ограниченной кривой и частью действительной оси

$$\zeta^2 + \mu^2 - \frac{1 + k_0^2}{k_0} \zeta + 1 = 0 \quad (1.21)$$

$$k_0 < \zeta < \frac{1}{k_0}$$

Промежутки

$$-\infty < \zeta < -1, \quad -1 < \zeta < k_0, \quad \frac{1}{k_0} < \zeta < \infty \quad (1.21')$$

соответствуют дуге  $A_1B_1$ , стенке  $A_1OD_1$  и дуге  $B_1C_1$ , кривая (1.21) соответствует скачку  $C_1D_1$ . Таким образом,  $P^*$  как действительная часть аналитической функции  $P(z)$  будет удовлетворять уравнению Лапласа в переменных  $\zeta, \mu$  в области, определяемой соотношениями (1.21) и (1.21'). Далее совершается конформное отображение

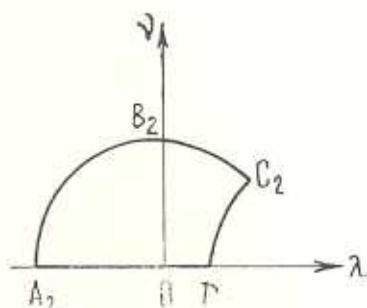
$$K = \frac{2z}{1 + z^2}, \quad K = \zeta + i\mu, \quad z = \lambda + i\nu = \rho e^{i\theta} \quad (1.22)$$

переводящее образ области дифракции в плоскости  $K$  на область  $A_2B_2C_2D_2$  в комплексной плоскости  $\lambda = \rho \cos \theta$ ,  $\nu = \rho \sin \theta$ , ограниченной отрезком  $-1 < \lambda < \frac{1 - k_0^2}{k_0}$ ,  $\nu = 0$ , дугой окружности единичного радиуса  $\rho = 1$  и дугой окружности

$$2\rho \cos \theta = k_0(1 + \rho^2) \quad (1.23)$$

с центром в точке  $\left(\frac{1}{k_0}, 0\right)$ , которая пересекает окружность  $\rho = 1$  в точке  $(k_0, k_0')$  под прямым углом (фиг. 3), здесь  $k_0' = \sqrt{1 - k_0^2}$ . Здесь следует отметить, что в результате этого отображения мы получаем область такой же формы, что и в обычной газодинамике [1]. Преобразуем (1.9) и (1.12) к переменным  $\rho, \theta$ . Согласно (1.20) и (1.22) связь между плоскостями  $\xi, \eta$  и  $\rho, \theta$  можно взять в виде

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{2\rho}{1 + \rho^2} \cos \theta \\ \eta &= \frac{2\rho}{1 + \rho^2} \sin \theta \end{aligned} \quad (1.24)$$



Фиг. 3.

Опуская громоздкие, но простые выкладки, получаем условие (1.9) в плоскости  $\rho, \theta$  в виде

$$\lim_{v \rightarrow 0} \int \frac{\partial P^*}{\partial v} d\lambda = \frac{1}{\sqrt{1 - M_1^2}} \frac{(4\pi\rho_1 q_1^2 - B_1^2) c_1 q_1 \delta}{4\pi\rho_1 q_1^2 c_1^2 + B_1^2 (q_1^2 - c_1^2)} \quad (1.25)$$

где

$$M_{1*} = M_1 + \frac{a_1^{*2} (1 - M_1^2)}{2M_1}$$

Условие (1.12) в плоскости  $\rho, \theta$  запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial P^* / \partial n}{\partial P^* / \partial s} &= \frac{[(A + k_0)(k_0^*)^2 - k_0(k_0')^2] k_0 \operatorname{tg} \theta - B(k_0^*)^2 \operatorname{ctg} \theta}{(k_0^*)^2 (1 - k_0^2 \sec^2 \theta)^{\frac{1}{2}}} \\ k_0^* &= \sqrt{1 - k_0'^2}, \quad k_0' = k_0 + a_1^{*2} (k_0')^2 / 4k_0 \end{aligned} \quad (1.26)$$

$n, s$  отсчитываются по нормали и касательной к (1.23).

Интегральное условие на ударной волне  $C_2 D_2$  дается формулой (1.13), где

$$\eta' = \eta \left( 1 - \frac{a_1^{*2}}{2} \right) = k_0 \operatorname{tg} \theta \quad (1.27)$$

Соотношение (1.27) имеет место на ударной волне.

На дуге  $A_2 B_2 C_2$  давление непрерывно, следовательно,

$$P^* = 0 \quad \text{на } ABC \quad (1.28)$$

а на стенке

$$\frac{\partial P^*}{\partial v} = 0 \quad (1.29)$$



Таким образом, сложную краевую задачу о дифракции магнитогазодинамической ударной волны путем аппроксимации функции  $\beta(\alpha)$ , примененной лишь в окрестности ударной волны  $C, D_1$ , удалось привести в плоскости  $\rho, \theta$  к следующей краевой задаче для функции  $P^*$ . Ищется функция  $P^*(\rho, \theta)$ , удовлетворяющая уравнению Лапласа в области, границы которой определяются соотношениями

$$-1 < \lambda < \frac{1 - k_0'}{k_0}, \quad i^2 + v^2 = 1$$

и (1.23) (фиг. 3) при граничных условиях (1.25) — (1.29).

Эта граничная задача лишь значениями постоянных отличается от соответствующей газодинамической задачи, поэтому далее применяется метод Лайтхилла [1].

Так как в плоскости  $\rho, \theta$  граничные условия неудобны, то применяются дополнительные конформные преобразования

$$Z = \xi_1 + i\eta_1 = (k_0 + ik_0') \left( i - \frac{2k_0'}{z - (k_0 + ik_0')} \right), \quad z = \rho e^{i\theta} \quad (1.30)$$

$$z_1 = \frac{1}{2} (Z^2 + Z^{-2}), \quad Z^2 = z_1 + (z_1^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \quad (1.31)$$

Преобразование (1.30) переводит область плоскости  $\lambda, v$  в первый квадрант с выброшенной четвертью единичного круга с центром в начале координат на плоскости  $Z$ . При этом дуге  $A_2 B_2 C_2$ , на которой  $\rho = 1$ , соответствует часть мнимой оси  $O\eta_1$ , отрезок  $A_2 O D_2$  переходит в дугу окружности единичного радиуса, а дуга  $C_2 D_2$  окружности (1.23) переходит в часть действительной оси  $O\xi_1$ .

Граничные условия (1.25) — (1.29) преобразуются к переменным  $\xi_1, \eta_1$ . Здесь приводится только условие (1.26), записанное в плоскости  $Z$

$$\frac{\partial P^* / \partial \eta}{\partial P^* / \partial \xi} = \frac{[(A + k_0)(k_0')^2 - k_0(k_0)^2] k_0 (Z^2 - 1)}{Z^2 + 1} - \frac{B k_0 (k_0')^2 (Z^2 + 1)}{k_0 (Z^2 - 1)} \\ \left( \frac{2(k_0')^2 Z}{Z^2 + 1} \right)$$

Преобразование (1.31) переводит область плоскости  $Z$  в верхнюю полу-плоскость комплексной плоскости  $z_1$ , причем волне  $A_2 B_2 C_2$  будет соответствовать отрезок действительной оси  $-\infty < x_1 < -1$ , стенке будет соответствовать промежуток  $-1 < x_1 < 1$ , а ударной волне  $C_2 D_2$  — промежуток  $1 < x_1 < \infty$ . Условие (1.26) на ударной волне  $C_2 D_2$  в плоскости  $z_1$  запишется в виде

$$\frac{\partial P^* / \partial y_1}{\partial P^* / \partial x_1} = \frac{B k_0 (k_0')^2}{(k_0')^2} (x_1 + 1) - [(A + k_0)(k_0')^2 - k_0(k_0)^2] (x_1 - 1) \\ (k_0')^2 \sqrt{2} (x_1 - 1) \quad (1.32)$$

при  $y_1 = 0$ ,  $1 < x_1 < \infty$ . На интервале  $-1 < x_1 < 1$ ,  $y_1 = 0$  имеем

$$\frac{\partial P^*}{\partial y_1} = 0 \quad (1.33)$$

причем в окрестности вершины угла условие (1.25) примет вид

$$\lim_{y_1 \rightarrow 0} \int \frac{\partial P^*}{\partial y_1} dx_1 = \frac{1}{1 - M_1^2} \frac{(4\pi\sigma_1 q_1^2 - B_1^2) c_1 q_1 \delta}{4\pi\sigma_1 q_1^2 c_1^2 + B_1^2 (q_1^2 - c_1^2)} \quad (1.34)$$

В плоскости  $z$ , вершине угла соответствует точка

$$z_1 = -\frac{(M_1 + k_0)^2 + (M_1^2 - 1)(k_0)^2}{(M_1 k_0 + 1)^2} = x_0 > -1$$

На интервале  $-\infty < x_1 < -1$ ,  $y_1 = 0$  имеем

$$\frac{\partial P^*}{\partial x_1} = 0 \quad (1.35)$$

Интегральное условие на  $C_1 D_1$  примет вид

$$\int_1^{\infty} \frac{B}{k_0} \left( \frac{x_1 + 1}{x_1 - 1} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial P^*}{\partial x_1} dx_1 = \delta \quad (1.36)$$

Здесь использовано соотношение

$$\gamma = k_0 \left( \frac{x_1 - 1}{x_1 + 1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

имеющее место на  $C_1 D_1$ .

Таким образом, пришли к следующей краевой задаче: решить уравнение Лапласа для возмущенного давления  $P^*(x_1, y_1)$  в области, представляющей собой верхнюю полуплоскость комплексной плоскости  $z$ , при граничных условиях (1.32)–(1.36). Решение для функции

$$\omega(z_1) = \frac{\partial P^*}{\partial y_1} + i \frac{\partial P^*}{\partial x_1}$$

находится методом Лайтхилла в виде [1]

$$\omega(z_1) = \frac{Dz_1 [E(z_1 - x_0) - 1]}{(z_1^2 - 1)^{\frac{1}{2}} (z_1 - x_0) [z_0 - i(z_1 - 1)^{\frac{1}{2}}] [\beta_0 - i(z_1 - 1)^{\frac{1}{2}}]} \quad (1.37)$$

где  $D$  и  $E$  определяются из граничных условий (1.34) и (1.36)

$$D = \frac{c_1 q_1 (4\pi\sigma_1 q_1^2 - B_1^2) [z_0 + (1 - x_0)^{\frac{1}{2}}] [\beta_0 + (1 - x_0)^{\frac{1}{2}}] |1 - x_0^2|^{\frac{1}{2}}}{\pi |1 - M_1^2|^{\frac{1}{2}} [4\pi\sigma_1 q_1^2 c_1^2 + B_1^2 (q_1^2 - c_1^2)]}$$

$$\frac{(1 - M_1^2)^{\frac{1}{2}} (M_1 k_0 + 1)^2 [4\pi\rho_1 g_1^2 c_1^2 + B_1^2 (g_1^2 - c_1^2)]}{2B(M_1 + k_0)(1 - M_1^2)^{\frac{1}{2}} (4\pi\rho_1 g_1^2 - B_1^2) c_1 g_1} =$$

$$= E \frac{(\alpha_* + \gamma_*)(\beta_* + \gamma_*)}{\alpha_* \beta_*} - \frac{\alpha_* + \beta_* + \gamma_*}{\alpha_* \beta_* \gamma_*}$$

где  $\gamma_* = 1 - x_0 = 2(M_1 + k_0)^2 / (M_1 k_0 + 1)^2$ , а  $\alpha_*$  и  $\beta_*$  определяются из уравнений

$$\alpha_* + \beta_* = \frac{\sqrt{2} (k_0')^4}{[(A + k_0)(k_0')^2 - k_0(k_0')^2] (k_0')^2 - Bk_0(k_0')^2}$$

$$\alpha_* \beta_* = \frac{2Bk_0(k_0')^2}{[(A + k_0)(k_0')^2 - k_0(k_0')^2] (k_0')^2 - Bk_0(k_0')^2}$$

Таким образом, получено решение задачи о дифракции сильной магнитогазодинамической ударной волны около угла, близкого к развернутому, в форме (1.37).

Определим форму искривленной ударной волны  $CD$  (в линейной постановке для ударной волны имеем  $\xi = k_0$ ,  $f(\eta) = 0$ ). Наклон касательной в произвольной точке ударной волны к оси  $O\eta$  определяется по формуле

$$\frac{d\xi}{d\eta} = f'(\eta)$$

Из соотношений, которые должны выполняться на косом скачке уплотнения в магнитной газодинамике [8], можно получить

$$v = - \left[ 1 + \frac{\tilde{a}_1^2 (\gamma + 1) M^2}{(\gamma - 1) M^2 + 2} \right] f' \quad (1.38)$$

Согласно уравнению (1.10) на ударной волне  $C, D$ , имеет место

$$v = v_0 + \int_0^{\eta} \frac{B}{\eta} dP^*$$

где  $v_0$  есть значение  $v$  в точке  $D$ , которое равно  $-\tilde{v}_*$ , то есть

$$v = -\tilde{v}_* + \int_0^{\eta} \frac{B}{\eta} dP^* \quad (1.39)$$

Подставляя (1.39) в (1.38), получим

$$\begin{aligned}
 f' &= \left[ 1 + \frac{\tilde{a}_1^2 (\gamma + 1) M^2}{(\gamma - 1) M^2 + 2} \right]^{-1} \left( \tilde{z} - \int_0^{\tilde{z}} \frac{B}{\eta} \frac{\partial P^*}{\partial \eta} d\eta \right) = \\
 &= \left[ 1 + \frac{\tilde{a}_1^2 (\gamma + 1) M^2}{(\gamma - 1) M^2 + 2} \right]^{-1} \left[ \tilde{z} - \int_1^{\tilde{z}} \frac{B}{k_0} \left( \frac{x_1 + 1}{x_1 - 1} \right)^{\frac{1}{2}} \times \right. \\
 &\quad \left. \times \frac{D\tilde{z} [E(x_1 - x_0) - 1] (\alpha_0 + \beta_*) (x_1 - 1)^{\frac{1}{2}}}{(x_1^2 - 1)^{\frac{1}{2}} (x_1 - x_0) (\alpha_0^2 + x_1 - 1) (\beta_0^2 + x_1 - 1)} dx_1 \right] \quad (1.40)
 \end{aligned}$$

Далее основное внимание уделяется исследованию полученного решения в окрестности фронта магнитозвуковой волны  $ABC$ .

§ 2. Уравнение магнитозвуковой волны  $ABC$  дается формулой (1.18). Полагая вблизи волны  $x = x_0 + x'$ , подставляя в уравнение (1.15) и учитывая (1.18), получим

$$x' = -i \sqrt{\frac{2}{-\beta''(\alpha_0) y}} V \sqrt{t - t_{\text{инфр}}} \quad (2.1)$$

Из формул (1.22), (1.30), (1.31), (2.1) вблизи части  $-\infty < x_1 < -1$  действительной оси  $Ox_1$ , соответствующей волне  $ABC$ , можно получить

$$x_1 = \frac{1}{2} \left( l^2 + \frac{1}{l^2} \right), \quad y_1 = \frac{l_1(\theta)}{V t} V \sqrt{t - t_{\text{инфр}}} \quad (2.2)$$

где

$$c_1 \alpha_0 = \cos \theta, \quad k_0 = \cos \varphi, \quad l = i \frac{\cos \varphi - \cos \theta}{1 - \cos(\varphi - \theta)}$$

$$l_1(\theta) = \frac{\sin \varphi [(\cos \varphi - \cos \theta)^2 + [1 - \cos(\theta - \varphi)]^2] c_1}{\sin \theta [1 - \cos(\theta - \varphi)]^2 (\cos \varphi - \cos \theta)^2} V \sqrt{\frac{2(\beta - \alpha_0 \beta')}{-\beta''(\alpha_0)}}$$

Из формулы (1.37) на интервале  $-\infty < x_1 < -1$  действительной оси плоскости  $z$ , соответствующем магнитозвуковой волне  $ABC$ , имеем

$$\frac{\partial P^*}{\partial y_1} = a_1(\theta) \quad (2.3)$$

$$a_1(\theta) = \frac{D\tilde{z} [E(x_1 - 1) - 1]}{(x_1^2 - 1)^{\frac{1}{2}} (x_1 - x_0) [\alpha_0 + (1 - x_1)^{\frac{1}{2}}] [\beta_0 + (1 - x_1)^{\frac{1}{2}}]}$$

Из (2.3) с учетом того, что впереди волны  $ABC$   $P^* = 0$ , получим

$$P = p_1 q_1 c_1 P^* = \frac{B(\theta)}{V t} V \sqrt{\tau} \quad \tau = t - t_{\text{инфр}} \quad (2.4)$$

где

$$B(\theta) = p_1 q_1 c_1 a_1(\theta) l_1(\theta)$$

Полученное линейное решение (2.4) имеет особенность на волне  $ABC$ , так как на ней производная  $\frac{\partial P}{\partial t}$  бесконечна. Для устранения особенности линейного решения вблизи волны и получения равномерно точного нелинейного решения применим метод [2] замены в линейном решении (2.4) характеристической переменной. Тогда нелинейное решение в окрестности волны  $ABC$  получится в виде

$$P = \frac{B(\theta)}{\sqrt{t}} \sqrt{y_2} \quad (2.5)$$

где  $y_2 = \text{const}$  есть уже уравнение нелинейных характеристик позади волны  $ABC$ . Уравнение характеристики можно получить из уравнения для скорости поверхности волны  $F(x, y, t) = 0$

$$\frac{-\frac{\partial F}{\partial t}}{|\text{grad } F|} = C_n + V_n \quad (2.6)$$

где  $C_n + V_n$  есть нормальная скорость магнитозвуковой волны,  $V_n$  — нормальная к волне скорость частицы, причем имеет место уравнение в нелинейной задаче [8]

$$C_n^4 - (c_1^2 + a_1^2) C_n^2 + c_1^2 a_{1n}^2 = 0, \quad a_1^2 = \frac{B_1^2}{4\pi\rho_1}, \quad a_{1n}^2 = \frac{B_{1n}^2}{4\pi\rho_1} \quad (2.7)$$

$C_n$  — нормальная скорость волны относительно частиц газа. Для скорости магнитозвуковой волны имеем в первом порядке относительно возмущенного давления  $P$

$$C_n + V_n = c_n + U_n + x^0 P$$

где  $c_n + U_n$  — нормальная скорость волны для невозмущенного потока. Значение  $x^0$  можно получить из (2.7), записанного в первом порядке относительно  $P$ , и с использованием условий совместности на волне или (1.16) в виде

$$x^0 = -\frac{\gamma + 1}{2} \frac{c_n^2 - a_1^2}{c_1^2 + a_1^2 - 2c_n^2} + \frac{3}{2} \frac{c_1^2 - c_n^2}{c_1^2 + a_1^2 - 2c_n^2}$$

Из уравнения (2.6) в силу соотношений

$$|\text{grad } F| = -|\text{grad } \tau| \left| \frac{\partial F}{\partial \tau}, \frac{\partial F}{\partial t} \right|_{x,y} = \frac{\partial F}{\partial t} \Big|_{\tau} + \frac{\partial F}{\partial \tau}, \quad |\text{grad } \tau| = \frac{1}{c_n + U_n}$$

получится [9]

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = -\frac{x^0}{c_n} P, \quad \text{где } c_n' = c_n + U_n \quad (2.8)$$

Подставляя (2.5) в (2.8) и интегрируя, получим уравнение нелинейных характеристик

$$\tau = -\sqrt{y_2} \int_0^t \frac{x^0}{c_n} \frac{B(\theta)}{\sqrt{t}} dt + y_2 \quad (2.9)$$

Формулы (2.5) и (2.9) дают параметрическое представление нелинейного решения в окрестности волны ABC. Условие на слабой ударной волне можно получить в виде [9]

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{x^0}{c_n} \frac{P}{2} \quad (2.10)$$

Подставляя (2.9) в (2.10) и интегрируя, получим формулу, выражающую  $y_2$  через  $t$  на ударной волне

$$y_2^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \frac{x^0}{c_n} B(\theta) \sqrt{t} \quad (2.11)$$

Из этой формулы видно, что ударная волна существует при  $B(\theta) > 0$ , то есть при  $\delta < 0$ , при  $B(\theta) < 0$ ,  $\delta > 0$  имеет место непрерывный переход (действительной ударной волны не существует). Давление находится по формуле (2.5) в виде

$$P = \frac{3}{2} \frac{x^0}{c_n} B^2(\theta) \quad (2.12)$$

то есть  $P$  есть малая порядка  $\delta^2$ . Уравнение ударной волны получится в виде

$$\tau = -\frac{3}{4} \left( \frac{x^0}{c_n} \right)^2 B^2(\theta) t = t - t_{\text{аиф}} \quad (2.13)$$

то есть ударная волна находится впереди магнитозвуковой волны  $\tau=0$ . Вблизи точки C, в которой  $\theta = \varphi$ , можно полагать  $\theta - \varphi = \theta'$ ,

$$l \approx l \frac{2 \sin \varphi}{\theta'}, \quad x_1 \approx \frac{1}{2} l^2$$

и, согласно (2.2), (2.3), (2.4), получится

$$\frac{B(\theta)}{\delta} = \frac{2DEq_1 \delta_1 c_1 \theta'}{(\alpha_* \theta' + \sqrt{2} \sin \varphi) (\theta' \beta_* + \sqrt{2} \sin \varphi) (\sin \varphi + \theta' \cos \varphi)}$$

откуда видно, что при  $\theta' = 0$ , то есть в точке C,  $B(\theta) = 0$  и ударная волна в этой точке затухает. В газовой динамике этот факт отмечен в [10].

В заключение автор благодарит А. Г. Багдоева за постановку задачи, обсуждение результатов и ценные советы.

Институт механики  
АН Армянской ССР

Поступила 28.11.1980

Լ. Գ. ԱԶԱՏԻԱՆ

ՀԵՂՈՒԿԻ ՇԱՐԺՄԱՆ ՊԱՐԱՄԵՏՐԵՐԻ ՈՐՈՇՈՒՄԸ ՓՈՎԱՄԻՆ ՄՈՏԻԿ  
ԱՆԿՅԱՆ ՇՈՒՐՋԸ ՈՒԺԵՂ ՄԱԳՆԵՏՈՎԳԱՉԱԳԻՆԱՄԻԿԱԿԱՆ ՀԱՐՎԱԾԱՅԻՆ  
ԱԼԻՔԻ ԳԻՅՐԱԿՑԻԱՅԻ ԺԱՄԱՆԱԿ

Ա մ փ ո փ ու լ մ

Աշխատանքում դիտարկվում է ուժեղ մագնիսագազադինամիկական հարվածային ալիքի դիֆրակցիայի խնդիրը պատի շուրջը, որի կողմերը կազմում են շարժման ուղղությամբ  $(\pi - \delta)$  ուռուցիկ անկյուն: Հաստատուն ինտենսիվություն ունեցող հարվածային ալիքի ետևում շարժման պարամետրերի համար գտնված են անալիտիկ առնչություններ: Մաթրիոզ-Սորոլևի մեթոդի կիրառումից հետո անալիտիկ ֆունկցիաների որոշման համար ստացվում է եզրային խնդիր, որը լուծվում է Հայթիլի մեթոդով: Կատարվում է ստացված դժային լուծման եզակիության վերացումը արագ մագնիսակուստիկ ալիքի վրա, ինչպես նաև ուսումնասիրվում է դժային լուծումը դանդաղ մագնիսակուստիկ ալիքի եզակի կետի շրջակայքում:

THE DETERMINATION OF MOTION PARAMETERS  
OF THE FLUID IN THE PROBLEM FOR DIFFRACTION  
OF A STRONG MAGNETOGASDYNAMIC SHOCK WAVE  
AT THE ANGLE CLOSE TO A BLUNT ONE

L. D. AZATIAN

S u m m a r y

The problem for diffraction of a strong magnetogasdynamic shock wave near the wall, with sides forming  $(\pi - \delta)$  angle, convex to the flow, is considered. The analytical relations for the motion parameters behind the shock wave of constant strength are found. Applying the Smirnov—Sobolev method, the boundary value problem for determination of analytical functions is obtained and solved by the Lighthill method. The elimination of the singularity of the obtained linear solution on a fast magnetoacoustic wave is carried out.

The investigation of the linear solution in the vicinity of a singular point of a slow magnetoacoustic wave is also made.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Lighthill M. J.* The diffraction of blast. I. Proceedings of the Royal Society, London, A 198, 1949.
2. *Узлем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М., «Мир», 1977.
3. *Рысков О. С., Христианович С. А.* О нелинейном отражении слабых ударных волн. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 5.
4. *Григорян С. С.* О движении тонкого твердого тела под действием сильной ударной волны. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 1.
5. *Лудлофф.* Аэродинамика взрывных волн. Проблемы механики. Сб. статей под редакцией Р. Мизеса и Т. Кармана, М., Изд. ИЛ, 1955.
6. *Коган М. Н., Коробейников В. П., Куликовский А. Г., Любимов Г. А.* Механика разреженного газа и магнитная гидродинамика, Механика в СССР за 50 лет, механика жидкости и газа, т. 2, М., «Наука», 1970.
7. *Франк и Мизес.* Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, Л.—М., ОНТИ, 1937.
8. *Калихман Л. Е.* Элементы магнитной газодинамики. М., Атомиздат, 1964.
9. *Багдоев А. Г., Даноян Э. П.* Исследование движения среды в окрестности точки касания ударных волн. Ж. вычис. матем. и матем. физики, 1972, т. 12, № 6.
10. *Tap H. S.* Strength of reflected shock in Mach reflection. J. Aeronaut, Sci, 1951, v. 18, № 11.
11. *Азатян Л. Д., Багдоев А. Г.* Некоторые задачи дифракции волн в электропроводящей жидкости. Краткие тезисы докладов VI Всесоюзного симпозиума по «Теории дифракции и распространению волн», кн. 2, Ереван, 1973.
12. *Азатян Л. Д., Багдоев А. Г.* Проникновение клина в электропроводящую жидкость в присутствии магнитного поля. Изв. АН Армянской ССР, Механика, 1976, т. XXIX, № 2.
13. *Азатян Л. Д.* Задача о дифракции сильной магнитогазодинамической ударной волны около клина. Изв. АН Армянской ССР, Механика, 1974, т. XXVII, № 5.