ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXIV, № 1, 1981 Механика

А. С. РАБИНОВИЧ

О РЕШЕНИИ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ШЕРОХОВАТЫХ ТЕЛ С БЛИЗКИМИ РАДИУСАМИ

Рассматривается задача о сжатии двух упругих шероховатых тел, одно из которых имеет круговой цилиндрический вырез, а другое представляет собой круговой цилиндр, вставленный в этот вырез, причем радиусы цилиндра и выреза близки. Эта задача в случае идеально гладких тел изучалась в [1]. Исследуемая нами задача для шероховатых тел приводится к нелинейному интегральному уравнению относительно номинального давления. Предлагается эффективный итерационный метод решения этого уравнения.

1. Представим поверхности контактирующих тел в виде двух гладких цилиндрических поверхностей F_1 и F_2 с радиусами r_1 и r_2, покрытых микронеровностями (волнистости считаем отсутствующими). Задачу будем считать плоской и рассматривать ее в дальнейшем в плоскости П, перпендикулярной оси цилиндра и делящей его пополам. Окружности, по которым пересекаются поверхности F_1 и F_2 с плоскостью П, обозначим через F_1^* и F_2^*, а центры окружностей — через O_1 и O_2. Сжимающие силы в плоскости П считаем приложенными симметрично по отношению к прямой, соединяющей центры O_1 и O_2 (в дальнейшем индекс 1 будет соответствовать круговому цилиндру, а индекс 2 — телу с вырезом).

Обозначим, также как и в [1], α — сближение тел; u_{1r} и u_{2r} — нормальные упругие перемещения точек окружностей F_1^* и F_2^*; φ — угол между прямой O_1O_2 и произвольным радиусом окружности F_1^*, изменяющейся на участке контакта в пределах $-\varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$. Зависимость между номинальным давлением p (при отсутствии волнистости оно совпадает с контурным давлением) и сближением ε поверхностей тел вследствие деформации микронеровностей представим степенной функцией $\varepsilon = Mp^{\frac{1}{m}}(\varphi)$ $(1 \leqslant m < 3)$ [2].

Обозначим $H = H_1 + H_2$, где H_1 и H_2 — максимальные высоты микронеровностей контактирующих тел.

Рассмотрим две точки A_1 и A_2, лежащие соответственно на окружностях F_1^* и F_2^* и находящиеся после сжатия тел на прямой, параллельной прямой O_1O_2. Угол φ между прямыми O_1O_2 и O_1A_1 выберем в пределах $-\varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$. После сжатия тел расстоянии между окружностями F_1^* и F_2^*, взятое на прямой O_1A_1, будет равно $H - Mp^{\frac{1}{m}}(\varphi)$, поэтому расстояние Δ между точками A_1 и A_2 станет равным следующему выражению:

$$\Delta = \frac{H - Mp^{\frac{1}{m}}(\varphi)}{\cos\varphi}$$

Пусть в результате упругих перемещений точка A_1 переходит в A_1', и A_2 — в A_2'. Проведя рассуждения, аналогичные [1] (стр. 143, 144), получим при $|\varphi| \leqslant \varphi_0$

$$u_{1r} + u_{2r} = (\rho - H)\cos\varphi - (r_2 - r_1)(1 - \cos\varphi)$$

где ρ — расстояние между точками A_1' и A_2'.

Так как для выбранных точек $\rho = \alpha + \Delta$ (ввиду параллельности прямых $A_1'A_2'$ и O_1O_2), то на участке контакта имеем следующее равенство:

$$u_{1r} + u_{2r} = \alpha\cos\varphi - Mp^{\frac{1}{m}}(\varphi) - (r_2 - r_1 - H)(1 - \cos\varphi) \tag{1.1}$$

Рассматривая задачу в постановке, предложенной в [1], и используя приведенные там же формулы для u_{1r} и u_{2r} (стр. 145), получим следующее нелинейное интегральное уравнение относительно номинального давления:

$$Mp^{\frac{1}{m}}(\varphi) - 2(\theta_1 r_1 + \theta_2 r_2)\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p(\varphi')\cos(\varphi - \varphi')\ln \operatorname{tg}\frac{|\varphi - \varphi'|}{2}\,d\varphi' +$$

$$+ (\varkappa_1 r_1 + \varkappa_2 r_2)\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p(\varphi')\sin|\varphi - \varphi'|\,d\varphi' - 2\theta_1 r_1\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p(\varphi')\,d\varphi' =$$

$$= \alpha\cos\varphi - (r_2 - r_1 - H)(1 - \cos\varphi) \qquad (-\varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0) \tag{1.2}$$

где

$$\theta_i = \frac{1 - \mu_i^2}{\pi E_i}, \qquad \varkappa_i = \frac{(1 + \mu_i)(1 - 2\mu_i)}{2E_i} \qquad (i = 1,\ 2)$$

E_i, μ_i — модули упругости и коэффициенты Пуассона контактирующих тел.

Сделаем замену переменной

$$\varphi' = 2\operatorname{arc\,tg}(at), \qquad \varphi = 2\operatorname{arc\,tg}(ax)$$

где

$$a = \operatorname{tg}\frac{\varphi_0}{2}$$

Положим

$$q^m(x) = \frac{p(2\operatorname{arc\,tg}(ax))}{(1 + a^2x^2)^2} \tag{1.3}$$

Уравнение (1.2) при $\varphi_0 \leqslant \frac{\pi}{2}$ примет следующий вид:

$$Mq(x)(1+a^2x^2)^{1+\frac{2}{m}} - 4a(\theta_1 r_1 + \theta_2 r_2)\int_{-1}^{1} q^m(t)\ln\left(\frac{|a(t-x)|}{1+a^2tx}\right)\times$$

$$\times[(1-a^2x^2)(1-a^2t^2)+4a^2tx]\,dt + 4a^2(\varkappa_1 r_1 + \varkappa_2 r_2)\int_{-1}^{1} q^m(t)(1+a^2tx)\times$$

$$\times|t-x|\,dt - 4\theta_1 a r_1(1+a^2x^2)\int_{-1}^{1} q^m(t)(1+a^2t^2)\,dt =$$

$$=(H+r_1-r_2)(1+a^2x^2)+(\alpha+r_2-r_1-H)(1-a^2x^2) \tag{1.4}$$

$$(|x|\leqslant 1)$$

Преобразуем, используя четность $q(x)$, следующий интеграл:

$$\int_{-1}^{1} q^m(t)(1+a^2tx)|t-x|\,dt = \int_{-1}^{x} q^m(t)(1+a^2tx)(x-t)\,dt +$$

$$+\int_{x}^{1} q^m(t)(1+a^2tx)(t-x)\,dt = 2\int_{0}^{x} q^m(t)(1+a^2tx)(x-t)\,dt +$$

$$+\int_{0}^{1} q^m(t)(1+a^2tx)(t-x)\,dt + \int_{-1}^{0} q^m(t)(1+a^2tx)(x-t)\,dt =$$

$$=2\int_{0}^{x} q^m(t)(1+a^2tx)(x-t)\,dt + \int_{0}^{1} q^m(t)[(1+a^2tx)(t-x)+$$

$$+(1+a^2tx)(x+t)]\,dt = 2\int_{0}^{x} q^m(t)(1+a^2tx)(x-t)\,dt +$$

$$+2(1-a^2x^2)\int_{0}^{1} tq^m(t)\,dt \tag{1.5}$$

Из (1.4) и (1.5) имеем

$$K(1+a^2x^2)^{1+\frac{2}{m}} q(x) + \int_{-1}^{1} q^m(t)[(1-a^2x^2)(1-a^2t^2)+4a^2tx]\times$$

$$\times\ln\left(\frac{1+a^2tx}{|t-x|}\right)dt + \lambda\int_{0}^{x} q^m(t)(1+a^2tx)(x-t)\,dt = S_1 - S_2x^2 \tag{1.6}$$

где

$$K = \frac{M}{4a(\theta_1 r_1 + \theta_2 r_2)}, \qquad \lambda = \frac{2a(\varkappa_1 r_1 + \varkappa_2 r_2)}{\theta_1 r_1 + \theta_2 r_2}$$

$$S_1 = 2\ln a \int_0^1 q^m(t)(1 - a^2t^2)\,dt - \lambda \int_0^1 t q^m(t)\,dt + \frac{\sigma + 8\theta_1 a r_1 \int_0^1 q^m(t)(1 + a^2t^2)\,dt}{4a(\theta_1 r_1 + \theta_2 r_2)}$$

$$S_2 = 2a^2 \ln a \int_0^1 q^m(t)(1 - a^2t^2)\,dt - \lambda a^2 \int_0^1 t q^m(t)\,dt + \frac{a^2(2(r_2 - r_1 - H) + \sigma) - 8\theta_1 a^3 r_1 \int_0^1 q^m(t)(1 + a^2t^2)\,dt}{4a(\theta_1 r_1 + \theta_2 r_2)}$$

Неизвестные функции $q^m(x)$ и $q(x)$ будем искать в виде

$$q^m(x) = b_0 \sum_{l=0}^{\infty} \delta_l x^{2l}(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad \delta_0 = 1$$

$$q(x) = b_0^{\frac{1}{m}} \sum_{l=0}^{\infty} \gamma_l x^{2l}(1 - x^2)^{\frac{1}{2m}}, \qquad \gamma_0 = 1 \tag{1.7}$$

Числа δ_l и γ_l при $l \geq 1$ связаны соотношением

$$\delta_l = \sum_{j=1}^{l} \frac{m(m-1)\ldots(m-j+1)}{j!} \sum_{\substack{l_1+l_2+\ldots+l_j = l \\ l_1 \geq 1,\, l_2 \geq 1,\ldots,\, l_j \geq 1}} \gamma_{l_1}\gamma_{l_2}\ldots\gamma_{l_j} \tag{1.8}$$

Положим

$$N(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \nu_l x^l$$

$$J(x) = \int_{-1}^{1} N(t)\sqrt{1 - t^2}\,\ln\left|\frac{t-1}{t-x}\right| dt \tag{1.9}$$

Вычисление интеграла (1.9) и разложение его в ряд Маклорена приводят к следующему равенству:

$$J(x) - J(-1)\frac{(1-x)}{2} = \pi(1 - x^2)\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \nu_{l+2k} v_{l,k} x^l \tag{1.10}$$

где

$$v_{l,\,k} = -\sum_{i=0}^{k} \frac{(2i-3)\,!!}{(2k+l-2i+2)\,(2i)\,!!}$$

$$(0)\,!! = (-1)\,!! = 1; \quad (-3)\,!! = -1$$

Достаточными условиями для выполнения (1.10) являются сходимость ряда Маклорена функции $N(x)$ и абсолютная сходимость двойного ряда в (1.10) при $|x| < 1$.

В случае четной функции $N(x)$ формула (1.10) получена в [2]. Отметим, что в этом случае, как нетрудно убедиться, делая замену переменной $\tau = -t$, интеграл $J(-1) = 0$.

Таблица 1

l \ k	0	1	2	3	5	7	10	15
0	0.5000	0.0000	−0.0208	−0.0208	−0.0161	−0.0125	−0.0091	−0.0060
1	0.3333	0.0333	0.0012	−0.0062	−0.0083	−0.0075	−0.0061	−0.0044
2	0.2500	0.0417	0.0104	0.0010	−0.0039	−0.0046	−0.0043	−0.0034
3	0.2000	0.0429	0.0147	0.0050	−0.0011	−0.0027	−0.0030	−0.0026
5	0.1429	0.0397	0.0175	0.0086	0.0019	−0.0003	−0.0014	0.0016
7	0.1111	0.0353	0.0176	0.0099	0.0035	0.0010	−0.0004	−0.0010
10	0.0833	0.0298	0.0164	0.0102	0.0045	0.0021	0.0005	−0.0004
15	0.0588	0.0232	0.0140	0.0094	0.0050	0.0029	0.0013	0.0003
25	0.0370	0.0160	0.0104	0.0076	0.0046	0.0030	0.0018	0.0008
50	0.0192	0.0089	0.0062	0.0048	0.0033	0.0024	0.0017	0.0010

Значения чисел $v_{l,\,k}$ приведены в табл. 1. Из этой таблицы видно, что числа $v_{l,\,k}$, начиная с $k = 1$, становятся весьма малыми по сравнению с единицей. Формула (1.10) и указанное свойство чисел $v_{l,\,k}$ являются центральными в дальнейших рассуждениях.

Используя условие

$$p(\varphi_0) = 0 \tag{1.11}$$

из (1.6) имеем

$$S_2 = S_1 - \int_{-1}^{1} q^m(t)\,[(1-a^2)(1-a^2t^2) + 4a^2t]\ln\left(\frac{1+a^2t}{1-t}\right)dt -$$

$$- \lambda \int_{0}^{1} q^m(t)\,(1+a^2t)\,(1-t)\,dt \tag{1.12}$$

Преобразуем (1.6), разлагая $\ln(1+a^2tx)$ в ряд Маклорена и используя (1.12), к виду

$$K\left(1+a^2x^2\right)^{1+\frac{2}{m}} q(x)+\left(1-a^2x^2\right)\int\limits_{-1}^{1} q^m(t)\left(1-a^2t^2\right)\ln\left|\frac{t-1}{t-x}\right| dt+$$

$$+4a^2x\left(\int\limits_{-1}^{1} tq^m(t)\ln\left|\frac{t-1}{t-x}\right| dt-\frac{(1-x)}{2}\int\limits_{-1}^{1} tq^m(t)\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| dt\right)+$$

$$+\int\limits_{-1}^{1} q^m(t)\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i+1}\left(a^2tx\right)^{i+1}\left[\left(1-a^2x^2\right)\left(1-a^2t^2\right)+4a^2tx\right]dt-$$

$$-\int\limits_{-1}^{1} q^m(t)\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i+1}\left(a^2t\right)^{i+1}\left[\left(1-a^2\right)\left(1-a^2t^2\right)+4a^2t\right]dt+$$

$$+\lambda\left[\int\limits_{0}^{x} q^m(t)\left(1+a^2tx\right)(x-t)\,dt-\int\limits_{0}^{1} q^m(t)\left(1+a^2t\right)(1-t)\,dt\right]=$$

$$=c\left(1-x^2\right) \qquad (1.13)$$

где

$$c=S_1+\int\limits_{-1}^{1} q^m(t)\left(1-a^2t^2\right)\ln(1-t)\,dt-\int\limits_{-1}^{1} q^m(t)\ln\left(1+a^2t\right)\times$$

$$\times\left[\left(1-a^2\right)\left(1-a^2t^2\right)+4a^2t\right]dt-\lambda\int\limits_{0}^{1} q^m(t)\left(1+a^2t\right)(1-t)\,dt$$

Отметим, что при получении (1.13) использовалось равенство

$$\int\limits_{-1}^{1} tq^m(t)\ln(1-t)\,dt-\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} tq^m(t)\ln\left(\frac{1-t}{1+t}\right)dt=0$$

которое справедливо, так как в силу четности $q(t)$ имеем, делая в интеграле замену переменной $\tau=-t$:

$$\int\limits_{-1}^{1} tq^m(t)\ln(1-t)\,dt=-\int\limits_{-1}^{1}\tau q^m(\tau)\ln(1+\tau)\,d\tau=$$

$$=-\int\limits_{-1}^{1} tq^m(t)\ln(1+t)\,dt$$

Подставим в уравнение (1.13) вместо $q(x)$ и $q^m(x)$ выражения (1.7) и разделим это уравнение на $\pi b_0\left(1-x^2\right)$. Разлагая левую часть получающегося уравнения в ряд Маклорена, используя формулу (1.10) и приравнивая выражения при одинаковых степенях x в левой и правой частях этого уравнения, получим следующую бесконечную систему нелинейных алгебраических уравнений относительно чисел b_0 и γ_l:

$$\xi\sum_{i=0}^{l}\gamma_i s_{l-i}+\sum_{k=0}^{\infty}[(\delta_{l+k}-a^2\delta_{l+k-1})v_{2l,k}-a^2(\delta_{l+k-1}-a^2\delta_{l+k-2})v_{2l-2,k}]+$$

$$+4a^2\sum_{i=0}^{\infty}\delta_{l+k-1}v_{2l-1,k}-\sum_{i=0}^{\infty}\delta_i h_{i,l}+\frac{\lambda}{\pi}\sum_{i=0}^{l-1}\frac{g_i}{2(i+1)}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{2i+1}+a^2\frac{(1-\beta_{l-1-i})}{2i+3}\right)-\frac{\lambda}{\pi}\sum_{i=0}^{\infty}\delta_i f_i=\frac{d}{\pi b_0}\beta_l \tag{1.14}$$

$$(l=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

где

$$\xi=\frac{K}{\pi b_0^{(m-1)/m}} \tag{1.15}$$

s_i — коэффициенты при x^i ряда Маклорена функции

$$(1-x)^{\frac{1}{2m}-1}(1+a^2x)^{1+\frac{2}{m}}$$

$$\gamma_0=\delta_0=1,\quad \delta_{-2}=\delta_{-1}=v_{-2,k}=v_{-1,k}=0,\quad d=c+8a^4\int_0^1 t^2q^m(t)\,dt$$

$$h_{i,l}=\sum_{k=l}^{\infty}a^{4k+2}[\eta_{k-l}\psi_{2k}+\eta_{k+l+1}a^2(4\psi_{2k+1}-\psi_{2k}-\psi_{2k+2})+\eta_{k+l+2}a^4\psi_{2k+2}]$$

$$\eta_i=\frac{(2i-1)!!}{(2i+2)!!},\quad g_i=-\sum_{j=0}^{i}\delta_j\eta_{i-1-j},\quad \psi_i=\frac{1}{i}\ \ (i\geqslant 2),\quad \psi_0=\psi_1=0$$

$$\sum_{i=0}^{-1}=0,\quad f_i=\frac{\pi}{2}\frac{(2i-1)!!}{(2i+2)!!}-(1-a^2)\frac{(2i)!!}{(2i+3)!!}-\frac{\pi a^2}{2}\frac{(2i+1)!!}{(2i+4)!!}$$

$$(-3)!!=-1,\quad (-1)!!=(0)!!=1,\quad \beta_0=1,\quad \beta_i=0\qquad (i\geqslant 1)$$

Из бесконечной системы (1.14) при $l\geqslant 1$ получаем следующую бесконечную систему нелинейных алгебраических уравнений относительно чисел γ_l:

$$\xi\sum_{i=0}^{l}\gamma_i s_{l-i}+\sum_{k=0}^{\infty}[(\delta_{l+k}-a^2\delta_{l+k-1})v_{2l,k}-a^2(\delta_{l+k-1}-a^2\delta_{l+k-2})v_{2l-2,k}]+$$

$$+4a^2\sum_{k=0}^{\infty}\delta_{l+k-1}v_{2l-1,k}-\sum_{i=0}^{\infty}\delta_i h_{i,l}+$$

$$+\frac{\lambda}{\pi}\sum_{i=0}^{l-1}\frac{g_i}{2(i+1)}\left(\frac{1}{2i+1}+\frac{a^2(1-\beta_{l-1-i})}{2i+3}\right)-\frac{\lambda}{\pi}\sum_{i=0}^{\infty}\delta_i f_i=0 \tag{1.16}$$

$$(l=1,\ 2,\ \ldots,\ \delta_{-1}=0,\ \gamma_0=\delta_0=1)$$

При $l \geqslant 1$ числа δ_l выражаются через числа $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_l$ по формуле (1.8).

Для решения рассматриваемой контактной задачи необходимо найти решение системы (1.16) при любых возможных значениях параметров m, φ_0, ξ, λ. Если решение этой системы найдено, то числа b_0 и α легко определятся через числа ξ и φ_0 из первого уравнения системы (1.14) и соотношения (1.12), так как их нахождение сведется к решению двух линейных алгебраических уравнений. Для нахождения чисел ξ и φ_0 служат соотношение (1.15) и условие равновесия

$$\int_0^1 q^m(t)(1-a^2t^2)\,dt = \frac{P}{4ar_1} \tag{1.17}$$

где P — сжимающая сила.

2. В дальнейшем будем считать, что входящие в рассматриваемую задачу параметры m и φ_0 удовлетворяют следующим неравенствам: $1 \leqslant m \leqslant 3$, $0 < \varphi_0 \leqslant 70^\circ$. Этими неравенствами охватываются обычно встречающиеся случаи. Параметр λ, как нетрудно убедиться, удовлетворяет неравенству

$$\pi a\,\frac{1-2\mu_{\max}}{1-\mu_{\max}} \leqslant \lambda \leqslant \pi a\,\frac{1-2\mu_{\min}}{1-\mu_{\min}}$$

где

$$\mu_{\max} = \max(\mu_1, \mu_2), \quad \mu_{\min} = \min(\mu_1, \mu_2)$$

Для обычно встречающихся значений μ у металлических тел имеем

$$0{,}8a \leqslant \lambda \leqslant 2{,}3a \tag{2.1}$$

Перейдем к решению системы (1.16). Для ее решения предлагается эффективный итерационный метод, являющийся обобщением метода, предложенного в [2]. Идея этого метода основана на следующих важных свойствах коэффициентов, входящих в (1.16):

1) числа $v_{l,k}$, начиная с $k=1$, становятся весьма малыми по сравнению с единицей, что было отмечено выше;

2) несложные расчеты показывают, что числа $h_{l,i}$ при $l \geqslant 1$ и $i \geqslant l+1$ и числа f_i при $i \geqslant 2$ также весьма малы по сравнению с единицей.

Перепишем систему (1.16) в виде

$$\xi\sum_{i=0}^{l}\gamma_i s_{l-i} + \delta_{l-2} w_{l,-2} + \delta_{l-1} w_{l,-1} + \delta_l w_{l,0} + \sum_{k=1}^{\infty}\delta_{l+k} w_{l,k} - \sum_{i=0}^{l}\delta_i h_{l,i} -$$
$$- \sum_{k=1}^{\infty}\delta_{l+k} h_{l+k,l} + \frac{\lambda}{\pi}\sum_{i=0}^{l-1}\frac{g_i}{2(i+1)}\left(\frac{1}{2(i+1)} + \frac{a^2(1-\beta_{l-i-1})}{2i+3}\right) -$$
$$- \frac{\lambda}{\pi}\sum_{i=0}^{l}\delta_i f_i - \frac{\lambda}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\delta_{l+k} f_{l+k} = 0 \quad (l = 1, 2, \dots) \tag{2.2}$$

где

$$\delta_{-1}=0,\quad \gamma_0=\delta_0=1,\quad w_{l,k}=v_{2l,k}+a^2(4v_{2l-1,k+1}-v_{2l-2,k+1}-v_{2l,k+1}+$$
$$+a^2 v_{2l-2,k+2}),\qquad v_{l,k}=0\quad \text{при } k<0$$

По предлагаемому методу последовательные приближения $\gamma_l^{(n)}$ (n — номер приближения, $n=1, 2, \ldots$) находятся из следующей бесконечной системы нелинейных алгебраических уравнений:

$$\xi\sum_{i=0}^{l}\gamma_i^{(n)}s_{l-i}+\delta_{l-2}^{(n)}w_{l,-2}+\delta_{l-1}^{(n)}w_{l,-1}+\delta_l^{(n)}w_{l,0}+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\delta_{l+k}^{(n-1)}w_{l,k}-\sum_{i=0}^{l}\delta_i^{(n)}h_{i,l}-\sum_{k=1}^{\infty}\delta_{l+k}^{(n-1)}h_{l+k,l}+$$
$$+\frac{\lambda}{\pi}\sum_{i=0}^{l-1}\frac{g_i^{(n)}}{2(i+1)}\left(\frac{1}{2i+1}+\frac{a^2(1-\beta_{l-1-i})}{2i+3}\right)-\frac{\lambda}{\pi}\sum_{i=0}^{l}\delta_i^{(n)}f_i-$$
$$-\frac{\lambda}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\delta_{l+k}^{(n-1)}f_{l+k}=0\qquad (l=1, 2, \ldots)\tag{2.3}$$

где

$$\delta_{-1}^{(n)}=0,\quad \gamma_0^{(n)}=\delta_0^{(n)}=1,\quad \delta_{l+k}^{(0)}=0$$

При $n\geqslant 1$ и $l\geqslant 1$ под числом $\delta_l^{(n)}$ понимается число, равное правой части формулы (1.8) при $\gamma_i=\gamma_i^{(n)}$ ($i=1, 2, \ldots, l$). Под числом $g_i^{(n)}$ понимаем выражение

$$g_i^{(n)}=-\sum_{j=0}^{i}\delta_j^{(n)}\gamma_{i-1-j}$$

Система (2.3) легко разрешима относительно чисел $\gamma_l^{(n)}$. Из (1.8) и (2.3) получаем

$$\gamma_l^{(n)}=-\frac{1}{\left[\xi+m\left(w_{l,0}-h_{l,l}-\frac{\lambda}{\pi}f_l\right)\right]}\left[\,\gamma_l^{(n)}\left(w_{l,0}-h_{l,l}-\frac{\lambda}{\pi}f_l\right)+\right.$$
$$+\sum_{i=0}^{l-1}\left\{\xi s_{l-i}\gamma_i^{(n)}-\delta_i^{(n)}\left(\frac{\lambda}{\pi}f_i+h_{i,l}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\lambda g_i^{(n)}}{2\pi(i+1)}\left(\frac{1}{2i+1}+\frac{a^2(1-\beta_{l-1-i})}{2i+3}\right)\right\}+w_{l,-2}\delta_{l-2}^{(n)}+w_{l,-1}\delta_{l-1}^{(n)}+$$
$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}\delta_{l+k}^{(n-1)}\left(w_{l,k}-h_{l+k,l}-\frac{\lambda}{\pi}f_{l+k}\right)\right]\qquad (l=1, 2, \ldots)\tag{2.4}$$

где

$$T_l^{(n)} = \sum_{j=2}^{l} \frac{m(m-1)\ldots(m-j+1)}{j!} \sum_{\substack{i_1+i_2+\ldots+i_j=l \\ i_1\geqslant 1,\ i_2\geqslant 1,\ \ldots,\ i_j\geqslant 1}} \gamma_{i_1}^{(n)}, \gamma_{i_2}^{(n)}, \ldots, \gamma_{i_j}^{(n)} \quad (l \geqslant 2) \tag{2.5}$$

При $l=1$ коэффициенты $T_l^{(n)}=0$.

Соотношения (2.4) являются рекуррентными и по ним можно последовательно определить значения чисел $\gamma_l^{(n)}$ при любых l и n.

По формуле (2.4) на ЭЦВМ М-4030 были проведены подробные расчеты последовательных приближений $\gamma_l^{(n)}$ при различных значениях параметров m, φ_0, ξ, λ, лежащих в пределах $1 \leqslant m \leqslant 3$, $0 < \varphi_0 \leqslant 70^\circ$, $0 \leqslant \xi < \infty$ (ξ неотрицателен), $0.8\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi_0}{2} \leqslant \lambda \leqslant 2.3\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi_0}{2}$ (неравенство следует из (2.1)). Эти расчеты показали, что последовательные приближения $\gamma_l^{(n)}$ быстро сходятся к решению системы (1.16).

Для произвольного набора чисел m, φ_0, ξ, λ, P введем последовательные приближения $p^{(n)}(\varphi)$, определяемые по формуле (1.3) и первой формуле в (1.7) при $\delta_l = \delta_l^{(n)}$, в которой величину $b_0^{(n)}$ вычислим из условия равновесия (1.17). Величинам $K^{(n)}$, $\alpha^{(n)}$, $(r_2 - r_1 - H)^{(n)}$ будут соответствовать числа, определяемые из соотношений (1.15), (1.12) и первого уравнения системы (1.14). Эти величины сходятся соответственно к величинам K, α, $(r_2 - r_1 - H)$.

Таблица 2

ξ		$x=0.20$	$x=0.40$	$x=0.60$	$x=0.80$	$x=0.90$	$x=0.95$
0.00	$n=2$	0.97513	0.90524	0.80257	0.68238	0.61993	0.58853
	$n=5$	0.97492	0.90455	0.80143	0.68100	0.61842	0.58684
	$n=6$	0.97492	0.90454	0.80142	0.68101	0.61846	0.58691
0.05	$n=2$	0.96780	0.87436	0.72245	0.46753	0.22217	0.07710
	$n=5$	0.96715	0.87178	0.71659	0.46224	0.22361	0.07075
	$n=6$	0.96716	0.87183	0.71679	0.46251	0.22351	0.07121
0.10	$n=2$	0.96147	0.84754	0.65399	0.33390	0.11485	0.02648
	$n=5$	0.96096	0.84590	0.65203	0.33482	0.11618	0.02909
	$n=6$	0.96097	0.84592	0.65207	0.33482	0.11618	0.02924
0.25	$n=2$	0.94491	0.78187	0.51522	0.17744	0.04363	0.00999
	$n=5$	0.94489	0.78200	0.51569	0.17750	0.04347	0.00890
	$n=6$	0.94489	0.78199	0.51567	0.17749	0.04346	0.00887
0.75	$n=2$	0.91312	0.67388	0.35316	0.08418	0.01689	0.00329
	$n=5$	0.91277	0.67282	0.35189	0.08373	0.01681	0.00331
	$n=6$	0.91277	0.67282	0.35189	0.08373	0.01681	0.00331
2.00	$n=2$	0.88767	0.60191	0.27571	0.05635	0.01059	0.00198
	$n=5$	0.88732	0.60109	0.27509	0.05621	0.01057	0.00198
	$n=6$	0.88732	0.60109	0.27509	0.05621	0.01057	0.00198
5.00	$n=2$	0.87416	0.56797	0.24517	0.04725	0.00868	0.00161
	$n=5$	0.87404	0.56773	0.24501	0.04722	0.00867	0.00161
	$n=6$	0.87404	0.56773	0.24501	0.04722	0.00867	0.00161

Последовательные приближения $p^{(n)}(\varphi)$ быстро сходятся к функции $p(\varphi)$, причем уже начиная с $n=2$, выражение $|p^{(n)}(\varphi)-p(\varphi)|$ при любых значениях φ на участке контакта составляет доли процента от $p(0)$.

Для иллюстрации эффективности предложенного метода в табл. 2 приведены значения функции

$$\frac{p(2\operatorname{arctg}(ax))}{p(0)(1+a^2x^2)^2(1-x^2)^{1/2}}$$

получаемые по второму ($n=2$), пятому ($n=5$) и шестому ($n=6$) приближениям при $m=2.9$, $a=0.5$ ($\varphi_0\approx 53°$), $\mu_1=\mu_2=6.267$ ($\lambda=1$), $E_1=E_2$ и при различных ξ.

Московский научно-исследовательский
и проектный институт систем сетевого
планирования и управления
в промышленности

Поступила 28 VI 1979

Ա. Ս. ՌԱԲԻՆՈՎԻՉ

ՄՈՏԻԿ ՇԱՌԱՎԻՂՆԵՐՈՎ ԱՆՀԱՐԹ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Մոտիկ շառավիղներ ունեցող անհարթ մարմինների համար դիտարկվող կոնտակտային խնդիրը բերված է նորմալ ճնշման նկատմամբ ոչ գծային ինտեգրալ հավասարման։ Տվյալ հավասարման լուծման համար առաջարկված է արագ զուգամիտվող իտերացիոն պրոցես։ Կատարված հաշվարկները ցույց են տվել, որ այդ պրոցեսում երկրորդ մոտավորությունը պրակտիկորեն համընկնում է հավասարման լուծման հետ։

ON SOLUTION OF A CONTACT PROBLEM FOR ROUGH SOLIDS WITH CLOSE RADII

A. S. RABINOVICH

Summary

The contact problem for rough solids with close radii is reduced to a non-linear integral equation with respect to nominal pressure. A rapidly approximated iteration process is suggested for the solution of the equation. The calculations show that in this process the second approximation practically coincides with the solution of the equation.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
2. *Рабинович А. С.* О решении контактных задач для шероховатых тел. Изв. АН СССР, МТТ, 1979, № 1.