ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIII, № 6, 1980 Механика

С. В. БАЗИЛЕВСКИЙ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ КОЛЕБАНИЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

1. Система фундаментальных решений однородных уравнений колебаний сферической оболочки является основой для решения задач о свободных колебаниях, а также задач о вынужденных колебаниях сферических оболочек под действием краевых или сосредоточенных динамических нагрузок. Аналитическое построение фундаментальных решений было выполнено в статьях [1÷3], в работе [4] и в некоторых других работах. Полученные точные аналитические соотношения являются довольно сложными и громоздкими, что затрудняет качественный анализ характера их зависимости от безразмерных параметров задачи: коэффициента Пуассона ν, параметра относительной толщины оболочки $c = 2\sqrt{3(1-\nu^2)}\, R/h$ (здесь R — радиус оболочки, а h — ее толщина) и безразмерного параметра частоты — $k = \sqrt{\dfrac{(1-\nu^2)\rho}{E}}\, R\omega$ (здесь ω — круговая частота колебаний, ρ и E—плотность и модуль упругости материала оболочки). Кроме того, точные решения не дают наглядного представления о характере напряженно-деформированного состояния, в частности, о его изменяемости [5], а между тем, анализ и учет изменяемости напряженно-деформированного состояния оболочки может приводить к существенным упрощениям при решении конкретных задач.

Одним из способов устранения указанных недостатков точных решений является использование асимптотических соотношений для функций и величин, входящих в эти решения. В работе [7] таким образом получены простые соотношения для частот и форм колебаний замкнутой сферической оболочки. В настоящей работе асимптотические разложения по большому параметру $c = 2\sqrt{3(1-\nu^2)}\,\dfrac{R}{h}$ получены в первом приближении, что в большинстве случаев обеспечивает необходимую для практических вычислений точность и максимально упрощает расчетные зависимости. Показано, что эти разложения можно эффективно использовать при расчетах колебаний сферических оболочек, а также для уточнения классификации типов колебаний этих оболочек по принципу [5, 6].

2. Рассмотрим стационарные во времени колебания замкнутой в окружном направлении (по углу φ) сферической оболочки. Разделение переменных в уравнениях колебаний [1, 4] произведем, представив нормальные w и тангенциальные u и v перемещения оболочки в виде

$$u(\theta, \varphi, t) = U_m(\theta) \cos m\varphi\, e^{i\omega t}$$
$$v(\theta, \varphi, t) = V_m(\theta) \sin m\varphi\, e^{i\omega t} \tag{1.1}$$
$$w(\theta, \varphi, t) = W_m(\theta) \cos m\varphi\, e^{i\omega t} \quad m = 0, 1, 2...$$

θ, φ — полярные углы на сфере.

Точное решение однородных уравнений колебаний приводит к выражениям $U_m(\theta)$, $V_m(\theta)$, $W_m(\theta)$, отличающимся от подобных соотношений в [4] тем, что в качестве линейно независимых решений в них используются функции Лежандра $P^m_{\nu_j}(\cos\theta)$ и $P^m_{\nu_j}(-\cos\theta)$, а не функции $P^m_{\nu_j}(\cos\theta)$ и $Q^m_{\nu_j}(\cos\theta)$:

$$U_m(\theta) = -\sum_{j=1}^{3} \gamma_j \left(A_j \frac{dP^m_{\nu_j}(\cos\theta)}{d\theta} + B_j \frac{dP^m_{\nu_j}(-\cos\theta)}{d\theta} \right) +$$
$$+ \frac{m}{\sin\theta} (A_4 P^m_{\nu_4}(\cos\theta) + B_4 P^m_{\nu_4}(-\cos\theta))$$

$$V_m(\theta) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\gamma_j m}{\sin\theta} (A_j P^m_{\nu_j}(\cos\theta) + B_j P^m_{\nu_j}(-\cos\theta)) -$$
$$-\left(A_4 \frac{dP^m_{\nu_4}(\cos\theta)}{d\theta} + B_4 \frac{dP^m_{\nu_4}(-\cos\theta)}{d\theta} \right) \tag{1.2}$$

$$W_m(\theta) = \sum_{j=1}^{3} (A_j P^m_{\nu_j}(\cos\theta) + B_j P^m_{\nu_j}(-\cos\theta))$$

$$\gamma_j = \frac{(1-\nu^2)(2-p_j)p_j + c^2[k^2 - 2(1+\nu)]}{(1+\nu)c^2 p_j} =$$
$$= \frac{k^2 - 2(1+\nu) + (1+\nu)p_j}{(2+k^2-p_j)p_j} \qquad p_j = \nu_j(\nu_j + 1)$$

A_j, B_j — константы интегрирования, определяемые из граничных условий.

Поскольку функции $P^m_{\nu_j}(\cos\theta)$ и $P^m_{\nu_j}(-\cos\theta)$ (в отличие от $P^m_{\nu_j}(\cos\theta)$ и $Q^m_{\nu_j}(\cos\theta)$) обладают между собой симметрией относительно экватора сферы, то в (1.2) можно сразу положить $A_j = 0$ или $B_j = 0$ ($j = 1, 2, 3, 4$), если сферическая оболочка замкнута в полюсе $\theta = 0$ или $\theta = \pi$ и не нагружена в этих точках сосредоточенными нагрузками.

Степени ν_j, ν_4 присоединенных функций Лежандра определяются из уравнений [4]

$$p_j^3 - (4+k^2)p_j^2 + \left[c^2\left(1 - \frac{k^2\gamma}{1-\nu^2}\right) + 2(2+k^2) \right] p_j +$$
$$+ [k^2 - 2(1+\nu)](1-\nu+k^2)\frac{c^2}{1-\nu^2} = 0 \tag{1.3}$$

$$\nu_j = \sqrt{p_j + 1/4} - 1/2 \quad j = 1, 2, 3$$

$$p_4 = 2\left(1 + \frac{k^2}{1-\nu^2}\right) \tag{1.4}$$

$$\nu_4 = \sqrt{p_4 + 1/4} - 1/2$$

Соотношения $(1.1) \div (1.4)$ дают точное решение однородных уравнений колебаний замкнутой вдоль параллели сферической оболочки. С целью упрощения решения проведем исследование его асимптотических свойств по большому параметру c.

3. Анализ уравнения (1.3) показывает, что если частотный параметр k не попадает в узкую переходную зону $\sqrt{1-\nu^2} - \Delta k < k < \sqrt{1-\nu^2} + \Delta k$, то имеется один корень порядка единицы и два «больших» корня порядка c. В переходной зоне происходит резкое увеличение плотности частот собственных колебаний оболочки, а характер решений уравнений колебаний различен слева и справа от этой зоны. Для полуширины переходной зоны на стр. 6 получена оценка $\Delta k = 4.5\, c^{-2/3}$. Вне переходной зоны ищем первое приближение для асимптотических разложений корней в виде $p_j \approx \tilde{p}_j$ или $p_j \approx c\tilde{p}_j$, где $\tilde{p}_j$ — величины порядка единицы. Если $k < \sqrt{1-\nu^2} - \Delta k$, то получаем следующие формулы для корней:

$$p_1 \approx \frac{[k^2 - 2(1+\nu)][1 - \nu + k^2]}{k^2 - (1-\nu^2)}, \qquad p_{2,3} \approx \pm ic\sqrt{1 - \frac{k^2}{1-\nu^2}} \tag{1.5}$$

$$i = \sqrt{-1}$$

а при $k > \sqrt{1-\nu^2} + \Delta k$ корни удобно представить в виде

$$p_{1,3} \approx c\sqrt{\frac{k^2}{1-\nu^2} - 1}, \qquad p_2 \approx \frac{[k^2 - 2(1+\nu)][1 - \nu + k^2]}{k^2 - (1-\nu^2)} \tag{1.6}$$

В соотношениях (1.6) для удобства изложения изменена нумерация больших и малых корней. В переходной зоне, то есть при $\sqrt{1-\nu^2} - \Delta k < k < \sqrt{1-\nu^2} + \Delta k$, разложения (1.5) и (1.6) неприменимы и необходимо построить другие асимптотические разложения. Все корни уравнения (1.3) здесь имеют одинаковый асимптотический порядок $\sim c^{2/3}$ и и удобно произвести следующее «преобразование масштаба» [8] зависимой (p_j) и независимой (k) переменных

$$p_j \approx \tilde{p}_j c^{2/3}, \quad \tilde{k} = \left(\frac{k^2}{1-\nu^2} - 1 - \tilde{\delta} c^{-2/3}\right) c^{2/3} \tag{1.7}$$

Можно показать, что если при $c \to \infty$ порядок p_j отличен от $c^{2/3}$, то в лучшем случае получаем уже рассмотренные выше приближения больших и малых корней. Предполагая справедливыми соотношения (1.7), для определения $\tilde{p}_j$ из (1.3) получим уравнение

$$\widetilde{p}_j^3 - (\widetilde{k} + \widetilde{\delta})\, \widetilde{p}_j - (1+\nu)(2+\nu) = 0 \tag{1.8}$$

Вид решений уравнения (1.8) зависит от знака величины дискриминанта $Q = -\left(\frac{\widetilde{k}+\widetilde{\delta}}{3}\right)^3 + \left[\frac{(1+\nu)(2+\nu)}{2}\right]^2$. Выбирая $\widetilde{\delta}$ таким образом, чтобы Q менял знак при $\widetilde{k} = 0$, находим $\widetilde{\delta} = 3\left[\frac{(1+\nu)(2+\nu)}{2}\right]^{2/3}$. Поскольку в переходной зоне понижения порядка уравнения при асимптотических преобразованиях не происходят, простых формул для корней в явном виде, включающих все параметры задачи, получить не удается. Однако, даже в этом случае асимптотические методы имеют ряд преимуществ перед непосредственным численным решением. Например, удается сразу указать асимптотический порядок корней в переходной зоне, а «неполное» кубическое уравнение (1.8) удобнее для вычислений, чем исходное уравнение (1.3). Выписав решения (1.8) по формулам Кардано, можно, используя прием сращивания асимптотических разложений [8], «сшить» их с решениями (1.5) и (1.6) и построить, таким образом, равномерно пригодные для всех k асимптотические разложения. В отличие от численного решения в процессе сращивания автоматически устанавливается нужная нумерация корней, а также определяется ширина переходной зоны частот. Опуская подробности вычислений и процедуры сращивания, выпишем в первом приближении получающиеся равномерно пригодные разложения для p_j в исходных переменных задачи

$$k < k_0:\quad p_1 \approx \frac{k^2(k^2 - 1 - 3\nu) + (1-\nu^2)(3+\nu)\nu}{k^2 - (1-\nu^2)} + (A+B)\, c^{2/3}$$

$$p_{2,3} \approx \left(-\frac{A+B}{2} \pm i\,\frac{A-B}{2}\sqrt{3}\right) c^{2/3} \tag{1.9}$$

$$k \geqslant k_0:\quad p_1 \approx 2\operatorname{Re} A \cdot c^{2/3},\quad p_3 \approx -(\operatorname{Re} A + \sqrt{3}\operatorname{Im} A)\, c^{2/3}$$

$$p_2 \approx \frac{k^2(k^2 - 1 - 3\nu) + (1-\nu^2)(3+\nu)\nu}{k^2 - (1-\nu^2)} + (-\operatorname{Re} A + \sqrt{3}\operatorname{Im} A)\, c^{2/3} \tag{1.10}$$

а величины k_0, Q, A, B, $\operatorname{Re} A$, $\operatorname{Im} A$ вычисляются по формулам

$$k_0 = \sqrt{(1-\nu^2)\left(1 + 3\left[\frac{(1+\nu)(2+\nu)}{2}\right]^{2/3} c^{-2/3}\right)}$$

$$Q = \left[\frac{1}{3}\left(1 - \frac{k^2}{1-\nu^2}\right)\right]^3 c^2 + \left[\frac{(1+\nu)(2+\nu)}{2}\right]^2 \tag{1.11}$$

$$A = \left[\frac{(1+\nu)(2+\nu)}{2} + \sqrt{Q}\right]^{1/3},\quad B = \left[\frac{(1+\nu)(2+\nu)}{2} - \sqrt{Q}\right]^{1/3}$$

$$\beta = \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\left|\frac{2\sqrt{-Q}}{(1+\nu)(2+\nu)}\right|$$

$$\operatorname{Re} A = c^{1/3}\sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{k^2}{1-\nu^2}-1\right)}\cos\beta$$

$$\operatorname{Im} A = c^{1/3}\sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{k^2}{1-\nu^2}-1\right)}\sin\beta$$

Для практических вычислений, однако, рациональнее использовать вне переходной зоны разложения (1.5) и (1.6), а внутри зоны — разложения (1.9) и (1.10), сохраняя в этих разложениях только члены порядка $c^{2/3}$. При этом необходимо знать ширину переходной зоны $2\Delta k$. Анализ разложений (1.9), (1.10) показывает, что асимптотический порядок Δk равен $\sim c^{-2/3}$, а численные оценки дают значение $\Delta k = 4.5\,c^{-2/3}$, причем на границе переходной зоны максимальная погрешность в определении корней из их асимптотических разложений (1.5), (1.6) или (1.9), (1.10) (с сохранением в последних только членов порядка $c^{2/3}$) не превышает 15% даже для наиболее толстых оболочек с $R/h = 20$ для любых значений ν. Уже при $R/h = 60$ максимальная погрешность не превосходит 8%. Таким образом, установлено, что для сферических оболочек значения частотного параметра, принадлежащие переходной зоне, заключены в узком интервале $\sqrt{1-\nu^2} - 4.5c^{-2/3} < k < \sqrt{1-\nu^2} + 4.5\,c^{-2/3}$, а вне этого интервала для определения p_j применимы простые формулы (1.5) и (1.6).

Формулы для индексов ν_j функций Лежандра легко получить из асимптотических разложений для $p_j = \nu_j(\nu_j+1)$. Для значений k, не принадлежащих переходной зоне, эти формулы имеют простой вид:

при $0 \leqslant k < \sqrt{1-\nu^2} - 4.5\,c^{-2/3}$

$$\nu_1 + 1/2 \approx \sqrt{1/4 + \frac{[k^2-2(1+\nu)][1-\nu+k^2]}{k^2-(1-\nu^2)}}$$

$$\nu_{2,3} + 1/2 \approx (1 \pm i)\frac{c^{1/2}}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{k^2}{1-\nu^2}\right)^{1/4} \tag{1.12}$$

при $\sqrt{1-\nu^2} + 4.5\,c^{-2/3} \leqslant k$,

$$\nu_1 + 1/2 \approx c^{1/2}\left(\frac{k^2}{1-\nu^2}-1\right)^{1/4}, \quad \nu_3 + 1/2 \approx ic^{1/2}\left(\frac{k^2}{1-\nu^2}-1\right)^{1/4}$$

$$\nu_2 + 1/2 \approx \begin{cases} i\sqrt{\dfrac{[2(1+\nu)-k^2][1-\nu+k^2]}{k^2-(1-\nu^2)} - \dfrac{1}{4}} \\ \text{при } k < \sqrt{\dfrac{3}{8}(1+4\nu+\sqrt{17+8\nu})} \\ \sqrt{\dfrac{[k^2-2(1+\nu)][1-\nu+k^2]}{k^2-(1-\nu^2)} + \dfrac{1}{4}} \\ \text{при } k \geqslant \sqrt{\dfrac{3}{8}(1+4\nu+\sqrt{17+8\nu})} \end{cases}$$

Внутри переходной зоны для определения ν_j получены соотношения: при $\sqrt{1-\nu^2} - 4.5\,c^{-2/3} \leqslant k < k_0$

$$\nu_1 + 1/2 \approx c^{1/3}\sqrt{A+B}$$

$$\nu_{2,3} + 1/2 \approx c^{1/3}(A^2 + B^2 - AB)^{1/4} e^{\mp i\psi} \qquad (1.13)$$

$$\psi = \frac{1}{2}\left[\pi - \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\,\frac{A-B}{A+B}\right)\right]$$

при $k_0 \leqslant k < \sqrt{1-\nu^2} + 4.5\,c^{-2/3}$

$$\nu_1 + 1/2 \approx c^{1/3}\sqrt{2\operatorname{Re} A}$$

$$\nu_{2,3} + 1/2 \approx ic^{1/3}\sqrt{\operatorname{Re} A \mp \sqrt{3}\operatorname{Im} A}$$

Полученные формулы с достаточной для инженерных расчетов точностью позволяют определять значения ν_j, а вне узкой переходной зоны удобны для анализа зависимости ν_j от частоты и других параметров задачи.

4. Для вычисления функций Лежандра $P^m_{\nu_j}(\pm\cos\theta)$ при больших (по модулю) значениях степени ν_j также удобно использовать асимптотические разложения. Известны [9] такие разложения по функциям Бесселя вблизи полюсов $\theta \to 0$ или π и по тригонометрическим функциям вдали от полюса, однако, ситуация остается неопределенной при промежуточных значениях θ. Для устранения этого затруднения, используя прием сращивания асимптотических разложений [8], было получено равномерно пригодное для всех θ разложение

$$(\nu_j + 1/2)^{-m} P^m_{\nu_j}(-\cos\theta) \approx \cos(\pi\nu_j) J_m[(\nu_j + 1/2)\theta] +$$

$$+ \sin(\pi\nu_j) N_m[(\nu_j + 1/2)\theta] + (-1)^m J_m[(\nu_j + 1/2)(\pi - \theta)] +$$

$$+ \sqrt{\frac{2}{\pi(\nu_j + 1/2)}}\left(\frac{1}{\sqrt{\sin\theta}} - \frac{1}{\sqrt{\theta}} - \frac{1}{\sqrt{\pi-\theta}}\right)\times$$

$$\times \cos\left[(\nu_j + 1/2)(\pi - \theta) - \frac{\pi}{4} + \frac{m\pi}{2}\right] \qquad (1.14)$$

$J_m(x)$ и $N_m(x)$ — функции Бесселя и Неймана.

Разложение (1.14) удобно использовать, если ν_j — действительная величина, так как тогда и разложение (1.14) действительно. Если же $\nu_j = -1/2 + i\gamma_j$, где γ_j — большое по абсолютной величине число, что имеет место при $k > k_0$, то соответствующее действительное асимптотическое разложение удобнее представить в виде

$$\gamma_j^{-m} P^m_{-1/2+i\gamma_j}(-\cos\theta) \approx \frac{e^{\pi\gamma_j}}{\pi} K_m(\gamma_j\theta) + I_m[\gamma_j(\pi-\theta)] +$$

$$+ \frac{e^{(\pi-\theta)\gamma_j}}{\sqrt{2\pi\gamma_j}} \left(\frac{1}{\sqrt{\sin\theta}} - \frac{1}{\sqrt{\theta}} - \frac{1}{\sqrt{\pi-\theta}} \right) \tag{1.15}$$

где $I_m(x)$ и $K_m(x)$ — модифицированные функции Бесселя мнимого аргумента.

В общем случае комплексных значений ν_j можно использовать разложение (1.14), произведя в нем отделение действительной и мнимой части. Например, если $\nu_j = -1/2 + (1 \pm i)\gamma_j$ ($|\gamma_j| \gg 1$, γ_j — действительное), что соответствует значениям $\nu_{2,3}$ при $0 \leqslant k < \sqrt{1-\nu^2 - 4.5\,c^{-2/3}}$, то получены следующие равномерно пригодные разложения для действительной и мнимой части функции Лежандра:

$$(\sqrt{2}\,\gamma_j)^{-m} \operatorname{Re}[P^m_{\nu_j}(-\cos\theta)] \approx \frac{(-1)^{m+1} e^{\pi\gamma_j}}{\pi} \Big| \sin\left(\pi\gamma_j - \frac{m\pi}{4}\right) \operatorname{kei}_m \sqrt{2}\gamma_j\theta) -$$

$$- \cos\left(\pi\gamma_j - \frac{m\pi}{4}\right) \operatorname{ker}_m(\sqrt{2}\,\gamma_j\theta) \Big| +$$

$$+ \cos\frac{m\pi}{4} \operatorname{ber}_m[\sqrt{2}\gamma_j(\pi-\theta)] + \sin\frac{m\pi}{4} \operatorname{bei}_m[\sqrt{2}\gamma_j(\pi-\theta)] +$$

$$+ \left(\frac{1}{\sqrt{\sin\theta}} - \frac{1}{\sqrt{\theta}} - \frac{1}{\sqrt{\pi-\theta}} \right) \frac{e^{\gamma_j(\pi-\theta)}}{\sqrt{2\sqrt{2}\pi\gamma_j}} \cos\left| \gamma_j(\pi-\theta) - \frac{\pi}{8} + \frac{m\pi}{4} \right| \tag{1.16}$$

$$\pm (\sqrt{2}\,\gamma_j)^{-m} \operatorname{Im}[P^m_{\nu_j}(-\cos\theta)] \approx$$

$$\approx \frac{(-1)^{m+1} e^{\pi\gamma_j}}{\pi} \Big| \cos\left(\pi\gamma_j - \frac{m\pi}{4}\right) \operatorname{kei}_m(\sqrt{2}\gamma_j\theta) +$$

$$+ \sin\left(\pi\gamma_j - \frac{m\pi}{4}\right) \operatorname{ker}_m(\sqrt{2}\gamma_j\theta) \Big| +$$

$$+ \sin\frac{m\pi}{4} \operatorname{ber}_m[\sqrt{2}\gamma_j(\pi-\theta)] - \cos\frac{m\pi}{4} \operatorname{bei}_m[\sqrt{2}\gamma_j(\pi-\theta)] -$$

$$- \left(\frac{1}{\sqrt{\sin\theta}} - \frac{1}{\sqrt{\theta}} - \frac{1}{\sqrt{\pi-\theta}} \right) \frac{e^{\gamma_j(\pi-\theta)}}{\sqrt{2\sqrt{2}\pi\gamma_j}} \sin\left[\gamma_j(\pi-\theta) - \frac{\pi}{8} + \frac{m\pi}{4} \right]$$

$\operatorname{ber}_m(x)$, $\operatorname{bei}_m(x)$, $\operatorname{ker}_m(x)$, $\operatorname{kei}_m(x)$ — функции Кельвина [10].

Формулы (1.14)÷(1.16), как показывают вычисления, дают приемлемую для практических расчетов точность уже при $|\nu_j| > 3$, а при $|\nu_j| \leqslant 3$

для вычисления функций Лежандра рациональнее использовать известные представления в виде гипергеометрических рядов [9], которые при небольших значения $|\nu_j|$ быстро сходятся.

5. Полученные асимптотические соотношения позволяют сделать некоторые выводы качественного характера о напряженно-деформированном состоянии сферической оболочки при колебаниях с заданной частотой. Действительно, из (1.5) и (1.6) легко заметить, что вне переходной зоны «малые» корни p_1 (или p_2) приближенно определяются так же, как в безмоментной теории оболочек, а для «больших» корней $p_{2,3}$ (или $p_{1,3}$) тот же результат можно получить, используя теорию пологих оболочек, то есть уравнения для состояний с большой изменяемостью. Таким образом, вне указанной переходной зоны для решения задачи можно применять «метод расчленения» напряженно-деформированного состояния [5] и для сферической оболочки реализовать классификацию типов ее колебаний, аналогичную данной в [5] для свободных колебаний тонких оболочек произвольного вида. Так, при $k < \sqrt{1-\nu^2} - 4.5\,c^{-2/3}$ из (1.2) и (1.12) следует, что на основное безмоментное медленно изменяющееся напряженно-деформированное состояние оболочки (ν_1 и ν_1) накладывается быстроизменяющееся (благодаря наличию большого параметра $\gamma_{2,3}$ при аргументе θ) состояние ($\nu_{2,3}$) типа осциллирующего краевого эффекта, описываемое функциями (1.16).

В соответствии с [5], такие колебания можно определить как «квазипоперечные с малой изменяемостью». Аналогично для всех диапазонов частот можно указать соответствующие им типы колебаний. Например, из (1.2), (1.12), (1.14) и (1.15) легко получить, что «квазипоперечные колебания с большой изменяемостью» возможны при

$$k > \sqrt{1-\nu^2} + 4.5\,c^{-2/3}$$

Важно отметить, что полученные асимптотические соотношения позволяют в случае сферической оболочки не только определить асимптотический порядок частот [5], но и указать конкретные диапазоны их изменения для колебаний каждого типа. Кроме того, с достаточной для практических вычислений точностью, удается указать границы переходной зоны частот ($\sqrt{1-\nu^2} - 4.5\,c^{-2/3} < k < \sqrt{1-\nu^2} + 4.5\,c^{-2/3}$), внутри которой теряет силу предложенная в [5] классификация колебаний, так как все ν_j согласно (1.13) имеют одинаковый порядок $\sim c^{1/3}$, из-за чего расчленение напряженно-деформированного состояния оболочки на безмоментное и быстроизменяющееся произвести не удается. В переходной зоне происходит сильное увеличение плотности частот собственных колебаний оболочки.

6. Для иллюстрации эффективности полученных асимптотических представлений для решения задач динамики сферических оболочек рассмотрим задачу о собственных осесимметричных колебаниях симметричного относительно экватора и защемленного по краям сферического пояса

с углом раствора α. Если размеры пояса таковы, что все безразмерные собственные частоты k_n удовлетворяют соотношению $k_n > \sqrt{1-\nu^2} + 4.5\, c^{-2/3}$, то для определения функций Лежандра с индексами ν_1 и $\nu_3 = -\frac{1}{2} + i\gamma_3$ можно использовать асимптотические соотношения (1.12), (1.14), (1.15), а при условии $\alpha < \pi - 2\sqrt[3]{\frac{h}{R}}$ — упрощенные соотношения вида

$$P_{\nu_1}(-\cos\theta) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi(\nu_1 + 0.5)\sin\theta}} \cos[(\nu_1 + 0.5)(\pi - \theta) - \pi/4]$$

и

$$P_{\nu_3}(-\cos\theta) \approx e^{\gamma_3(\pi-\theta)} / \sqrt{2\pi\gamma_3 \sin\theta}$$

Для вычисления $P_{\nu_1}(\pm\cos\theta)$ использовались первых два члена разложения в ряд у экватора сферы.

Удовлетворяя граничным условиям $u = w = \frac{dw}{d\theta} = 0$ на краях пояса, получаем систему линейных однородных уравнений для постоянных интегрирования A_j и B_j (1.2), а из условия равенства нулю определителя этой системы — уравнение для определения собственных частот

$$\cos x \operatorname{ch} x - 1 + \frac{2(1+\nu)\alpha}{x\eta_2} \left\{ \frac{2 - p_2 \sin^2\frac{\alpha}{2}}{p_2 \sin\alpha} \sin\frac{x}{2} \left[\cos\frac{x}{2}(\operatorname{ch} x - 1) - \right.\right.$$

$$\left. - \sin\frac{x}{2} \operatorname{sh} x \right] - \frac{6 - (p_2 - 2)\sin^2\frac{\alpha}{2}}{6 - 3(p_2 - 2)\sin^2\frac{\alpha}{2}} \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cos\frac{x}{2} \left[\sin\frac{x}{2}(\operatorname{ch} x + 1) + \right.$$

$$\left.\left. + \cos\frac{x}{2} \operatorname{sh} x \right] \right\} + O(x^{-2}) = 0 \tag{1.17}$$

$$x = \sqrt{p_1}\,\alpha = c^{1/2}\left(\frac{k^2}{1-\nu^2} - 1\right)^{1/4}\alpha, \quad p_2 = \frac{[k^2 - 2(1+\nu)][1 - \nu + k^2]}{k^2 - (1-\nu^2)}$$

$$\eta_2 = \frac{k^2 - (1-\nu^2)}{(1+\nu)(1-\nu+k^2)} \tag{1.18}$$

Если k не является (хотя бы приближенно) корнем уравнений $p_2 = 0$ или $2-(p_2-2)\sin^2\alpha/2 = 0$, то есть не совпадает с собственными частотами преимущественно мембранных колебаний, то частоты изгибных собственных колебаний пояса в первом приближении определяются из уравнения, совпадающего с характеристическим уравнением для собственных частот защемленного по концам стержня

$$\cos x_0 \operatorname{ch} x_0 = 1 \tag{1.19}$$

Первую поправку к корням получаем, разыскивая корни (1.17) в виде разложения по степеням x^{-1}. Тогда для симметричных относительно экватора форм колебаний получаем

$$x = x_0\left[1 + \frac{(1+\nu)^2(8 - p_{20}\alpha^2)}{2x_0^2[k_0^2 - 2(1+\nu)]}\right] \tag{1.20}$$

$$x_0 = 4.73,\quad 10.996, \ldots \frac{\pi}{2}(4j-1);\quad j = 1, 2, 3\ldots$$

а для кососимметричных форм —

$$x = x_0\left[1 - \frac{(1+\nu)^2\alpha^2 p_{20}[24 - (p_{20}-2)\alpha^2]}{3x_0^2[k_0^2 - 2(1+\nu)][8 - (p_{20}-2)\alpha^2]}\right] \tag{1.21}$$

$$x_0 = 7.859,\quad 14.137, \ldots \frac{\pi}{2}(4j+1);\quad j = 1, 2, 3\ldots$$

причем x_0 является корнем уравнения (1.19), а k_0 и p_{20} определяются через заданное x_0 как решения уравнений (1.18). Вычисляя следующее приближение в выражениях для x, получаем, что формулы (1.20) и (1.21) позволяют определить корни (1.17) с точностью не менее 5% при $\alpha \leqslant 3.2\sqrt{\frac{h}{R}}$ для первой симметричной и, по крайней мере, при $\alpha \leqslant 2.6\sqrt[3]{\frac{h}{R}}$ для первой кососимметричной формы колебаний. Следовательно, предельный раствор пояса, при котором еще справедливы формулы первого приближения (1.20) и (1.21), быстро расширяется при увеличении номера частоты.

Таким образом, в отличие от точного решения рассмотренной задачи в присоединенных функциях Лежандра, асимптотические соотношения во многих случаях позволяют не только получить характеристическое уравнение (1.17), содержащее только элементарные функции, но и найти в явном виде его решения, соответствующие изгибным собственным колебаниям сферического пояса.

В заключение, автор выражает искреннюю благодарность доктору физ.-мат. н. В. И. Малому за полезные советы и замечания при обсуждении работы, которые несомненно способствовали ее улучшению.

ЦНИИ проектстальконструкция Поступила 28 XII 1979

Ս. Վ. ԲԱԶԻԼԵՎՍԿԻ

ՍՖԵՐԻԿ ԹԱՂԱՆԹԻ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՀԱՄԱՐ ԱՍԻՄՊՏՈՏԱԿԱՆ ՄՈՏԵՑՈՒՄՆԵՐ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Առաջին մոտավորությունում ստացվել են սֆերիկ թաղանթի տատանումների հիմնական լուծումների համար ասիմպտոտական վերլուծությունները։

Այդ ասիմպտոտիկաների հիման վրա պարզացվել է սֆերիկ թաղանթի տատանումների տարբեր ձևերի դասակարգումը: Ստացված ասիմպտոտական արտահայտությունները կիրառվում են նաև սֆերիկ գոտու սեփական տատանումների հաճախականության հաշվարկի համար:

ASYMPTOTICS FOR SOLUTIONS OF THE EQUATIONS IN VIBRATION OF A SPHERICAL SHELL

S. V. BASILEVSKY

Summary

First terms of asymptotic expansions for fundamental solutions of the equations in motion of a spherical shell are determined. Based on these asymptotics the classification of different types of vibrations of a shperical sl ell is given. The asymptotics are also applied to the calculation of frequencies of free vibrations of a spherical belt.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лужин О. В.* К вопросу о свободных колебаниях тонкой сферической оболочки. Строит. механика и расчет сооружений, 1961, № 3.
2. *Лизарев А. Д.* О низших частотах собственных осесимметричных колебаний непологих сферических оболочек. Инж. ж. МТТ, 1967, № 3.
3. *Wilkinson I. P., Kalnins A.* On Nonsymmetric Dynamic Problems of Elastic Spherical Shells. Applied Mechanics, Tr. ASME, ser. E, 1965, vol. 32, No. 3.
4. *Рабинович И. М., Лужин О. В.* и др. Расчет сооружений на импульсивные воздействия. М., «Стройиздат», 1970.
5. *Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е.* Свободные колебания тонких упругих оболочек. М., «Наука», 1979.
6. *Гольденвейзер А. Л.* Качественный анализ свободных колебаний упругой тонкой оболочки. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1, 94÷108.
7. *Малый В. И., Базилевский С. В.* Об определении частот и форм свободных колебаний замкнутой сферической оболочки. Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1980, т. XXXIII, № 5.
8. *Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике. М., «Мир», 1972.
9. *Robin L.* Fonctions spheriques de Legendre et fonctions spheroidal. Ed. Gauthier—Villars, Paris, 1957÷1959.
10. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. М., «Наука», 1977.