ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIII, № 6, 1980 Механика

С. Г. АВАГЯН

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ПРОНИКАНИЯ ТЕЛ В ВЕСОМУЮ ЖИДКОСТЬ

Рассматриваются задачи о проникании тонкого конуса в весомую сжимаемую жидкость. Вначале решается задача для жидкости со свободной поверхностью. Решена также задача проникания в жидкость, ограниченную упругой мембраной.

§ 1. *Проникание тонкого конуса в сжимаемую весомую жидкость*

Рассматривается задача проникания тонких тел в сжимаемую весомую жидкость. При проникании конуса возникает осесимметричное течение, поэтому потенциал скорости $\varphi = \varphi(r, z, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \tag{1.1}$$

Начало координат выбрано в точке пересечения вершины конуса с поверхностью жидкости, ось r направлена по поверхности жидкости, ось z направлена вниз перпендикулярно к поверхности жидкости. Начальные условия:

$$\varphi(z, r, 0) = \frac{\partial\varphi(z, r, 0)}{\partial t} = 0 \tag{1.2}$$

Граничное условие на теле будет

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} \sim \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \dot{H}(t)\beta \tag{1.3}$$

где $H(t)$ — закон проникания конуса, β — угол полураствора конуса. Так как движение потенциальное, то давление внутри жидкости вычисляется из интеграла Коши—Лагранжа, откуда получится

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - g\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0 \tag{1.4}$$

Решение задачи ищем методом источников в сочетании с интегральными преобразованиями. В силу линейности задачи можно полагать

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 \tag{1.5}$$

где φ_0 соответствует решению задачи о движении тела в безграничной среде $-\infty < z < \infty$, а φ_1 — отражению волн от свободной поверхности. Функцию φ_0 ищем в виде потенциала запаздывающих источников

$$\varphi_0 = -\frac{1}{4\pi}\int_0^{\infty}\frac{q(z_1,t')}{R}\,dz_1 \tag{1.6}$$

где $t' = t - \frac{R}{a}$ — запаздывающее время, $R = \sqrt{(z_1 - z)^2 + r^2}$, a — скорость звука в невозмущенной жидкости. Можно показать [1], что при $r \to 0$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r\to 0} = \frac{1}{2\pi}\frac{q(z,t)}{r} + 0(q) \tag{1.7}$$

Из (1.3) и (1.7) получим, что

$$q(z_1, t) = 2\pi\beta^2 \dot{H}(H - z_1) \tag{1.8}$$

Удобно рассматривать решение для отдельных источников φ^0 и $\varphi = \int_0^{\infty}\varphi^0\,dz_1$. Изображение для φ_0^0 будет

$$\overline{\varphi}_0^0 = -\frac{\overline{q(z_1,t)}}{4\pi R}e^{-s\frac{R}{a}}$$

В силу того, что

$$\frac{e^{-s\frac{R}{a}}}{R} = \int_0^{\infty}\frac{ke^{-|z_1-z|\sqrt{k^2+\frac{s^2}{a^2}}}}{\sqrt{k^2+\frac{s^2}{a^2}}}J_0(kr)\,dk, \text{ то}$$

$$\overline{\varphi}_0^0 = -\frac{\overline{\beta^2\dot{H}(t)[H(t)-z_1]}}{2}\int_0^{\infty}\frac{ke^{-|z_1-z|\sqrt{k^2+\frac{s^2}{a^2}}}}{\sqrt{k^2+\frac{s^2}{a^2}}}J_0(kr)\,dk \tag{1.9}$$

Изображение отраженных волн φ_1^0 ищем в виде

$$\overline{\varphi}_1^0 = \int_0^{\infty}\frac{e^{-(z_1+z)\sqrt{k^2+\frac{s^2}{a^2}}}kA}{\sqrt{k^2+\frac{s^2}{a^2}}}J_0(kr)\,dk \tag{1.10}$$

Применяя к (1.4) преобразование Лапласа, можно получить

$$s^2\overline{\varphi} - g\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial z} = 0, \qquad z = 0 \tag{1.11}$$

Так как $\overline{\varphi}^0 = \overline{\varphi}_0^0 + \overline{\varphi}_1^0$, имеем

$$A = \frac{\beta^2 H(t)[H(t) - z_1]}{2} \frac{\left(s^2 - g\sqrt{k^2 + \frac{s^2}{a^2}}\right)}{s^2 + g\sqrt{k^2 + \frac{s^2}{a^2}}}$$

Поэтому для $\bar{\varphi}_1^0$ получим

$$\bar{\varphi}_1^0 = \frac{\beta^2 H(t)[H(t) - z_1]}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-(z_1+z)\sqrt{k^2 + \frac{s^2}{a^2}}} k\left(s^2 - g\sqrt{k^2 + \frac{s^2}{a^2}}\right)}{\sqrt{k^2 + \frac{s^2}{a^2}}\left(s^2 + g\sqrt{k^2 + \frac{s^2}{a^2}}\right)} \times$$

$$\times J_0(kr)\,dk \qquad (1.12)$$

Для простоты принимаем, что проникание происходит с постоянной скоростью V_0. Для нахождения $\bar{\varphi}_1^0$ разложим выражение

$$\frac{s^2 - g\sqrt{k^2 + s^2/a^2}}{s^2 + g\sqrt{k^2 + s^2/a^2}}$$

в ряд по степеням $\frac{g\sqrt{k^2 + s^2/a^2}}{s^2}$. Тогда из (1.12) имеем

$$\bar{\varphi}_1^0 = \frac{\beta^2 V_0^2}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-s\frac{z_1}{V_0}} k e^{-(z_1+z)\sqrt{k^2 + \frac{s^2}{a^2}}}}{s^2\sqrt{k^2 + \frac{s^2}{a^2}}} J_0(kr)\,dk +$$

$$+ \beta^2 V_0^2 \int_0^\infty \frac{e^{-s\frac{z_1}{V_0}} k e^{-(z_1+z)\sqrt{k^2 + \frac{s^2}{a^2}}}}{s^2\sqrt{k^2 + \frac{s^2}{a^2}}} J_0(kr) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{g}{s^2}\sqrt{k^2 + \frac{s^2}{a^2}}\right)^n dk$$

Обозначая значение $\bar{\varphi}_1^0$ при $g = 0$ через $\bar{\Phi}_1^0$, получим

$$\bar{\varphi}_1^0 = \bar{\Phi}_1^0 + \frac{2g}{s^2}\frac{\partial \bar{\Phi}_1^0}{\partial z} + \frac{2g^2}{s^4}\frac{\partial^2 \bar{\Phi}_1^0}{\partial z^2} + \cdots$$

где

$$\bar{\Phi}_1^0 = \frac{\beta^2 V_0^2}{2} \frac{e^{-s\left(\frac{z_1}{V_0} + \frac{R_0}{a}\right)}}{s^2 R_0}; \qquad R_0 = \sqrt{(z_1 + z)^2 + r^2}$$

Отсюда

$$\Phi_1^0 = \frac{\beta^2 V_0^2}{2}\left(t - \frac{z_1}{V_0} - \frac{R_0}{a}\right)\frac{1}{\sqrt{(z_1 + z)^2 + r^2}}$$

Для нахождения φ_1^0 воспользуемся теоремой о свертке. Тогда

$$\varphi_1^0 = \Phi_1^0 + 2g \int\limits_0^{t-\frac{z_1}{V_0}-\frac{R_0}{a}} t'\left(t - t' - \frac{z_1}{V_0}\right)\frac{\beta^2 V_0^2}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R_0}\right)dt' +$$

$$+ \frac{2g^2}{3!}\int\limits_0^{t-\frac{z_1}{V_0}-\frac{R_0}{a}} t'^3\left(t - t' - \frac{z_1}{V_0}\right)\frac{\beta^2 V_0^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{R_0}\right)dt' + \cdots$$

Отсюда найдем

$$\frac{\partial\varphi_1^0}{\partial t} = \frac{\beta^2 V_0^2}{2}\frac{1}{R_0} + \frac{\beta^2 V_0^2}{2} g\left(t - \frac{z_1}{V_0} - \frac{R_0}{a}\right)^2 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R_0}\right) +$$

$$+ \frac{g^2\beta^2 V_0^2}{4!}\left(t - \frac{z_1}{V_0} - \frac{R_0}{a}\right)^4 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{R_0}\right) + \frac{g^3\beta^2 V_0^2}{6!}\left(t - \frac{z_1}{V_0} - \frac{R_0}{a}\right)^6 \frac{\partial^3}{\partial z^3}\left(\frac{1}{R_0}\right) + \ldots$$

А. Сначала рассмотрим дозвуковое движение $V_0 < a$. Имеем

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} = \int\limits_0^{\gamma}\frac{\partial\varphi_1^0}{\partial t}dz_1, \text{ где } \gamma = V_0\frac{at - z}{a + V_0}$$

— предел интегрирования при $r \approx 0$, найденный подобно [4]. Тогда получим на теле

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} = \frac{\beta^2 V_0^2}{2}\ln\frac{\gamma + z + \sqrt{(\gamma + z)^2 + r^2}}{z + \sqrt{z^2 + r^2}} +$$

$$+ \frac{g\beta^2 V_0^2}{2}\int\limits_0^{\gamma}\left(t - \frac{z_1}{V_0} - \frac{R_0}{a}\right)^2 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R_0}\right)dz_1 +$$

$$+ \frac{g^2\beta^2 V_0^2}{24}\int\limits_0^{\gamma}\left(t - \frac{z_1}{V_0} - \frac{R_0}{a}\right)^4 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{R_0}\right)dz_1 + \cdots \tag{1.13}$$

Для дальнейшего вычисления оставим только два члена. Из (1.8) найдем φ_0^0, а затем

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial t} = \int\limits_0^{\alpha}\frac{\partial\varphi_0^0}{\partial t}dz_1 = -\frac{\beta^2 V_0^2}{2}\ln\frac{\alpha - z + \sqrt{(\alpha - z)^2 + r^2}}{-z + \sqrt{z^2 + r^2}}$$

где $\alpha = V_0\dfrac{at + z}{a + V_0}$ — предел интегрирования, определяемый подобно [4]

Окончательно для $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$ получится

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-\frac{\beta^2V_0^2}{2}\ln\frac{\alpha-z+\sqrt{(\alpha-z)^2+r^2}}{-z+\sqrt{z^2+r^2}}+$$

$$+\frac{\beta^2V_0^2}{2}\ln\frac{\gamma+z+\sqrt{(\gamma+z)^2+r^2}}{z+\sqrt{z^2+r^2}}+$$

$$+\frac{g\beta^2V_0^2}{2}\left[\frac{\left(t-\frac{\gamma}{V_0}-\frac{\sqrt{(\gamma+z)^2+r^2}}{a}\right)^2}{\sqrt{(\gamma+z)^2+r^2}}-\frac{\left(t-\frac{\sqrt{z^2+r^2}}{a}\right)^2}{\sqrt{z^2+r^2}}-\frac{4\gamma}{aV_0}+\right.$$

$$+\left(\frac{t}{a}+\frac{z}{aV_0}\right)\ln\frac{(\gamma+z)^2+r^2}{z^2+r^2}-\left(\sqrt{(\gamma+z)^2+r^2}-\sqrt{z^2+r^2}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{2}{V_0^2}+\frac{2}{a^2}\right)+\left(\frac{2t}{V_0}+\frac{2z}{V_0^2}\right)\ln\frac{\gamma+z+\sqrt{(\gamma+z)^2+r^2}}{z+\sqrt{z^2+r^2}}+$$

$$\left.+\frac{2r}{aV_0}\operatorname{arctg}\frac{\gamma r}{r^2+z(\gamma+z)}\right]\qquad(1.14)$$

Давление вычисляется по формуле

$$\frac{p}{\rho_0}=-\frac{\partial\varphi}{\partial t}+gz+\frac{p_0}{\rho_0}-\frac{V^2}{2}\qquad(1.15)$$

Сила сопротивления через давление $P=p-p_0$ найдется по формуле

$$Q=\int_0^{V_0t}P\beta2\pi\beta(V_0t-z)\,dz=-2\pi\rho_0\beta^2\int_0^{V_0t}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}-gz+\frac{V_0^2\beta^2}{2}\right](V_0t-z)\,dz$$

$$(1.16)$$

Ввиду малости $\frac{V^2}{2}$ в (1.16) оставлено только основное слагаемое $\frac{\beta^2V_0^2}{2}$. Там, где это не приводит к особенностям, в (1.14) пренебрегаем r. После этих упрощений из (1.16) получим

$$Q=-2\pi\rho_0\beta^4V_0^4t^2\left\{\frac{1+\ln4\beta^2}{4}+\frac{\gamma}{4}\left[(M+2)\ln\frac{16}{1+M}+\right.\right.$$

$$+\frac{2}{3}(1+M)\ln\frac{2}{1+M}-\frac{5}{3}(2+M)\ln2-2\ln\frac{2}{\beta}+\frac{8}{3}-$$

$$\left.\left.-\frac{2}{3\beta^2}+\frac{M^3+4M^2-3M-6}{3(1+M)}\right]\right\}\qquad(1.17)$$

где $M=\frac{V_0}{a}$.

При $V_0 = a$

$$Q = -2\pi\rho_0\beta^4 V_0^4 t^2 \left\{ \frac{1+\ln 4\beta^2}{4} + \frac{\eta}{4}\left[4\ln 2 - 2\ln\frac{2}{\beta} + 2 - \frac{2}{3\beta^2} \right] \right\} \qquad (1.18)$$

Б. При сверхзвуковом движении $V_0 > a$. Для $z < at$ все расчеты те же, что и при дозвуковом проникании, а для $at < z < V_0 t$ надо учесть тот факт, что свободная поверхность не влияет на этот участок и слагаемыми, содержащими g, надо пренебречь. На этом участке давление на теле, как в работе [4], можно найти по формуле

$$p = \frac{1}{2}\rho_0\beta^2 V_0^2 \int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{dz_1}{\sqrt{(z_1 - z)^2 + r^2}} = \frac{1}{2}\rho_0 V_0^2\beta^2 \ln\frac{4}{\beta^2(M^2-1)} \qquad (1.19)$$

где

$$\xi_1 = V_0\frac{z - at}{V_0 - a}; \quad \xi_2 = V_0\frac{z + at}{V_0 + a}$$

Для силы сопротивления при $V_0 > a$ получится

$$Q = -2\pi\rho_0\left\{ \int\limits_0^{at} (V_0 t - z)\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,dz - \int\limits_{at}^{V_0 t} \frac{\beta^2 V_0^2}{2}(V_0 t - z)\ln\frac{4}{\beta^2(M^2-1)}\,dz - \right.$$

$$\left. - g\,\frac{V_0^3 t^3}{6} + \frac{V_0^4 t^2\beta^2}{4} \right\} = -2\pi\rho_0\beta^4 V_0^4 t^2 \left\{ -\frac{1}{2}\ln\frac{2}{\beta} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln\frac{(1+M)^2}{M} + \right.$$

$$+ \frac{\eta}{2}\left[\left(\frac{2}{3}M + \frac{4}{3}\right)\ln\frac{1+M}{M} - \frac{1}{3} - \frac{(1+M)^2}{6M} + \frac{M}{6} - \right.$$

$$- \left(1 - 3M\beta^2 - \frac{M^2\beta^2}{2} + M^2\beta^4\right)\ln\frac{1 - M\beta^2 + \sqrt{(1 - M\beta^2)^2 + \beta^2 M^2}}{M\beta} +$$

$$+ \left(\sqrt{(1 - M\beta^2)^2 + \beta^2 M^2} - \beta M\right)\left(2 + \frac{1}{M} - 2\beta^2 M\right) - \frac{1}{3\beta^2} + \beta^2 M^2 -$$

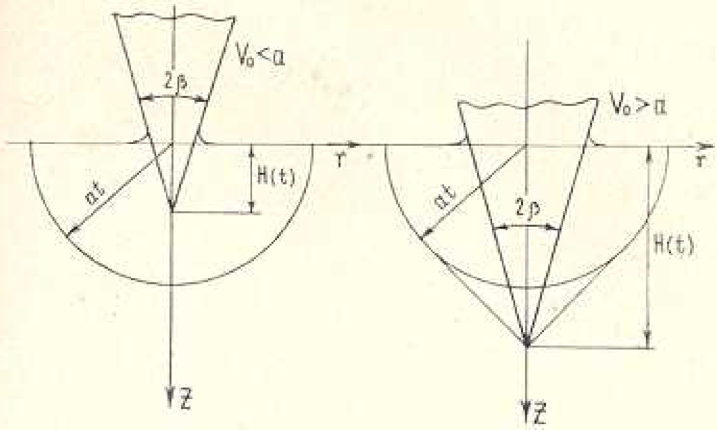
$$- \left(\frac{2}{M} + 1\right)\left(\frac{\sqrt{(1 - \beta^2 M)^2 + \beta^2 M^2}\,(1 - \beta^2 M)}{2} + \frac{\beta^3 M^2}{2}\right) - \frac{\beta^3 M^2}{3} +$$

$$\left.\left. + \frac{\sqrt{[(1 - \beta^2 M)^2 + \beta^2 M^2]^3}}{3M} - \beta^2 M\sqrt{(1 - \beta^2 M)^2 + \beta^2 M^2} \right] \right\} \qquad (1.20)$$

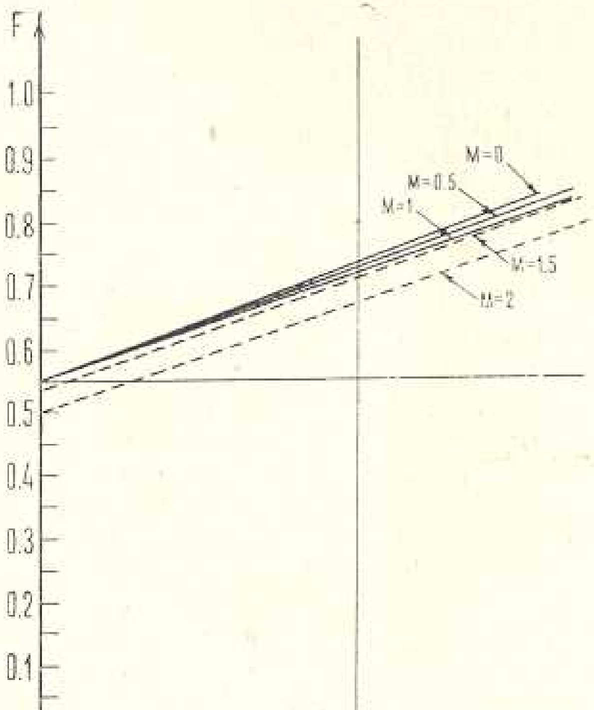
Для $M = 1$ имеем

$$Q = -2\pi\rho_0\beta^4 V_0^4 t^2 \left\{ \frac{1+\ln 4\beta^2}{4} + \frac{\eta}{4}\left(4\ln 2 - 2\ln\frac{2}{\beta} + 2 - \frac{2}{3\beta^2}\right) \right\}$$

График зависимости $F = \frac{Q}{2\pi\rho_0\beta^4 V_0^4 t^2}$ от $\eta = \frac{gt}{V_0}$ дан на фиг. 2. Как видно, в дозвуковой области с увеличением $\frac{V_0}{a}$ F уменьшается. Для сверхзвуковых чисел в некотором диапазоне η, F больше, чем для дозвукового проникания. При отсутствии силы тяжести (1.16)—(1.20) переходят в решение, полученное в [1, 3, 4].



Фиг. 1.



Фиг. 2.

§ 2. *Проникание тонкого тела в сжимаемую жидкость, ограниченную тонкой мембраной*

Используя уравнение колебания круглой мембраны

$$\rho\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) - (p - p_0) \tag{2.1}$$

уравнение Коши—Лагранжа

$$p - p_0 + \rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \rho_0 g z = 0 \tag{2.2}$$

и условие на поверхности жидкость-мембрана $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial z}$, получим для $z = 0$

$$-\rho\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \rho_0\,\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \rho_0 g z = 0$$

или дифференцируя по t и считая, что $\dfrac{\partial z}{\partial t} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial z}$, получим

$$-\rho\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right) + T\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)\right] + \rho_0\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \rho_0 g\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \tag{2.3}$$

где ρ—плотность, T—натяжение мембраны. В силу линейности

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 \tag{2.4}$$

для решения задачи, делая соответствующие выкладки, как и в § 1, получим уравнение (1.9) и (1.10). Исходя из этих уравнений и (2.3), (2.4), найдем

$$A = \frac{Tk^3 + \rho s^2 k + \rho_0 g k - \rho_0 s^2 \dfrac{k}{\sqrt{k^2 + s^2/a^2}}}{Tk^3 + \rho s^2 k + \rho_0 g k + \rho_0 s^2 \dfrac{k}{\sqrt{k^2 + s^2/a^2}}}\,\overline{B} \tag{2.5}$$

где $\overline{B} = -\dfrac{\overline{\beta^2 \dot{H}(t)\,|H(t) - z_1|}}{2}$.

Тогда для $\overline{\varphi}_1^0$ из (1.10) для постоянной скорости $H(t) = V_0$ получим

$$\overline{\varphi}_1^0 = \frac{\beta^2 V_0^2}{2}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-(z_1+z)\sqrt{k^2+\frac{s^2}{a^2}}}\,k e^{-s\frac{z_1}{V_0}}}{s^2\sqrt{k^2 + \dfrac{s^2}{a^2}}}\,J_0(kr)\left[-1 + \vphantom{\frac{2}{1}}\right.$$

$$\left. + \frac{2}{1 + \dfrac{\sqrt{k^2 + s^2/a^2}}{\rho_0 s^2}\,(Tk^2 + \rho s^2 + \rho_0 g)}\right] dk \tag{2.6}$$

Считая, что T, ρ, g имеют малые значения, можем записать

$$\frac{2}{1+\frac{\sqrt{k^2+s^2/a^2}}{\rho_0 s^2}(Tk^2+\rho s^2+\rho_0 g)}=$$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{\sqrt{k^2+s^2/a^2}}{\rho_0 s^2}(Tk^2+\rho s^2+\rho_0 g)\right]^n$$

Взяв первых два члена, получим из (2.6)

$$\bar{\varphi}_1^0=\frac{\beta^2 V_0^2}{2}\int_0^{\infty}\frac{e^{-(z_1+z)\sqrt{k^2+\frac{s^2}{a^2}}}ke^{-s\frac{z_1}{V_0}}J_0(kr)}{s^2\sqrt{k^2+s^2/a^2}}\Bigg[1-$$

$$-\frac{2\sqrt{k^2+s^2/a^2}}{\rho_0 s^2}(Tk^2+\rho s^2+\rho_0 g)\Bigg]dk \qquad (2.7)$$

Проделав соответствующие выкладки, как и в § 1, получим

$$\bar{\varphi}_1^0=\bar{\Phi}_1^0+\frac{2\rho}{\rho_0}\frac{\partial\bar{\Phi}_1^0}{\partial z}+\frac{2g}{s^2}\frac{\partial\bar{\Phi}_1^0}{\partial z}-$$

$$-\frac{T\beta^2 V_0^2}{\rho_0}\int_0^{\infty}\frac{e^{-(z_1+z)\sqrt{k^2+\frac{s^2}{a^2}}}k^3e^{-s\frac{z_1}{V_0}}}{s^4}J_0(kr)\,dk$$

Для вычисления этого интеграла, перепишем его так

$$J=\int_0^{\infty}\frac{e^{-(z_1+z)\sqrt{k^2+\frac{s^2}{a^2}}}e^{-s\frac{z_1}{V_0}}k}{s^2}\left[\frac{1}{s^2}\left(k^2+\frac{s^2}{a^2}\right)-\frac{1}{a^2}\right]J_0(kr)\,dk$$

отсюда

$$J=\frac{1}{s^2}\frac{\partial^3\bar{\Phi}_1^0}{\partial z^3}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial\bar{\Phi}_1^0}{\partial z}$$

поэтому

$$\bar{\varphi}_1^0=\bar{\Phi}_1^0+2\frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial\bar{\Phi}_1^0}{\partial z}+\frac{2g}{s^2}\frac{\partial\bar{\Phi}_1^0}{\partial z}+\frac{2T}{\rho_0}\frac{1}{s^2}\frac{\partial^3\bar{\Phi}_1^0}{\partial z^3}-\frac{2T}{a^2\rho_0}\frac{\partial\bar{\Phi}_1^0}{\partial z}$$

где $\bar{\Phi}_1^0=\frac{\beta^2 V_0^2}{2}\frac{e^{-s\left(\frac{z_1}{V_0}+\frac{R_0}{a}\right)}}{s^2 R_0}$ и $\Phi_1^0=\frac{\beta^2 V_0^2}{2}\left(t-\frac{z_1}{V_0}-\frac{R_0}{a}\right)\frac{1}{R_0}$

$$R_0=\sqrt{(z_1+z)^2+r^2}$$

Для нахождения φ_1^0 воспользуемся теоремой о свертке. Тогда

$$\varphi_1^0 = \Phi_1^0 + 2\rho \int\limits_0^{t-\frac{z_1}{V_0}-\frac{R_0}{a}} t'\left(t-t'-\frac{z_1}{V_0}\right)\frac{\beta^2 V_0^2}{2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{dt'}{\sqrt{(z+z_1)^2+r^2}} +$$

$$+\frac{2T}{\rho_0}\frac{\beta^2 V_0^2}{2}\int\limits_0^{t-\frac{z_1}{V_0}-\frac{R_0}{a}} t'\left(t-t'-\frac{z_1}{V_0}\right)\frac{\partial^3}{\partial z^3}\frac{dt'}{\sqrt{(z_1+z)^2+r^2}} +$$

$$+2\frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial \Phi_1^0}{\partial z} - \frac{2T}{a^2\rho_0}\frac{\partial \Phi_1^0}{\partial z} \tag{2.8}$$

Повторяя выкладки § 1, получим для силы сопротивления при $V_0 < a$ соотношение

$$Q = -2\pi\rho_0\beta^4 V_0^4 t^2 \left\{\frac{1+\ln 4\beta^2}{4} + \frac{\eta}{4}\left[(M+2)\ln\frac{16}{1+M} + \frac{8}{3} + \right.\right.$$

$$+\frac{2}{3}(1+M)\ln\frac{2}{1+M} - \frac{5}{3}(2+M)\ln 2 - 2\ln\frac{2}{\beta} +$$

$$\left.+\frac{M^3+4M^2-3M-6}{3(1+M)} - \frac{2}{3\beta^2}\right] + \lambda\left[(1+2M)\ln 2 - M - \ln\frac{1}{\beta}\right] +$$

$$+\frac{\alpha}{2}\left[\frac{26}{3}M - \frac{2M\pi}{\beta^2} + \frac{1}{\beta}(2-4M+2M\pi) + \right.$$

$$+\left(22M^2+9M^3+\frac{19}{4}M-4\right)\ln\frac{1}{\beta} +$$

$$\left.\left.+\frac{9}{2}M\ln 2 + \left(\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{105}{4}\right)M^2 - 2 - (7+4\ln 2)M^3\right]\right\} \tag{2.9}$$

где $\lambda = \dfrac{\rho}{\rho_0 V_0 t}$, $\alpha = \dfrac{T}{\rho_0 V_0^3 t}$

Для

$$\beta = 0.1,\quad M = 0.5,\quad \alpha = 0.001,\quad \lambda = 0.01,\qquad F = \frac{Q}{2\pi\rho_0\beta^4 V_0^4 t^2}$$

Имеем

$$F \simeq 0.55 + 8.68\,\eta + 1.5\lambda + 137\alpha = 0.702 + 8.68\,\eta$$

Таким образом, при наличии силы тяжести, сила сопротивления при прочих равных условиях возрастает с увеличением безразмерного параметра η.

Автор благодарит А. Г. Багдоева за руководство работой и за постоянное внимание к работе.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 22 II 1980

Ս. Գ. ԱՎԱԳՅԱՆ

ԿՇԻՌ ՈՒՆԵՑՈՂ ՀԵՂՈՒԿԻ ՄԵՋ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ԹԱՓԱՆՑՄԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Ամփոփում

Ուսումնասիրվում է բարակ կոնի սեղմելի և կշիռ ունեցող հեղուկի մեջ, թափանցելու վերաբերյալ խնդիրները։ Սկզբում լուծվել է խնդիրը ազատ մակերևույթով հեղուկի համար։ Լուծված է նաև թափանցման խնդիրը, առաձգական թաղանթով ծածկված հեղուկի մեջ։ Ցույց է տրված, որ ծանրության ուժի և թաղանթի առկայությունը մեծացնում է հեղուկի դիմադրության ուժը։

SOME PROBLEMS IN PENETRATION OF BODIES INTO PONDERABLE FLUID

S. G. AVAGHIAN

Summary

The problems in penetration of a thin cone into ponderable compressible fluid are considered. First the problem for the fluid with free surface is solved. The problem in penetration into the fluid bounded by an elastic membrane is also solved.

It is shown that the presence of gravity force and a membrane increases the resistance force of fluid.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сагомонян А. Я.* Проникание. Изд-во МГУ, 1974.
2. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики, т. II. М., «Наука», 1974.
3. *Григорян С. С.* Некоторые вопросы гидродинамики тонких тел. Канд. дисс., МГУ, 1956.
4. *Багдоев А. Г.* Пространственные нестационарные движения сплошной среды с ударными волнами. Ереван, Изд-во АН Арм. ССР, 1961.