ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXIII, № 6, 1980 Механика

А. Ф. МИНАСЯН, В. С. ТОНОЯН

О КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УПРУГОЙ СОСТАВНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ВЕРТИКАЛЬНЫМ КОНЕЧНЫМ РАЗРЕЗОМ

Исследованию плоской смешанной и контактной задачи теории упругости для составных плоскостей, полуплоскостей и полос посвящено много работ [1—8]. В этих работах принималось, что линии раздела различных материалов параллельны граничной линии, а свойства упругого материала в направлениях, параллельных границе, не изменяются.

В работах [9, 16] рассматривалась задача о давлении жесткого штампа, приложенного на части границы упругой составной полуплоскости, когда полуплоскость состоит либо из двух квадрантов с различными упругими свойствами, либо из двух квадрантов одинакового материала и полуполосы между ними из другого материала, линии раздела которых перпендикулярны границе полуплоскости. Смешанные задачи для составной плоскости и полосы с трещиной и первая основная задача для составной полуплоскости рассмотрены в работах [10—13].

В настоящей работе рассматривается контактная задача плоской теории упругости для составной полуплоскости с разрезом конечной длины вдоль линии раздела материалов, выходящим на границу. Полуплоскость состоит из двух однородных и изотропных квадрантов с различными упругими свойствами, линия раздела материалов которых перпендикулярна к границе полуплоскости. К границе полуплоскости приложен жесткий штамп с произвольным основанием так, что штамп находится одновременно на обоих материалах и расположен несимметрично относительно разреза. Предполагается, что трение между штампом и полуплоскостью отсутствует. Для простоты принимается также, что граница полуплоскости вне штампа свободна от внешних усилий. В конечном разрезе, длина которого может быть определена, действует только нормальное давление. На линии раздела материалов вне разреза заданы условия полного контакта. После решения задачи при принятых допущениях устраняются особенности напряжений и получаются уравнения, определяющие глубину разреза и величину зоны контакта.

В частном случае, когда $a \to 0$, получаем решение задачи о давлении жесткого штампа с основанием произвольной формы, приложенного на части горизонтальной границы упругой составной полуплоскости [16].

Когда материалы квадрантов одинаковы, то получается решение контактной задачи теории упругости, совпадающее с решением, полученным М. А. Садовским [14].

Поставленная задача сводится к определению бигармонической функции $\Phi_1(x, y)$ в области правого квадранта и $\Phi_2(x, y)$ — в области левого квадранта. Функции $\Phi_i(x, y)$ $(i = 1, 2)$ ищем в виде

$$\Phi_i(x, y) = \int_0^\infty [A_i(\alpha) + (-1)^{i+1} \alpha x B_i(\alpha)] \exp[(-1)^i \alpha x] \cos(\alpha y)\, d\alpha +$$

$$+ (-1)^{i+1} \int_0^\infty [C_i(\beta) + \beta y D_i(\beta)] \exp[-\beta y] \sin(\beta x)\, d\beta \tag{1.1}$$

$(i = 1, 2, 0 \leqslant y < \infty;\ 0 \leqslant x < \infty$ при $i = 1;\ -\infty < x \leqslant 0;\ y \geqslant 0$ при $i = 2)$

Здесь $A_i(\alpha)$; $B_i(\alpha)$; $C_i(\beta)$; $D_i(\beta)$ $(i = 1, 2)$ — неизвестные функции, подлежащие определению из граничных условий и условий контакта. Граничные условия и условия контакта рассматриваемой задачи имеют вид

$$\begin{gathered} v_1(x, 0) = f_1(x) \quad 0 \leqslant x \leqslant a_1; \quad v_2(x, 0) = f_2(x) \quad -a_2 \leqslant x \leqslant 0 \\ \sigma_y^{(1)}(x, 0) = 0 \quad a_1 < x < \infty; \quad \sigma_y^{(2)}(x, 0) = 0 \quad -\infty < x < -a_2 \\ \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) = 0 \quad 0 < x < \infty; \quad \tau_{xy}^{(2)}(x, 0) = 0 \quad -\infty < x < 0 \end{gathered} \tag{1.2}$$

$$\sigma_x^{(1)}(0, y) = \sigma_x^{(2)}(0, y) = f_3(y) \quad 0 < y < a; \quad \tau_{xy}^{(1)}(0, y) = \tau_{xy}^{(2)}(0, y) \tag{1.3}$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x^{(1)}(0, y) &= \sigma_x^{(2)}(0, y) \\ \tau_{xy}^{(1)}(0, y) &= \tau_{xy}^{(2)}(0, y) \end{aligned}\right. \quad a < y < \infty \qquad \left.\begin{aligned} u_1(0, y) &= u_2(0, y) \\ v_1(0, y) &= v_2(0, y) \end{aligned}\right. \quad a < y < \infty \tag{1.4}$$

Используя обычные формулы для определения напряжений и перемещений [15] и удовлетворяя условиям (1.2), (1.3) и (1.4), получим

$$C_i(\beta) = D_i(\beta) \ (i = 1, 2); \quad A_2(\alpha) = A_1(\alpha) \tag{1.5}$$

$$\alpha B_2(\alpha) = 2\alpha A_1(\alpha) - \alpha B_1(\alpha) - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \frac{\beta^4 D_1(\beta)}{(\alpha^2 + \beta^2)^2}\, d\beta - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \frac{\beta^4 D_2(\beta)}{(\alpha^2 + \beta^2)^2}\, d\beta \tag{1.6}$$

$$\begin{gathered} \int_0^\infty \beta D_1(\beta) \sin(\beta x)\, d\beta = \frac{E_1}{2} f_1(x) \quad 0 \leqslant x \leqslant a_1 \\ \int_0^\infty \beta^2 D_1(\beta) \sin(\beta x)\, d\beta = \int_0^\infty \alpha^2 [A_1(\alpha) - 2B_1(\alpha) + \alpha x B_1(\alpha)]\, e^{-\alpha x}\, d\alpha \quad a_1 < x < \infty \end{gathered} \tag{1.7}$$

$$\begin{gathered} \int_0^\infty \beta D_2(\beta) \sin(\beta x)\, d\beta = -\frac{E_2}{2} f_2(x) \quad -a_2 \leqslant x \leqslant 0 \\ \int_0^\infty \beta^2 D_2(\beta) \sin(\beta x)\, d\beta = -\int_0^\infty \alpha^2 [A_1(\alpha) - 2B_2(\alpha) - \alpha x B_2(\alpha)]\, e^{\alpha x}\, d\alpha \quad -\infty < x < -a_2 \end{gathered} \tag{1.8}$$

$$\int_0^\infty [A_1^*(\alpha)\, l_1 + B_1^*(\alpha)\, l_2 - E_1^*(\alpha)] \cos(\alpha y)\, d\alpha = 0 \quad a \leqslant y < \infty$$

$$\int_0^\infty [A_1^*(\alpha)\, l_1 - B_1^*(\alpha)\, l_5 - E_2^*(\alpha)] \sin(\alpha y)\, d\alpha = 0 \quad a \leqslant y < \infty \tag{1.9}$$

$$\int_0^\infty \alpha A_1^*(\alpha) \cos(\alpha y)\, d\alpha = f_2(y) \quad 0 < y < a$$

$$\int_0^\infty \alpha\, [A_1^*(\alpha) - B_1^*(\alpha)] \sin(\alpha y)\, d\alpha = f(y) \quad 0 < y < a \tag{1.10}$$

где

$$l_1 = \frac{1+\nu_1}{E_1} + \frac{3-\nu_2}{E_2};\quad l_2 = \frac{1-\nu_1}{E_1} - \frac{1-\nu_2}{E_2};\quad l_3 = \frac{1-\nu_2}{E_2} + \frac{\nu_1 - 1}{E_1}$$

$$l_4 = \frac{1-\nu_2}{E_2} + \frac{1+\nu_1}{E_1};\quad l_5 = \frac{2}{E_1} + \frac{2}{E_2};\quad A_1^*(\alpha) = \alpha A_1(\alpha)$$

$$B_1^*(\alpha) = \alpha B_1(\alpha);\quad B_2^*(\alpha) = \alpha B_2(\alpha);\quad E_1^*(\alpha) = \alpha E_1(\alpha);\quad E_2^*(\alpha) = \alpha E_2(\alpha)$$

$$E_1^*(\alpha) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \beta^2 \left[\frac{l_3}{\alpha^2+\beta^2} + l_4 \frac{\beta^2-\alpha^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\right] D_1(\beta)\, d\beta +$$

$$+ \frac{4}{\pi E_2}\int_0^\infty \beta^2 \frac{(\beta^2-\alpha^2) D_2(\beta)}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\, d\beta \tag{1.11}$$

$$E_2^*(\alpha) = \frac{8}{\pi E_2}\int_0^\infty \frac{\beta^4 D_1(\beta)}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\, d\beta + \frac{8}{\pi E_2}\int_0^\infty \frac{\beta^4 D_2(\beta)}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\, d\beta$$

Используя результаты работы [9], из парных интегральных уравнений (1.7) и (1.8) $\beta D_1(\beta)$ и $\beta D_2(\beta)$ выразим через функции $A_1^*(\alpha)$; $B_1^*(\alpha)$; $B_2^*(\alpha)$

$$\beta D_1(\beta) = \frac{2}{\pi}\int_0^{a_1} \Psi_1(t) J_0(\beta t)\, dt + \frac{2}{\pi}\int_{a_1}^\infty F_1(t) J_0(\beta t)\, dt \tag{1.12}$$

$$\beta D_2(\beta) = \frac{2}{\pi}\int_0^{a_2} \Psi_2(\tau) J_0(\beta\tau)\, d\tau + \frac{2}{\pi}\int_{a_2}^\infty F_2(\tau) J_0(\beta\tau)\, d\tau \tag{1.13}$$

где

$$\Psi_1(t) = \frac{E_1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{x f_1(x)}{\sqrt{t^2 - x^2}}\,dx \tag{1.14}$$

$$\Psi_2(\tau) = \frac{E_2}{2}\frac{d}{d\tau}\int_0^\tau \frac{x f_2(x)}{\sqrt{\tau^2 - x^2}}\,dx \tag{1.15}$$

$$F_1(t) = t\int_0^\infty \alpha A_1^*(\alpha) K_0(\alpha t)\,d\alpha - 2t\int_0^\infty \alpha B_1^*(\alpha) K_0(\alpha t)\,d\alpha +$$

$$+ t^2\int_0^\infty \alpha^2 B_1^*(\alpha) K_1(\alpha t)\,d\alpha \tag{1.16}$$

$$F_2(\tau) = \tau\int_0^\infty \alpha A_1^*(\alpha) K_0(\alpha\tau)\,d\alpha - 2\tau\int_0^\infty \alpha B_2^*(\tau) K_0(\alpha\tau)\,d\alpha +$$

$$+ \tau^2\int_0^\infty \alpha^2 B_2^*(\alpha) K_1(\alpha t)\,d\alpha \tag{1.17}$$

$I_i(x)$ — функции Бесселя первого рода действительного аргумента, а $K_i(x)$ — функции Макдональда. Для решения системы (1.9) и (1.10) введем новые неизвестные $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ следующим образом:

$$A_1^*(\alpha)\,l_1 - B_1^*(\alpha)\,l_2 - E_1^*(\alpha) = \int_0^a \Phi(t)\,J_0(\alpha t)\,dt \tag{1.18}$$

$$A_1^*(\alpha)\,l_1 - B_1^*(\alpha)\,l_5 - E_2^*(\alpha) = \int_0^a \Psi(t)\,J_1(\alpha t)\,dt \tag{1.19}$$

Подстановка (1.18) и (1.19) дает возможность тождественно удовлетворить уравнениям (1.9). Для удовлетворения уравненнию (1.10) преобразуем правые части уравнений (1.18) и (1.19) следующим образом: заменяя функции $J_0(\alpha t)$ и $J_1(\alpha t)$ через $\cos(\alpha r)$ и $\sin(\alpha r)$ с помощью интегрального представления Пуассона, меняя порядок интегрирования и интегрируя по частям полученные выражения, учитывая при этом, что $H(a) = 0$; $S(a) = 0$ и $S(0) = 0$, будем иметь

$$\int_0^a \Phi(t)\,J_0(\alpha t)\,dt = -\frac{1}{\alpha}\int_0^a H'(r)\sin(\alpha r)\,dr \tag{1.20}$$

$$\int_0^a \Psi(t)\,J_1(\alpha t)\,dt = \frac{1}{\alpha}\int_0^a S'(r)\cos(\alpha r)\,dr \tag{1.21}$$

$$H(r) = \frac{2}{\pi}\int\limits_r \frac{\Phi(t)\,dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} \tag{1.22}$$

$$S(r) = \frac{2}{\pi} r \int\limits_r^a \frac{\Psi(t)\,dt}{t\sqrt{t^2 - r^2}} \tag{1.23}$$

Учитывая (1.20), (1.21), (1.11), (1.12) и (1.13), при помощи формул (1.18), (1.19) и (1.6) выразим $A_1^*(\alpha)$, $B_1^*(\alpha)$, $B_2^*(\alpha)$ через функции $H'(r)$, $S'(r)$, $F_1(t)$ и $F_2(\tau)$

$$A_1^*(\alpha) = A_2^*(\alpha) = \frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^{a_1} \Psi_1(t)\left\{[(n_1+1)\mu_1 + \mu_2]\, K_0(\alpha t) - \right.$$

$$\left. - \left(\mu_1 + \frac{\mu_2}{2}\right)\alpha t K_1(\alpha t)\right\} dt +$$

$$+ \frac{4}{\pi^2}\int\limits_{a_1}^{\infty} F_1(t)\left\{[(n_1+1)\mu_1 + \mu_2]\, K_0(\alpha t) - \left(\mu_1 + \frac{\mu_2}{2}\right)\alpha t K_1(\alpha t)\right\} dt +$$

$$+ \frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^{a_2} \Psi_2(\tau)\left\{[(n_2+1)\mu_3 + \mu_2]\, K_0(\alpha\tau) - \left(\mu_3 + \frac{\mu_2}{2}\right)\alpha t K_1(\alpha\tau)\right\} d\tau +$$

$$+ \frac{4}{\pi^2}\int\limits_{a_2}^{\infty} F_2(\tau)\left\{[(n_2+1)\mu_3 + \mu_2]\, K_0(\alpha\tau) - \left(\mu_3 + \frac{\mu_2}{2}\right)\alpha\tau K_1(\alpha\tau)\right\} d\tau +$$

$$+ \frac{l_2}{\alpha l_1 (l_2 + l_5)}\int\limits_0^a S'(r)\cos(\alpha r)\,dr - \frac{l_5}{\alpha l_1 (l_2 + l_5)}\int\limits_0^a H'(r)\sin(\alpha r)\,dr \tag{1.24}$$

$$B_1^*(\alpha) = \frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^{a_1} \Psi_1(t)\left\{[(n_1+1)\mu_4 - \mu_5]\, K_0(\alpha t) - \left(\mu_4 - \frac{\mu_5}{2}\right)\alpha t K_1(\alpha t)\right\} dt +$$

$$+ \frac{4}{\pi^2}\int\limits_{a_1}^{\infty} F_1(t)\left\{[(n_1+1)\mu_4 - \mu_5]\, K_0(\alpha t) - \left(\mu_4 - \frac{\mu_5}{2}\right)\alpha t K_1(\alpha t)\right\} dt +$$

$$+ \frac{2}{\pi^2}(n_2 - 1)\mu_5 \int\limits_0^{a_2} \Psi_2(\tau) K_0(\alpha\tau)\,d\tau + \frac{2}{\pi^2}(n_2 - 1)\mu_5 \int\limits_{a_2}^{\infty} F_2(\tau) K_0(\alpha\tau)\,d\tau -$$

$$- \frac{1}{\alpha(l_2 + l_5)}\int\limits_0^a H'(r)\sin(\alpha r)\,dr - \frac{1}{\alpha(l_2 + l_5)}\int\limits_0^a S'(r)\cos(\alpha r)\,dr \tag{1.25}$$

$$B_2^*(\alpha)=\frac{4}{\pi^2}(n_1-1)\mu_8\int_0^{a_1}\Psi_1(t)K_0(\alpha t)\,dt+\frac{4}{\pi^2}(n_1-1)\mu_8\int_{a_1}^{\infty}F_1(t)K_0(\alpha t)\,dt+$$

$$+\frac{4}{\pi^2}\int_0^{a_2}\Psi_2(\tau)\{[(n_2+1)\mu_7-2\mu_8]K_0(\alpha\tau)-(\mu_7-\mu_8)\alpha\tau K_1(\alpha\tau)\}\,d\tau+$$

$$+\frac{4}{\pi^2}\int_{a_2}^{\infty}F_2(\tau)\{[(n_2+1)\mu_7-2\mu_8]K_0(\alpha\tau)+(\mu_7-\mu_8)\alpha\tau K_1(\alpha\tau)\}\,d\tau+$$

$$+\frac{l_1-2l_5}{\alpha l_1(l_2+l_5)}\int_0^a H'(r)\sin(\alpha r)\,dr+\frac{2l_2+l_1}{\alpha l_1(l_2+l_5)}\int_0^a S'(r)\cos(\alpha r)\,dr \qquad (1.26)$$

где введены обозначения

$$\mu_1=2\frac{(1+\nu_1)(m+1)}{1+\nu_1+(3-\nu_2)m}\,\frac{1}{3-\nu_1+(1+\nu_2)m}$$

$$\mu_2=4\frac{2-\nu_1-\nu_2}{1+\nu_1+(3-\nu_2)m}\,\frac{m}{3-\nu_1+(1+\nu_2)m}$$

$$\mu_3=2\frac{(1+\nu_2)(m+1)}{1+\nu_1+(3-\nu_2)m}\,\frac{m}{3-\nu_1+(1+\nu_2)m}$$

$$\mu_4=\frac{1+\nu_1}{3-\nu_1+(1+\nu_2)m};\qquad \mu_5=\frac{(1+\nu_2)m}{3-\nu_1+(1+\nu_2)m}$$

$$\mu_6=\frac{1+\nu_1}{3-\nu_1+(1+\nu_2)m};\qquad \mu_7=\frac{1+\nu_2}{1+\nu_1+(3-\nu_2)m}$$

$$m=\frac{E_1}{E_2};\quad n_1=\frac{\nu_1-1}{\nu_1+1};\quad n_2=\frac{\nu_2-1}{\nu_2+1}$$

Подставляя выражения функций $A_1^*(\alpha)$; $B_1^*(\alpha)$ из (1.24) и (1.25) в уравнение (1.10), получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{aligned}
&S'(y)-\frac{l_5}{l_2}\frac{1}{\pi}\int_0^a H'(r)\left(\frac{1}{r+y}+\frac{1}{r-y}\right)dr=\Psi_1(y)\\
&H'(y)-\frac{l_5}{l_2}\frac{1}{\pi}\int_0^a S'(r)\left(\frac{1}{r+y}+\frac{1}{y-r}\right)dr=\varphi_2(y)
\end{aligned}\qquad (1.27)$$

где

$$\Psi_3(y)=\frac{2}{\pi^2}\int_0^{a_1}\Psi_1(t)\,w_1(t,y)\,dt+\frac{2}{\pi^2}\int_0^{a_2}\Psi_2(\tau)\,w_2(\tau,y)\,d\tau+$$

$$+2\,\frac{l_1(l_2+l_5)}{l_2}\,f_3(y)+\frac{2}{\pi^2}\int_{a_1}^{\infty}F_1(t)\,w_1(t,y)\,dt+\frac{2}{\pi^2}\int_{a_2}^{\infty}F_2(\tau)\,w_2(\tau,y)\,d\tau \qquad (1.28)$$

$$\varphi_2(y)=\frac{2}{\pi^2}\int_0^{a_1}\Psi_1(t)\,w_3(y,t)\,dt+\frac{2}{\pi^2}\int_0^{a_2}\Psi_2(\tau)\,w_4(y,\tau)\,d\tau+$$

$$+\frac{2}{\pi^2}\int_{a_1}^{\infty}F_1(t)\,w_3(y,t)\,dt+\frac{2}{\pi^2}\int_{a_2}^{\infty}F_2(\tau)\,w_4(y,\tau)\,d\tau \qquad (1.29)$$

$$w_1(y,t)=\frac{4}{\pi}\left\{q_1\left[\frac{t}{y(y^2+t^2)}+\frac{y\ln\left(\frac{t}{y}+\sqrt{\frac{t^2}{y^2}+1}\right)}{(y^2+t^2)^{3/2}}\right]+\right.$$

$$\left.+q_2\left[\frac{t(2y^2-t^2)}{y(y^2+t^2)^2}-\frac{3yt\ln\left(\frac{t}{y}+\sqrt{\frac{t^2}{y^2}+1}\right)}{(y^2+t^2)^{5/2}}\right]\right\}$$

$$w_2(y,\tau)=\frac{4}{\pi}\left\{q_3\left[\frac{\tau}{y(y^2+\tau^2)}+\frac{y\ln\left(\frac{\tau}{y}+\sqrt{\frac{\tau^2}{y^2}+1}\right)}{(y^2+\tau^2)^{3/2}}\right]+\right.$$

$$\left.+q_4\left[\frac{\tau(2y^2-\tau^2)}{y(y^2+\tau^2)^2}-\frac{3y\tau^2\ln\left(\frac{\tau}{y}+\sqrt{\frac{\tau^2}{y^2}+1}\right)}{(y^2+\tau^2)^{5/2}}\right]\right\}$$

$$w_3(y,t)=\frac{yl_1(l_2+l_5)}{l_2}\,\frac{t^2-2y^2}{(y^2+t^2)^{5/2}}+\frac{q_5y}{(y^2+t^2)^{5/2}}-3y\,\frac{q_6t^2}{(y^2+t^2)^{5/2}}$$

$$w_4(y,\tau)=\frac{yq_7}{(y^2+\tau^2)^{3/2}}-3y\,\frac{q_4\tau^2}{(y^2+\tau^2)^{5/2}} \qquad (1.30)$$

$$q_1=\frac{l_1(l_2+l_5)}{l_2}\left[(n_1+1)\,\mu_1+\mu_2\right];\qquad q_2=\frac{l_1(l_2+l_5)}{l_2}\left(\mu_1+\frac{\mu_2}{2}\right)$$

$$q_3=\frac{l_1(l_2+l_5)}{l_2}\left[(n_2+1)\,\mu_3+\mu_2\right];\qquad q_4=\frac{l_1(l_2+l_5)}{l_2}\left(\mu_3+\frac{\mu_2}{2}\right)$$

$$q_5=\frac{l_1(l_2+l_5)}{l_2}\left[(n_1+1)(\mu_1-\mu_4)+\mu_2+\mu_5\right]$$

$$q_6 = \frac{l_1(l_2 + l_5)}{l_2}\left(\mu_1 + \frac{\mu_2}{2} - \mu_4 + \mu_3\right)$$

$$q_7 = \frac{l_1(l_2 + l_5)}{l_2}\left[(n_2 + 1)\mu_3 + \mu_4 - \frac{1}{2}(n_2 - 1)\mu_5\right]$$

Продолжая функции $H'(r)$ и $S'(r)$ на интервал $(-a, 0)$ соответственно нечетным и четным образом, систему (1.27) приведем к виду

$$S'(y) - \frac{l_5}{l_2}\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{H'(r)}{r-y}\,dr = \Psi_3(y)$$

$$H'(y) + \frac{l_5}{l_2}\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{S'(r)\,dr}{r-y}\,dr = \varphi_2(y) \tag{1.31}$$

Умножая второе уравнение системы (1.27) на i и складывая с первым уравнением, получим следующее сингулярное интегральное уравнение:

$$\chi(y) + \frac{i}{\pi}\frac{l_5}{l_2}\int_{-a}^{a}\frac{\chi(r)}{r-y}\,dr = \Psi_4(y) \tag{1.32}$$

где введены обозначения

$$S'(y) + iH'(y) = \chi(y); \quad \Psi_3(y) + i\varphi_2(y) = \Psi_4(y) \tag{1.33}$$

Такое уравнение рассматривалось в работах [17, 18]. Используя результаты работы [18], получаем

$$\chi(y) = \frac{\Psi_4(y)}{\mu} - \frac{1}{\mu\pi i(y+a)^{1-m}(y-a)^m}\int_{-a}^{a}\frac{(r+a)^{1-m}(r-a)^m}{c^{r-y}}\Psi_4(r)\,dr + \frac{c}{(y+a)^{1-m}(y-a)^m} \tag{1.34}$$

где

$$m = \frac{1}{2} - i\gamma; \quad k = \frac{(1+\nu_1)E_2 + (3-\nu_2)E_1}{(3-\nu_1)E_2 + (1+\nu_2)E_1}$$

$$\mu = 1 - \frac{l_5^2}{l_2^2}; \quad \gamma = \frac{\ln k}{2\pi} \tag{1.35}$$

Разделяя действительную и мнимую часть выражения (1.34), найдем

$$H'(y)=\frac{\varphi_2(y)}{\mu}+\frac{1}{\mu\pi\sqrt{y^2-a^2}}\int\limits_{-a}^{a}\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r-y}\left[\Psi_3(r)\cos\gamma\ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}-\right.$$

$$\left.-\varphi_2(r)\sin\gamma\ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}\right]dr+\frac{c}{\sqrt{y^2-a^2}}\sin\gamma\ln\frac{y+a}{y-a} \qquad (1.36)$$

$$S'(y)=\frac{\Psi_3(y)}{\mu}-\frac{1}{\mu\pi\sqrt{y^2-a^2}}\int\limits_{-a}^{a}\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r-y}\left[\varphi_2(r)\cos\gamma\ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}+\right.$$

$$\left.+\Psi_3(r)\sin\gamma\ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}\right]dr+\frac{c}{\sqrt{y^2-a^2}}\cos\gamma\ln\frac{y+a}{y-a} \qquad (1.37)$$

Подставляя значения функций $A_1^*(\alpha)$, $B_1^*(\alpha)$ и $B_2^*(\alpha)$ из (1.24), (1.25), (1.26) в (1.16) и (1.17), учитывая при этом (1.36), (1.37), (1.28) и (1.29), для определения $F_1(t)$ и $F_2(\tau)$ получаем систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода, которая после некоторых преобразований [9] примет вид

$$\begin{aligned} F_1(z)&=\Omega_1(z)+\int\limits_{a_1}^{\infty}F_1(t)\,K_1(z,\,t)\,dt+\int\limits_{a_1}^{\infty}F_2(\tau)\,K_2(z,\,\tau)\,d\tau \\ F_2(z)&=\Omega_2(z)+\int\limits_{a_1}^{\infty}F_1(t)\,K_3(z,\,t)\,dt+\int\limits_{a_1}^{\infty}F_2(\tau)\,K_4(z,\,\tau)\,d\tau \end{aligned} \qquad (1.38)$$

$$\Omega_1(z)=\frac{4}{\pi^2}z\int\limits_{0}^{a_1}\Psi_1(t)\left[(\omega_1-2\omega_2)\frac{\ln t/z}{t^2-z^2}+\omega_3\,\frac{z^4-t^4+4t^2z^2\ln t/z}{(t^2-z^2)^3}\right]dt+$$

$$+\frac{4}{\pi^2}z\int\limits_{0}^{a_1}\Psi_2(\tau)\left[\,m\,(\omega_4+2\omega_5)\,\frac{\ln\tau/z}{\tau^2-z^2}-m\,(\omega_6-\omega_5)\,\frac{\tau^2-z^2-2\tau^2\ln\tau/z}{(\tau^2-z^2)^2}\right]d\tau+$$

$$+\frac{2}{\pi^2}\frac{z}{\mu}\int\limits_{0}^{a_1}\Psi_1(t)\left\{\int\limits_{0}^{a}w_3(y,\,t)\,G_1(y,\,z)\,dy+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{a}\frac{G_1(y,\,z)\,dy}{\sqrt{y^2-a^2}}\int\limits_{-a}^{a}\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r-y}\times\right.$$

$$\times\left[w_1(r,\,t)\cos\gamma\ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}-w_3(r,\,t)\sin\gamma\ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}\right]dr+$$

$$+\frac{\pi}{2}\int\limits_{0}^{a}w_1(t,\,y)\,G_2(y,\,z)\,dy-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{a}\frac{G_2(y,\,z)\,dy}{\sqrt{y^2-a^2}}\int\limits_{-a}^{a}\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r-y}\left[w_3(r,\,t)\cos\gamma\ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}+\right.$$

$$+ w_1(r, t)\sin\gamma \ln \frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}\Big] dr\Big\} dt +$$

$$+ \frac{2}{\pi^2}\frac{z}{\mu}\int_0^{a_2}\Psi_2(\tau)\Big\{\int_0^a w_4(y, \tau)\, G_1(y, z)\, dy +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^a \frac{G_1(y, z)\, dy}{\sqrt{y^2-a^2}}\int_{-a}^a \frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r-y}\Big[w_2(r, \tau)\times$$

$$\times\cos\gamma \ln \frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a} - w_4(r, \tau)\sin\gamma \ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}\Big] dr +$$

$$+ \frac{\pi}{2}\int_0^a w_2(\tau, y)\, G_2(y, z)\, dy -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^a \frac{G_2(y, z)\, dy}{\sqrt{y^2-a^2}}\int_{-a}^a\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r-y}\Big[w_4(r, \tau)\cos\gamma\ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a} +$$

$$+ w_2(r, \tau)\sin\gamma\ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}\Big] dr\Big\} d\tau +$$

$$+ cz\int_0^a \frac{G_1(y, z)}{\sqrt{y^2-a^2}}\sin\gamma\ln\frac{y+a}{y-a}\, dy + \frac{\pi}{2} zc\int_0^a\frac{G_2(y, z)}{\sqrt{y^2-a^2}}\cos\gamma\ln\frac{y+a}{y-a}\, dy \tag{1.39}$$

$$\Omega_2(z) = \frac{4}{\pi^2} z\int_0^{a_1}\Psi_1(t)\Big[(\omega_4+2\omega_6)\frac{\ln t/z}{t^2-z^2} + (\omega_6-\omega_5)\frac{t^2-z^2-2t^2\ln t/z}{(t^2-z^2)^2}\Big] dt +$$

$$+\frac{4}{\pi^2}\int_0^{a_2}\Psi_2(\tau)\Big[(\omega_7+2\omega_8)\frac{\ln\tau/z}{\tau^2-z^2} + \omega_9\frac{z^4-\tau^4+4\tau^2z^2\ln\tau/z}{(\tau^2-z^2)^3}\Big] d\tau +$$

$$+\frac{2}{\pi^2}\frac{z}{\mu}\int_0^{a_1}\Psi_1(t)\Big\{\int_0^a w_3(y, z)\, G_3(y, z)\, dy +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^a\frac{G_3(y, z)\, dy}{\sqrt{y^2-a^2}}\int_{-a}^a\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r-y}\Big[w_1(r, t)\times$$

$$\times\cos\gamma\ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a} - w_3(r, t)\sin\gamma\ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}\Big] dr +$$

$$+\frac{\pi}{2}\int_0^a w_2(t, y)\, G_4(y, z)\, dy -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^a \frac{G_3(y, z)\,dy}{\sqrt{y^2-a^2}}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r-y}\left[w_3(r, t)\cos\gamma \ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}+\right.$$

$$\left.+\,w_1(r, t)\sin\gamma \ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}\right]dr\Big\}\,dt+$$

$$+\,zc\int_0^a \frac{G_3(y, z)}{\sqrt{y^2-a^2}}\sin\gamma \ln\frac{y+a}{y-a}\,dy+$$

$$+\frac{\pi}{2}zc\int_0^a \frac{G_4(y, z)}{\sqrt{y^2-a^2}}\cos\gamma \ln\frac{y+a}{y-a}\,dy+$$

$$+\frac{2}{\pi^2}\frac{z}{\mu}\int_0^{a_1}\Psi_2(\tau)\Big\{\int_0^a w_4(y, z)\,G_3(y, z)\,dy+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^a \frac{G_3(y, z)\,dy}{\sqrt{y^2-a^2}}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r-y}\left[w_2(r, \tau)\cos\gamma \ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}-\right.$$

$$\left.-\,w_4(r, \tau)\sin\gamma \ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}\right]dr+$$

$$+\frac{\pi}{2}\int_0^a w_2(\tau, y)\,G_4(y, z)\,dy-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^a \frac{G_4(y, z)\,dy}{\sqrt{y^2-a^2}}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r-y}\left[w_4(r, \tau)\cos\gamma \ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}+\right.$$

$$\left.+\,w_2(r, \tau)\sin\gamma \ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}\right]dr\Big\}\,d\tau \tag{1.40}$$

$$K_1(z, t)=\frac{4}{\pi^2}z\left[(\omega_1-2\omega_2)\frac{\ln t/z}{t^2-z^2}+\omega_3\frac{z^4-t^4+4t^2z^2\ln t/z}{(t^2-z^2)^3}\right]+$$

$$+\frac{2}{\pi^2}\frac{z}{\mu}\Big\{\int_0^a w_3(y, z)\,G_1(y, z)\,dy+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^a \frac{G_1(y, z)}{\sqrt{y^2-a^2}}dy\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r-y}\left[w_1(r, t)\cos\gamma \ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}-\right.$$

$$\left.-\,w_3(r, t)\sin\gamma \ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}\right]dr+\frac{\pi}{2}\int_0^a w_1(t, y)\,G_2(y, z)\,dy-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^a \frac{G_2(y,z)}{\sqrt{y^2-a^2}}\,dy\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r-y}\Big[w_3(r,t)\cos\gamma\ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}+$$

$$+w_1(r,t)\sin\gamma\ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}\Big]dr\Big\} \tag{1.41}$$

$$K_2(z,\tau)=\frac{4}{\pi^2}z\Big[m(\omega_4+2\omega_5)\frac{\ln\tau/z}{\tau^2-z^2}-m(\omega_6-\omega_5)\frac{\tau^2-z^2-2\tau^2\ln\tau/z}{(\tau^2-z^2)^2}\Big]+$$

$$+\frac{2}{\pi^2}\frac{z}{\mu}\Big\{\int_0^a w_4(y,\tau)\,G_1(y,z)\,dy+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^a \frac{G_1(y,z)}{\sqrt{y^2-a^2}}\,dy\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r-y}\Big[w_2(r,\tau)\cos\gamma\ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}-$$

$$-w_4(r,\tau)\sin\gamma\ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}\Big]dr+\frac{\pi}{2}\int_0^a w_2(\tau,y)\,G_2(y,z)\,dy-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^a \frac{G_2(y,z)\,dy}{\sqrt{y^2-a^2}}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r-y}\Big[w_4(r,\tau)\cos\gamma\ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}+$$

$$+w_2(r,\tau)\sin\gamma\ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}\Big]dr\Big\} \tag{1.42}$$

$$K_3(z,t)=\frac{4}{\pi^2}z\Big[(\omega_4+2\omega_6)\frac{\ln t/z}{t^2-z^2}+(\omega_6-\omega_5)\frac{t^2-z^2-2t^2\ln t/z}{(t^2-z^2)^2}\Big]+$$

$$+\frac{2}{\pi^2}\frac{z}{\mu}\Big\{\int_0^a w_3(y,z)\,G_3(y,z)\,dy+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^a \frac{G_3(y,z)}{\sqrt{y^2-a^2}}\,dy\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r-y}\Big[w_1(r,t)\cos\gamma\ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}-$$

$$-w_3(r,t)\sin\gamma\ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}\Big]dr+\frac{\pi}{2}\int_0^a w_1(t,y)\,G_4(y,z)\,dy-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^a \frac{G_3(y,z)\,dy}{\sqrt{y^2-a^2}}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r-y}\Big[w_3(t,r)\cos\gamma\ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}+$$

$$+w_1(r,t)\sin\gamma\ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}\Big]dr\Big\} \tag{1.43}$$

$$K_4(z,\ \tau)=\frac{4}{\pi^2}z\left[(\omega_7+2\omega_8)\frac{\ln\tau/z}{\tau^2-z^2}+\omega_9\frac{z^4-\tau^4+4\tau^2z^2\ln\tau/z}{(\tau^2-z^2)^3}\right]+$$

$$+\frac{2}{\pi^2}\frac{z}{\mu}\left\{\int_0^a w_4(y,\ z)\,G_3(y,\ z)\,dy+\right.$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^a\frac{G_3(y,\ z)\,dy}{\sqrt{y^2-a^2}}\int_{-a}^a\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r-y}\left[w_2(r,\ \tau)\cos\gamma\ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}+\right.$$

$$\left.-w_4(r,\ \tau)\sin\gamma\ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}\right]dr+\frac{\pi}{2}\int_0^a w_2(y,\ \tau)\,G_4(y,\ z)\,dy-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^a\frac{G_4(y,\ z)\,dy}{\sqrt{y^2-a^2}}\int_{-a}^a\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r-y}\left[w_4(r,\ \tau)\cos\gamma\ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}+\right.$$

$$\left.\left.+w_2(r,\ \tau)\sin\gamma\ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}\right]dr\right\} \tag{1.44}$$

$$\omega_1=(n_1+1)(\mu_1-2\mu_4)+\mu_2+2\mu_5;\qquad \omega_2=\mu_1+\frac{\mu_2}{2}-2\mu_4+\mu_5$$

$$\omega_3=\mu_5-2\mu_4;\quad \omega_4=(n_1+1)\mu_1+\mu_2-2(n_1-1)\mu_6;\quad \omega_5=-\mu_1-\frac{\mu_2}{2}$$

$$\omega_6=(n_1-1)\mu_6;\quad \omega_7=\mu_2+4\mu_6+(n_2+1)(\mu_3-2\mu_7)$$

$$\omega_8=(n_2+1)\mu_7-2\mu_6;\quad \omega_9=2(\mu_6-\mu_7);\quad \omega_{10}=2\mu_7-\mu_6-\mu_3-\frac{\mu_2}{2}$$

$$G_1(y,\ z)=\frac{(2l_1-l_5)\,y^2+(l_1-l_5)\,z^2}{l_1(l_2+l_5)}\,\frac{\ln\left(\frac{z}{y}+\sqrt{\frac{z^2}{y^2}+1}\right)}{(y^2+z^2)^{3/2}}+$$

$$+\frac{z}{(l_2+l_5)(y^2+z^2)}$$

$$G_2(y,\ z)=\frac{(2l_1+l_2)\,y^2+(l_1+l_2)\,z^2}{l_1(l_2+l_5)(y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$G_3(y,\ z)=\frac{(3l_5-2l_1)\,y^2+(l_5-l_1)\,z^2}{l_1(l_2+l_5)}\,\frac{\ln\left(\frac{z}{y}+\sqrt{\frac{z^2}{y^2}+1}\right)}{(y^2+z^2)^{3/2}}+$$

$$+\frac{2l_5-l_1}{l_1(l_2+l_5)}\,\frac{z}{z^2+y^2};\qquad G_4(y,\ z)=-\frac{(l_1+l_2)\,z^2+(3l_2+2l_1)\,y^2}{l_1(l_2+l_5)(y^2+z^2)^{3/2}}$$

Для решения системы уравнений (1.38) сперва покажем, что

$$\begin{aligned}&\int_{a_1}^{\infty}|K_1(z,t)|\,dt+\int_{a_2}^{\infty}|K_2(z,\tau)|\,d\tau<1\\&\int_{a_1}^{\infty}|K_3(z,t)|\,dt+\int_{a_2}^{\infty}|K_4(z,\tau)|\,d\tau<1\end{aligned}\tag{1.45}$$

Действительно, каждое ядро $K_i(z,t)$ $(i=1,2,3,4)$ имеет вид, аналогичный приведенному в работе [16]. Используя результаты оценок, приведенных в работе [16], доказывается, что неравенства (1.45) имеют место. Очевидно, что функции $\Omega_1(t)$ и $\Omega_2(t)$ ограничены сверху и стремятся к нулю, когда $t\to\infty$.

Решая систему интегральных уравнений (1.38) методом последовательных приближений, получим выражения функций $F_1(t)$ и $F_2(\tau)$. Далее, по формулам (1.12), (1.13), (1.28), (1.29), (1.36), (1.38), (1.24), (1.25) и (1.26) последовательно можно определить все искомые функции, а следовательно, и напряжения и перемещения в любой точке составной полуплоскости.

Нормальные напряжения под штампом и перемещения вне штампа на линии $y=0$, выраженные через функции $F_1(t)$ и $F_2(\tau)$, имеют вид

$$\sigma_y^{(1)}(x,0)=\frac{2}{\pi}\frac{x}{a_1}\frac{F_1(a_1)-\Psi_1(a_1)}{\sqrt{a_1^2-x^2}}+\frac{2}{\pi}x\int_x^{a_1}\frac{t\Psi_1'(t)-\Psi_1(t)}{t^2\sqrt{t^2-x^2}}\,dt+$$

$$+\frac{2}{\pi}x\int_{a_1}^{\infty}\frac{tF_1'(t)-F_1(t)}{t^2\sqrt{t^2-x^2}}\,dt+$$

$$+\frac{4}{\pi^2}\int_0^x\Psi_1(t)\left\{\omega_1\left[\frac{x\ln\left(\frac{x}{t}+\sqrt{\frac{x^2}{t^2}-1}\right)}{(x^2-t^2)^{3/2}}-\frac{1}{x^2-t^2}\right]+\right.$$

$$+\omega_2\left[\frac{x^2+2t^2}{(x^2-t^2)^2}-\frac{3xt^2\ln\left(\frac{x}{t}+\sqrt{\frac{x^2}{t^2}-1}\right)}{(x^2-t^2)^{5/2}}\right]+$$

$$+x\omega_3\left[\frac{(t^2+2x^2)\ln\left(\frac{x}{t}+\sqrt{\frac{x^2}{t^2}-1}\right)}{(x^2-t^2)^{3/2}}-\frac{3x}{(x^2-t^2)^2}\right]-$$

$$\left.-\omega_4\left[\frac{2x^4+x^2t^2}{(x^2-t^2)^3}-\frac{3xt^4+12x^3t^2}{(x^2-t^2)^{7/2}}\ln\left(\frac{x}{t}+\sqrt{\frac{x^2}{t^2}-1}\right)\right]\right\}dt+$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{4}{\pi^2}\int_x^{a_1}\Psi_1(t)\Big\{\omega_1\Big[\frac{1}{t^2-x^2}-\frac{x\arccos x/t}{(t^2-x^2)^{3/2}}\Big]+\\
&+\omega_2\Big[\frac{2t^2+x^2}{(t^2-x^2)^2}-\frac{3xt^2}{(t^2-x^2)^{5/2}}\arccos\frac{x}{t}\Big]+\\
&+x\omega_3\Big[\frac{t^2+2x^2}{(t^2-x^2)^{5/2}}\arccos\frac{x}{t}-\frac{3x}{(t^2-x^2)^2}\Big]-\\
&-x\omega_4\Big[\frac{3t^5+13x^2t^3}{(t^2-x^2)^{7/2}}\arccos\frac{x}{t}-\frac{13t^2x+2x^3}{(t^2-x^2)^3}\Big]\Big\}\,dt+\\
&+\frac{4}{\pi^2}\int_0^{a_2}\Psi_2(\tau)\Big\{\omega_5\Big[\frac{x\ln\Big(\frac{x}{\tau}+\sqrt{\frac{x^2}{\tau^2}-1}\Big)}{(x^2-\tau^2)^{3/2}}-\frac{1}{x^2-\tau^2}\Big]-\\
&-\omega_6\Big[\frac{x^2+2\tau^2}{(x^2-\tau^2)^2}-\frac{3x\tau^2\ln\Big(\frac{x}{\tau}+\sqrt{\frac{x^2}{\tau^2}-1}\Big)}{(x^2-\tau^2)^{5/2}}\Big]+\\
&+x\omega_7\Big[\frac{\tau^2+2x^2}{(x^2-\tau^2)^{3/2}}\ln\Big(\frac{x}{\tau}+\sqrt{\frac{x^2}{\tau^2}-1}\Big)-\frac{3x}{(x^2-\tau^2)^2}\Big]\Big\}\,d\tau+\\
&+\frac{4}{\pi^2}\int_{a_1}^{\infty}F_1(t)\Big\{\omega_1\Big[\frac{1}{t^2-x^2}-\frac{x\arccos x/t}{(t^2-x^2)^{3/2}}\Big]+\\
&+\omega^2\Big[\frac{2t^2+x^2}{(t^2-x^2)^2}-\frac{3xt^2\arccos x/t}{(t^2-x^2)^{5/2}}\Big]+\\
&+x\omega_3\Big[\frac{(t^2+2x^2)\arccos x/t}{(t^2-x^2)^{5/2}}-\frac{3x}{(t^2-x^2)^2}\Big]-\\
&-x\omega_4\Big[\frac{3t^5+13x^2t^3}{(t^2-x^2)^{7/2}}\arccos\frac{x}{t}-\frac{13xt^2+2x^3}{(t^2-x^2)^3}\Big]\Big\}\,dt+\\
&+\frac{4}{\tau^2}\int_{a_2}^{\infty}F_2(\tau)\Big\{\omega_5\Big[\frac{x\ln\Big(\frac{x}{\tau}+\sqrt{\frac{x^2}{\tau^2}-1}\Big)}{(x^2-\tau^2)^{3/2}}-\frac{1}{x^2+\tau^2}\Big]-\\
&-\omega_6\Big[\frac{x^2+2\tau^2}{(x^2-\tau^2)^2}-\frac{3x\tau^2\ln\Big(\frac{x}{\tau}+\sqrt{\frac{x^2}{\tau^2}-1}\Big)}{(x^2-\tau^2)^{5/2}}\Big]+\\
&+x\omega_7\Big[\frac{\tau^2+2x^2}{(x^2-\tau^2)^{3/2}}\ln\Big(\frac{x}{\tau}+\sqrt{\frac{x^2}{\tau^2}-1}\Big)-\frac{3x}{(x^2-\tau^2)^2}\Big]\Big\}\,d\tau+
\end{aligned}
$$

$$+ c\int_0^a \frac{y(\alpha_1 y^2 - \alpha_2 x^2)\sin\gamma \ln\dfrac{y+a}{y-a}}{(x^2+y^2)^2\sqrt{y^2-a^2}}\,dy +$$

$$+ cx\int_0^a \frac{(\alpha_3 x^2 + \alpha_4 y^2)\cos\gamma \ln\dfrac{y+a}{y-a}}{(x^2+y^2)^2\sqrt{y^2-a^2}}\,dy +$$

$$+ \frac{2}{\pi^2}\int_0^{\alpha_1} \Psi_1(t)\left\{\int_0^a \frac{y w_3(y, t)}{(x^2+y^2)^2}(\alpha_1 y^2 - \alpha_2 x^2)\,dy +\right.$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^a \frac{y(\alpha_1 y^2 - \alpha_2 x^2)\,dy}{(x^2+y^2)^2\sqrt{y^2-a^2}}\int_{-a}^a \frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r-y}\times$$

$$\times\left[w_1(r, t)\cos\gamma \ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a} - w_3(r, t)\sin\gamma \ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}\right]dr +$$

$$+ x\int_0^a \frac{w_1(t, y)(\alpha_3 x^2 + \alpha_4 y^2)\,dy}{(x^2+y^2)^2} - \frac{x}{\pi}\int_0^a \frac{(\alpha_3 x^2 + \alpha_4 y^2)\,dy}{(x^2+y^2)^2\sqrt{y^2-a^2}}\int_{-a}^a \frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r-y}\times$$

$$\times\left[w_3(r, t)\cos\gamma \ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a} + w_1(r, t)\sin\gamma \ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}\right]dr\Bigg\}\,dt +$$

$$+ \frac{2}{\pi^2}\int_0^{\alpha_2} \Psi_2(\tau)\left\{\int_0^a \frac{y w_4(y, \tau)(\alpha_1 y^2 - \alpha_2 x^2)}{(x^2+y^2)^2}\,dy +\right.$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^a \frac{y(\alpha_1 y^2 - \alpha_2 x^2)\,dy}{(x^2+y^2)^2\sqrt{y^2-a^2}}\int_{-a}^a \frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r-y}\times$$

$$\times\left[w_2(r, \tau)\cos\gamma \ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a} - w_4(r, \tau)\sin\gamma \ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}\right]dr +$$

$$+ x\int_0^a \frac{(\alpha_3 x^2 + \alpha_4 y^2)\,w_2(\tau, y)}{(x^2+y^2)^2}\,dy - \frac{x}{\pi}\int_0^a \frac{(\alpha_3 x^2 + \alpha_4 y^2)\,dy}{(x^2+y^2)^2\sqrt{y^2-a^2}}\times$$

$$\times\int_{-a}^a \frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r-y}\left[w_4(r, \tau)\cos\gamma \ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a} +\right.$$

$$\left. + w_2(r, \tau)\sin\gamma \ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}\right]dr\Bigg\}\,d\tau +$$

$$+ \frac{2}{\pi^2}\int_{\alpha_1}^\infty F_1(t)\left\{\int_0^a \frac{y w_3(y, t)(\alpha_1 y^2 - \alpha_2 x^2)}{(x^2+y^2)^2}\,dy +\right.$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{y(\alpha_1 y^2-\alpha_2 x^2)\,dy}{(x^2+y^2)^2\sqrt{y^2-a^2}}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r-y}\left[w_1(r,t)\cos\gamma\ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}-\right.$$

$$\left.-w_2(r,t)\sin\gamma\ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}\right]dr+x\int_{0}^{\infty}\frac{w_1(t,y)(\alpha_3 x^2+\alpha_4 y^2)}{(x^2+y^2)^2}dy-$$

$$-\frac{x}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{(\alpha_3 x^2+\alpha_4 y^2)\,dy}{(x^2+y^2)^2\sqrt{y^2-a^2}}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r-y}\left[w_2(r,t)\cos\gamma\ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}+\right.$$

$$\left.\left.+w_1(r,t)\sin\gamma\ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}\right]dr\right\}dt+$$

$$+\frac{2}{\pi^2}\int_{a_2}^{\infty}F_2(\tau)\left\{\int_{0}^{\infty}\frac{yw_4(y,\tau)(\alpha_1 y^2-\alpha_2 x^2)}{(x^2+y^2)^2}dy+\right.$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{y(\alpha_1 y^2-\alpha_2 x^2)}{(x^2+y^2)^2\sqrt{y^2-a^2}}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r-y}\times$$

$$\times\left[w_2(r,\tau)\cos\gamma\ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}-w_4(r,\tau)\sin\gamma\ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}\right]dr+$$

$$+x\int_{0}^{\infty}\frac{\alpha_3 x^2+\alpha_4 y^2}{(x^2+y^2)^2}w_2(\tau,y)\,dy-$$

$$-\frac{x}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{(\alpha_3 x^2+\alpha_4 y^2)\,dy}{(x^2+y^2)^2\sqrt{y^2-a^2}}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r-y}\left[w_4(r,\tau)\cos\gamma\ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}+\right.$$

$$\left.\left.+w_2(r,\tau)\sin\gamma\ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}\right]dr\right\}d\tau,\quad 0<x<a_1 \tag{1.46}$$

$$\sigma_y^{(2)}(x,0)=\frac{2}{\pi}\frac{x}{a_2}\frac{F_2(a_2)-\Psi_2(a_2)}{\sqrt{a_2^2-x^2}}+\frac{2}{\pi}x\int_{x}^{a_2}\frac{\tau\Psi_2'(\tau)-\Psi_2(\tau)}{\tau^2\sqrt{\tau^2-x^2}}d\tau+$$

$$+\frac{2}{\pi}x\int_{a_2}^{\infty}\frac{\tau F_2'(\tau)-F_2(\tau)}{\tau^2\sqrt{\tau^2-x^2}}d\tau+$$

$$+\frac{4}{\pi^2}\int_{0}^{a_1}\Psi_1(t)\left\{\omega_4\left[\frac{x\ln\left(\frac{x}{t}+\sqrt{\frac{x^2}{t^2}-1}\right)}{(x^2-t^2)^{3/2}}-\frac{1}{x^2-t^2}\right]-\right.$$

$$-\omega_5\left[\frac{x^2+2t^2}{(x^2-t^2)^2}-\frac{3xt^2\ln\left(\frac{x}{t}+\sqrt{\frac{x^2}{t^2}-1}\right)}{(x^2-t^2)^{5/2}}\right]\Bigg\}\,dt+$$

$$+\frac{4}{\pi^2}\int\limits_{a_1}^{\infty}F_1(t)\Bigg\{\omega_4\left[\frac{x\ln\left(\frac{x}{t}+\sqrt{\frac{x^2}{t^2}-1}\right)}{(x^2-t^2)^{3/2}}-\frac{1}{x^2-t^2}\right]-$$

$$-\omega_5\left[\frac{x^2+2t^2}{(x^2-t^2)^2}-\frac{3xt^2\ln\left(\frac{x}{t}+\sqrt{\frac{x^2}{t^2}-1}\right)}{(x^2-t^2)^{5/2}}\right]\Bigg\}\,dt+$$

$$+\frac{4}{\pi^2}\int\limits_{0}^{x}\Psi_2(\tau)\Bigg\{\omega_7\left[\frac{x\ln\left(\frac{x}{\tau}+\sqrt{\frac{x^2}{\tau^2}-1}\right)}{(x^2-\tau^2)^{3/2}}-\frac{1}{x^2-\tau^2}\right]+$$

$$+x(\omega_8+\omega_8)\left[\frac{\tau^2+2x^2}{(x^2-\tau^2)^{5/2}}\ln\left(\frac{x}{\tau}+\sqrt{\frac{x^2}{\tau^2}-1}\right)-\frac{3x}{(x^2-\tau^2)^2}\right]+$$

$$+\frac{\omega_9}{2}\left[\frac{2x^4+13x^2\tau^2}{(x^2-\tau^2)^3}-x\frac{3\tau^4+12x^2\tau^2}{(x^2-\tau^2)^{7/2}}\ln\left(\frac{x}{\tau}+\sqrt{\frac{x^2}{\tau^2}-1}\right)\right]+$$

$$+\omega_{10}\left[\frac{x^2+2\tau^2}{(x^2-\tau^2)^2}-\frac{3x\tau^2\ln\left(\frac{x}{\tau}+\sqrt{\frac{x^2}{\tau^2}-1}\right)}{(x^2-\tau^2)^{5/2}}\right]\Bigg\}\,d\tau+$$

$$+\frac{4}{\pi^2}\int\limits_{x}^{a_2}\Psi_2(\tau)\Bigg\{\omega_7\left[\frac{1}{\tau_2-x^2}-\frac{x\arccos x/\tau}{(\tau^2-x^2)^{3/2}}\right]+$$

$$+x(\omega_8+\omega_8)\left[\frac{(\tau^2+2x^2)\arccos x/\tau}{(\tau^2-x^2)^{5/2}}-\frac{3x}{(\tau^2-x^2)^2}\right]+$$

$$+\frac{\omega_9}{2}x\left[\frac{3\tau^4+13x^2\tau^2}{(\tau^2-x^2)^{7/2}}\arccos\frac{x}{\tau}-\frac{13x\tau^2+2x^3}{(\tau^2-x^2)^3}\right]+$$

$$+\omega_{10}\left[\frac{2\tau^2+x^2}{(\tau^2-x^2)^2}-\frac{3x\tau^2\arccos x/\tau}{(\tau^2-x^2)^{5/2}}\right]\Bigg\}\,d\tau+$$

$$+\frac{4}{\pi^2}\int\limits_{a_2}^{\infty}F_2(\tau)\Bigg\{\omega_7\left[\frac{1}{\tau^2-x^2}-\frac{x\arccos x/\tau}{(\tau^2-x^2)^{3/2}}\right]+$$

$$+x(\omega_8+\omega_8)\left[\frac{(\tau^2+2x^2)\arccos x/\tau}{(\tau^2-x^2)^{5/2}}-\frac{3x}{(\tau^2-x^2)^2}\right]+$$

$$+\frac{\omega_9}{2}x\left[\frac{3\tau^5+13x^2\tau^3}{(\tau^2-x^2)^{7/2}}\arccos\frac{x}{\tau}-\frac{13x\tau^2+2x^3}{(\tau^2-x^2)^3}\right]+$$

$$+\omega_{10}\left[\frac{2\tau^2+x^2}{(\tau^2-x^2)^2}-\frac{3x\tau^2\arccos x/\tau}{(\tau^2-x^2)^{5/2}}\right]\Bigg\}d\tau+$$

$$+c\int_0^a\frac{y(\alpha_5y^2-\alpha_2x^2)\sin\gamma\ln\dfrac{y+a}{y-a}}{(x^2+y^2)^2\sqrt{y^2-a^2}}dy-cx\int_0^a\frac{(\alpha_2x^2+\alpha_6y^2)\cos\gamma\ln\dfrac{y+a}{y-a}}{(x^2+y^2)^2\sqrt{y^2-a^2}}dy+$$

$$+\frac{2}{\pi^2}\int_0^{\alpha_1}\Psi_1(t)\Bigg\{\int_0^a\frac{y(\alpha_5y^2-\alpha_2x^2)}{(x^2+y^2)^2}w_3(g,t)\,dy-$$

$$-x\int_0^a\frac{\alpha_2x^2+\alpha_6y^2}{(x^2+y^2)^2}w_1(t,y)\,dy+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^a\frac{y(\alpha_5y^2-\alpha_2x^2)\,dy}{(x^2+y^2)^2\sqrt{y^2-a^2}}\int_{-a}^a\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r-y}\left[w_1(r,t)\cos\gamma\ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}-\right.$$

$$\left.-w_3(r,t)\sin\gamma\ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}\right]dr+$$

$$+\frac{x}{\pi}\int_0^a\frac{(a_2x^2+\alpha_6y^2)\,dy}{(x^2+y^2)^2\sqrt{y^2-a^2}}\int_{-a}^a\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r-y}\left[w_3(r,t)\sin\gamma\ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}+\right.$$

$$\left.+w_1(r,t)\sin\gamma\ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}\right]dr\Bigg\}dt+$$

$$+\frac{2}{\pi^2}\int_0^{\alpha_2}\Psi_2(\tau)\Bigg\{\int_0^a\frac{y(\alpha_5y^2-\alpha_2x^2)}{(x^2+y^2)^2}w_4(y,\tau)\,dy-$$

$$-x\int_0^a\frac{\alpha_2x^2+\alpha_6y^2}{(x^2+y^2)^2}w_2(y,\tau)\,dy+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^a\frac{y(\alpha_5y^2-\alpha_2x^2)\,dy}{(x^2+y^2)^2\sqrt{y^2-a^2}}\int_{-a}^a\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r-y}\left[w_2(r,\tau)\cos\gamma\ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}-\right.$$

$$\left.-w_4(r,\tau)\sin\gamma\ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}\right]dr+$$

$$+\frac{x}{\pi}\int_0^a\frac{(\alpha_2x^2+\alpha_6y^2)\,dy}{(x^2+y^2)^2\sqrt{y^2-a^2}}\int_{-a}^a\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r-y}\left[w_4(r,\tau)\cos\gamma\ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}+\right.$$

$$+ w_2(r, \tau) \sin\gamma \ln \frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}\Bigg] dr\Bigg\} d\tau +$$

$$+ \frac{2}{\pi^2}\int\limits_{a_1}^{\infty} F_1(t)\Bigg\{\int\limits_0^a \frac{y(\alpha_5 y^2 - \alpha_2 x^2)}{(x^2+y^2)^2} w_3(y, t)\, dy - x\int\limits_0^a \frac{\alpha_2 x^2 + \alpha_6 y^2}{(x^2+y^2)^2} w_1(t, y)\, dy +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int\limits_0^a \frac{y(\alpha_5 y^2 - \alpha_2 x^2)\, dy}{(x^2+y^2)^2\sqrt{y^2-a^2}}\int\limits_{-a}^a \frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r-y}\Bigg[w_1(r, t)\cos\gamma \ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a} -$$

$$- w_3(r, t)\sin\gamma \ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}\Bigg] dr +$$

$$+ \frac{x}{\pi}\int\limits_0^a \frac{(\alpha_2 x^2 + \alpha_6 y^2)\, dy}{(x^2+y^2)^2\sqrt{y^2-a^2}}\int\limits_{-a}^a \frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r-y}\Bigg[w_3(r, t)\cos\gamma \ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a} +$$

$$+ w_1(r, t)\sin\gamma \ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}\Bigg] dr\Bigg\} dt +$$

$$+ \frac{2}{\pi^2}\int\limits_{a_2}^{\infty} F_2(\tau)\Bigg\{\int\limits_0^a \frac{y(\alpha_5 y^2 - \alpha_2 x^2)}{(x^2+y^2)^2} w_4(y, \tau)\, dy - x\int\limits_0^a \frac{\alpha_2 x^2 + \alpha_6 y^2}{(x^2+y^2)^2} w_2(\tau, y)\, dy +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int\limits_0^a \frac{y(\alpha_5 y^2 - \alpha_2 x^2)\, dy}{(x^2+y^2)^2\sqrt{y^2-a^2}}\int\limits_{-a}^a \frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r-y}\Bigg[w_2(r, \tau)\cos\gamma \ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a} -$$

$$- w_4(r, \tau)\sin\gamma \ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}\Bigg] dr +$$

$$+ \frac{x}{\pi}\int\limits_0^a \frac{(\alpha_2 x^2 + \alpha_6 y^2)}{(x^2+y^2)^2}\frac{dy}{\sqrt{y^2-a^2}}\int\limits_{-a}^a \frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r-y}\times$$

$$\times\Bigg[w_4(r, \tau)\cos\gamma \ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a} +$$

$$+ w_2(r, \tau)\sin\gamma \ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}\Bigg] dr\Bigg\} d\tau \qquad 0 < x < a_2 \qquad (1.47)$$

$$v_1(x, 0) = \frac{4}{\pi}\frac{1}{E_1}\int\limits_0^{a_1} \frac{\Psi_1(t)\, dt}{\sqrt{x^2-t^2}} + \frac{4}{\pi}\frac{1}{E_1}\int\limits_{a_1}^{\infty} \frac{F_1(t)\, dt}{\sqrt{x^2-t^2}} \qquad a_1 \leqslant x < \infty$$

$$(1.48)$$

$$v_2(x, 0) = \frac{4}{\pi}\frac{1}{E_2}\int\limits_0^{a_2} \frac{\Psi_2(\tau)}{\sqrt{x^2-\tau^2}}\, d\tau + \frac{4}{\pi}\frac{1}{E_2}\int\limits_{a_2}^{\infty} \frac{F_2(\tau)\, d\tau}{\sqrt{x^2-\tau^2}} \qquad a_2 \leqslant x < \infty$$

$$\alpha_1 = \frac{2l_1 - l_5}{\mu l_1 (l_2 + l_5)}; \quad \alpha_2 = \frac{l_5}{\mu l_1 (l_2 + l_5)}; \quad \alpha_3 = \frac{3l_1 + l_2}{\mu l_1 (l_2 + l_5)}$$

$$\alpha_4 = \frac{l_1 + l_2}{\mu l_1 (l_2 + l_5)}; \quad \alpha_5 = \frac{3l_5 - 2l_1}{\mu l_1 (l_2 + l_5)}; \quad \alpha_6 = \frac{5l_2 + 3l_1}{\mu l_1 (l_2 + l_5)}$$

Напряжения $\sigma_x^{(1)}(0, y) = \sigma_x^{(2)}(0, y)$ вне разреза на линии $x = 0$ выражаются через функции $F_1(t)$ и $F_2(\tau)$ следующим образом:

$$\sigma_x^{(1)}(0, y) = \sigma_x^{(2)}(0, y) = -\frac{\pi}{2} \frac{l_2 c}{l_1 (l_2 + l_5)} \frac{\cos\gamma \ln \frac{y + a}{y - a}}{\sqrt{y^2 - a^2}} +$$

$$+ \frac{l_5 c}{l_1 (l_2 + l_5)} \int_0^a \frac{r \sin\gamma \ln \frac{r + a}{r - a}}{\sqrt{r^2 - a^2}\,(r^2 - y^2)} dr +$$

$$+ \frac{4}{\pi^2} \int_0^{a_1} \Psi_1(t) \left\{ \delta_1 \left[\frac{t}{y(y^2 + t^2)} + \frac{y \ln\left(\frac{t}{y} + \sqrt{\frac{t^2}{y^2} + 1}\right)}{(y^2 + t^2)^{3/2}} \right] + \right.$$

$$\left. + \delta_2 \left[\frac{t(2y^2 - t^2)}{y(y^2 + t^2)^2} - \frac{3yt^2 \ln\left(\frac{t}{y} + \sqrt{\frac{t^2}{y^2} + 1}\right)}{(y^2 + t^2)^{5/2}} \right] \right\} dt +$$

$$+ \frac{4}{\pi^2} \int_0^{a_2} \Psi_2(\tau) \left\{ \delta_3 \left[\frac{\tau}{y(y^2 + \tau^2)} + \frac{y \ln\left(\frac{\tau}{y} + \sqrt{\frac{\tau^2}{y^2} + 1}\right)}{(y^2 + \tau^2)^{3/2}} \right] + \right.$$

$$\left. + \delta_4 \left[\frac{\tau(2y^2 - \tau^2)}{y(y^2 + \tau^2)^2} - \frac{3y\tau^2 \ln\left(\frac{\tau}{y} + \sqrt{\frac{\tau^2}{y^2} + 1}\right)}{(y^2 + \tau^2)^{5/2}} \right] \right\} d\tau +$$

$$+ \frac{4}{\pi^2} \int_{a_1}^{\infty} F_1(t) \left\{ \delta_1 \left[\frac{t}{y(y^2 + t^2)} + \frac{y \ln\left(\frac{t}{y} + \sqrt{\frac{t^2}{y^2} + 1}\right)}{(y^2 + t^2)^{3/2}} \right] + \right.$$

$$\left. + \delta_2 \left[\frac{t(2y^2 - t^2)}{y(y^2 + t^2)^2} - \frac{3yt^2}{(y^2 + t^2)^{5/2}} \ln\left(\frac{t}{y} + \sqrt{\frac{t^2}{y^2} + 1}\right) \right] \right\} dt +$$

$$+ \frac{4}{\pi^2} \int_{a_2}^{\infty} F_2(\tau) \left\{ \delta_3 \left[\frac{\tau}{y(y^2 + \tau^2)} + \frac{y}{(y^2 + \tau^2)^{3/2}} \ln\left(\frac{\tau}{y} + \sqrt{\frac{\tau^2}{y^2} + 1}\right) \right] + \right.$$

$$+\delta_4\left[\frac{\tau(2y^2-\tau^2)}{y(y^2+\tau^2)^2}-\frac{3y\tau^2}{(y^2+\tau^2)^{5/2}}\ln\left(\frac{\tau}{y}+\sqrt{\frac{\tau^2}{y^2}+1}\right)\right]\Big\}d\tau+$$

$$+\frac{2}{\pi^2}\int_0^{\alpha_1}\Psi_1(t)\Big\{\frac{h_1}{\sqrt{y^2-a^2}}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r-y}\Big[w_3(r,t)\cos\gamma\ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}+$$

$$+w_1(r,t)\sin\gamma\ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}\Big]dr-$$

$$-\pi h_1 w_1(t,y)+\alpha_2\int_0^a\frac{rw_3(r,t)}{r^2-y^2}dr+\frac{\alpha_2}{\pi}\int_0^a\frac{rdr}{\sqrt{r^2-a^2}(r^2-y^2)}\times$$

$$\times\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u-r}\Big[w_1(t,u)\cos\gamma\ln\frac{u+a}{u-a}\frac{r-a}{r+a}-$$

$$-w_3(u,t)\sin\gamma\ln\frac{u+a}{u-a}\frac{r-a}{r+a}\Big]du\Big\}dt+$$

$$+\frac{2}{\pi^2}\int_0^{\alpha_2}\Psi_2(\tau)\Big\{\frac{h_1}{\sqrt{y^2-a^2}}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r-y}\Big[w_4(r,\tau)\cos\gamma\ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}+$$

$$+w_2(r,\tau)\sin\gamma\ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}\Big]dr-$$

$$-\pi h_1 w_2(\tau,y)+\alpha_2\int_0^a\frac{rw_4(r,\tau)}{r^2-y^2}dr+\frac{\alpha_2}{\pi}\int_0^a\frac{rdr}{\sqrt{r^2-a^2}(r^2-y^2)}\times$$

$$\times\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u-r}\Big[w_1(u,t)\cos\gamma\ln\frac{u+a}{u-a}\frac{r-a}{r+a}-$$

$$-w_4(u,\tau)\sin\gamma\ln\frac{u+a}{u-a}\frac{r-a}{r+a}\Big]du\Big\}d\tau+$$

$$+\frac{2}{\pi^2}\int_{\alpha_1}^{\bar{}}F_1(t)\Big\{\frac{h_1}{\sqrt{y^2-a^2}}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r-y}\Big[w_3(r,t)\cos\gamma\ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}+$$

$$+w_1(r,t)\sin\gamma\ln\frac{r+a}{r-a}\frac{y-a}{y+a}\Big]dr-\pi h_1 w_1(t,y)+$$

$$+\alpha_2\int_0^a\frac{rw_3(r,t)}{r^2-y^2}dr+\frac{\alpha_2}{\pi}\int_0^a\frac{rdr}{\sqrt{r^2-a^2}(r^2-y^2)}\times$$

$$\times \int_{-a}^{a} \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u-r} \left[w_1(t, u) \cos\gamma \ln \frac{r+a}{r-a} \frac{y-a}{y+a} - \right.$$

$$\left. - w_3(u, t) \sin\gamma \ln \frac{u+a}{u-a} \frac{r-a}{r+a} \right] dr \Big\} dt +$$

$$+ \frac{2}{\pi^2} \int_{a_2}^{\infty} F_2(\tau) \Big\{ \frac{h_1}{\sqrt{y^2-a^2}} \int_{-a}^{a} \frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r-y} \times$$

$$\times \left[w_4(r, \tau) \cos\gamma \ln \frac{r+a}{r-a} \frac{y-a}{y+a} + w_2(r, \tau) \sin\gamma \ln \frac{r+a}{r-a} \frac{y-a}{y+a} \right] dr -$$

$$- \pi h_1 w_2(\tau, y) + \alpha_2 \int_{0}^{a} \frac{r w_4(r, \tau)}{r^2-y^2} dr + \frac{\alpha_2}{\pi} \int_{0}^{a} \frac{r dr}{\sqrt{r^2-a^2}\,(r^2-y^2)} \times$$

$$\times \int_{-a}^{a} \frac{\sqrt{u^2-r^2}}{u-r} \left[w_1(u, \tau) \cos\gamma \ln \frac{u+a}{u-a} \frac{r-a}{r+a} - \right.$$

$$\left. - w_4(u, \tau) \sin\gamma \ln \frac{u+a}{u-a} \frac{r-a}{r+a} \right] du \Big\} d\tau, \quad a < y < \infty \tag{1.49}$$

$$\delta_1 = (n_1+1)\mu_1 + \mu_2; \quad \delta_2 = \mu_1 + \frac{\mu_2}{2}; \quad \delta_3 = (n_2+1)\mu_3 + \mu_2$$

$$\delta_4 = \mu_3 + \frac{\mu_2}{2}; \quad h_1 = \frac{l_2}{2\mu l_1 (l_2 + l_3)}$$

Формулы (1.46), (1.47) и (1.48) определяют напряжения и перемещения для заданных величин контакта a_1, a_2.

Если эти величины не заданы, то их можно определить из условия непрерывности нормальных напряжений, что выражается трансцендентными уравнениями:

$$\Psi_1(a_1) - F_1(a_1) = 0, \quad \Psi_2(a_2) - F_2(a_2) = 0 \tag{1.50}$$

В частном случае, когда $E_1 = E_2$; $\nu_1 = \nu_2$; $a_1 = a_2$ и $a \to 0$, получим решение задачи о вдавливании жесткого штампа симметричного очертания на упругую однородную полуплоскость, совпадающее с решением, полученным М. А. Садовским [14].

Когда $a \to 0$ и материалы квадрантов различные, то получается решение контактной задачи о давлении жесткого штампа с основанием произвольной формы, приложенного на части горизонтальной границы упругой составной полуплоскости [16].

Институт механики АН Армянской ССР
Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 4 IV 1980

Հ. Ֆ. ՄԻՆԱՍՅԱՆ, Վ. Ս. ՏՈՆՈՅԱՆ

ՈՒՂՂԱՁԻԳ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ՃԵՂՔՈՎ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱՐ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում է հորիզոնական եզրից սկսած ուղղաձիգ վերջավոր երկարության ճեղք ունեցող առաձգական բաղադրյալ կիսահարթության ոչ սիմետրիկ կոնտակտային խնդիրը։ Կիսահարթությունը բաղկացած է երկու համասեռ և իզոտրոպ քառորդ հարթություններից, տարբեր առաձգական հատկություններով, որոնց նյութերի բաժանման գիծը ուղղահայաց է կիսահարթության եզրին։ Նյութերի բաժանման գծի երկայնքով տարված է դեպի կիսահարթության եզրը դուրս եկող վերջավոր երկարությամբ ճեղք։ Կիսահարթության հորիզոնական եզրի մի մասի վրա կիրառված է կամայական հիմքով կոշտ դրոշմը, այնպես որ դրոշմը գտնվում է երկու նյութերի վրա միաժամանակ և նրա դիրքը ճեղքի նկատմամբ սիմետրիկ չէ։

Ենթադրվում է, որ շփումը դրոշմի և կիսահարթության միջև բացակայում է։ Պարզության համար ընդունված է, որ կիսահարթության եզրը՝ դրոշմից դուրս ազատ է լարումներից։ Վերջավոր ճեղքի եզրում կիրառված է նորմալ ճնշում։ Նյութերի բաժանման գծի վրա ճեղքից դուրս տրված են լրիվ կոնտակտի պայմանները։

Խնդիրը լուծված է Ֆուրյեի մեթոդով։ Ինտեգրման գործակիցների որոշումը հանգել է չորս «զույգ» ինտեգրալ հավասարումներից բաղկացած սիստեմի լուծմանը, ընդ որում երկու «զույգ» ինտեգրալ հավասարումների լուծումը բերվել է մի սինգուլյար ինտեգրալ հավասարման լուծմանը։ Այնուհետև օգտագործելով մնացած երկու «զույգ» ինտեգրալ հավասարումների և սինգուլյար ինտեգրալ հավասարման լուծումները, խնդրի լուծումը բերվել է Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի երկու ինտեգրալ հավասարումներից բաղկացած սիստեմի լուծմանը։ Ստացված են կոնտակտի չափերը՝ որոշող տրանսցենդենտ հավասարումներ։ Մասնավոր դեպքում, երբ դրոշմը սիմետրիկ է ճեղքի նկատմամբ և ճեղքի երկարությունը ձգտում է 0-ի, ստացվում է բաղադրյալ կիսահարթության եզրի վրա կոշտ դրոշմի ճնշման խնդիրը [16]։

ON CONTACT PROBLEM FOR AN ELASTIC COMPOUND SEMI-PIANE WITH A VERTICAL FINITE CRACK

H. F. MINASIAN, V. S. TONOYAN

S u m m a r y

The contact probiem in the plane theory of elasticity for an elastic compound semi-plane with a crack of finite length along division line of the materials, reaching the boundary is considered.

The semi-plane consists of two homogeneous and isotropic quadrants with different elastic characteristics, whose division line of materials is perpendicular to the boundary of the semi-plane. On the boundary of the semi-plane the rigid punch with a smooth base is pressed in such a way

that the punch is located asymmetrically on the two materials simultaneously. It is assumed that friction between the punch and semi-plane is absent. For simplicity it is also assumed that the boundary of semi-plane outside of the punch is free from outer forces. In the finite crack whose length may be determined, only normal pressure operates. On the division line of the materials, outside of crack, full contact conditions are given. After the problem is solved under the above assumptions the peculiarities of stresses are removed and the equations to define the crack depth and the dimensions of the contact zones are obtained.

The problem is solved by the Fourier method. The determination of integration coefficients is reduced to the solution of a system of four dual integral equations. The solution of the latter is reduced to the system of Fredholm's integral equations of the second kind.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черепанов Г. П.* О напряженном состоянии в неоднородной пластинке с разрезами. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 1.
2. *Попов Г. Я.* Плоская контактная задача для линейно-деформируемого основания при наличии сил сцепления. ПММ, 1973, т. 37, вып. 2.
3. *Вилков И. М.* Плоская контактная задача для двухслойного основания при действии симметричной нагрузки на жесткий штамп. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1963, № 4.
4. *Приварников А. К., Шевляков Ю. А.* Контактная задача для многослойного основания. Прик. мех., 1962, т. 8, вып. 5.
5. *Ильман В. М., Приварников А. К.* Действие системы штампов на упругое многослойное основание. Прик. мех., 1971, т. 7, вып. 6.
6. *Никишин В. С., Шапиро Г. С.* Задачи теории упругости для многослойных сред. М., Изд-во «Наука», 1973.
7. *Никишин В. С., Шапиро Г. С.* О контактных задачах для упругих многослойных сред. Труды симпозиума по механике сплошной среды и родственным проблемам анализа, том 1. Тбилиси. Изд-во «Мецниереба», 1973.
8. *Knauss W. G.* Fracture mechanics and the time dependent strength of Adhesive Joints. J. Composite materials, 1971, vol. 5. April, p.p. 176–192.
9. *Тоноян В. С.* О решении симметричной контактной задачи для полуплоскости с включением. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1968, т. 21, № 3.
10. *Ашбаух Н. Е.* Развитие конечной трещины, перпендикулярной поверхности раздела двух материалов. Прикл. мех., 1973, т. 40, № 2, изд-во «Мир».
11. *Ашбаух Н. Е.* Напряжение в слоистых композитах, содержащих разорванный слой. Прикл. мех., 1973, т. 40, № 2, изд-во «Мир».
12. *Bogy D. B.* The plane elastostatic solution for a symmetrically loaded crack in a strip composite. Int. J. Engng. Sci, 1979, vol. 11, 9.
13. *Боджи Д. Б.* Действие касательных и нормальных нагрузок на прямоугольные упругие клинья, выполненные из разных материалов и соединенные по граням. Прикл. мех., 1973, т. 40, № 2, изд-во «Мир».
14. *Sadowski M. A.* Zweidimensinale probleme der elastitstheorie. Ztschr. für angew. Math. und Mech., 1928, Bd. 8.
15. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., изд. «Наука», 1966.
16. *Тоноян В. С., Минасян А. Ф.* Об одной контактной задаче для упругой составной полуплоскости. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1979, т. 32, № 3.
17. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М., Изд-во физ.-мат. лит., 1963.
18. *Михлин С. Г.* Интегральные уравнения. М.—Л., Гостехиздат, 1949.