ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIII, № 5, 1980 Механика

Г. Г. ЕГИЯН

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ БЫСТРОДЕЙСТВИИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

1. В этом разделе дадим постановку задачи и рассмотрим вопрос о допустимых управлениях. Пусть имеется управляемая система вида

$$dx(t) = [f(x(t)) + Bu(x(t))]\, dt + \sigma(x(t))\, d\xi(t) + a(x(t))\, d\eta(t), \quad x(0) = x, \quad t \geq 0 \tag{1.1}$$

Здесь $x(t)$ — вектор фазовых координат, принадлежащий евклидову пространству E^n размерности n, B — заданная постоянная матрица, $\xi(t)$ — n-мерный винеровский процесс, $\eta(t)$ — r-мерный пуассоновский процесс, каждая из компонент которого есть однородный пуассоновский процесс $\eta_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, причем все $\eta_i(t)$ независимы и в совокупности не зависят от $\xi(t)$, и

$$M\eta_i(t) = \lambda$$

где M — знак математического ожидания, λ — постоянный r-мерный вектор. Вектор управления $u(x)$ для всех x удовлетворяет ограничению

$$u(x) \subset U \tag{1.2}$$

Здесь U — заданное выпуклое ограниченное множество. Функция $f(x, (t))$, матрицы $\sigma(x(t))$ и $a(x(t))$ удовлетворяют глобальному условию Липшица

$$|f(x_1) - f(x_2)| + |\sigma(x_1) - \sigma(x_2)| + |a(x_1) - a(x_2)| \leq G|x_1 - x_2|$$

Здесь G — некоторая неотрицательная постоянная, знак $|\ |$ означает евклидову норму соответствующего вектора или матрицы.

Пусть задано некоторое множество Q в фазовом пространстве E^n. Обозначим через Q_1 границу множества Q, а через $\tau_x(u)$ — момент первого достижения множества Q процессом (1.1) с начальным условием $x(0) = x$ при управлении u. Для тех траекторий процесса (1.1), которые не достигают Q ни за какое конечное время, будем полагать $\tau_x(u) = \infty$.

Ставится задача — выбрать такое управление u, которое удовлетворяет ограничению (1.2) и минимизирует функционал

$$M\tau_x(u) \tag{1.3}$$

При некоторых условиях гладкости [1] минимальное значение функционала (1.3), обозначаемое через $V(x)$, удовлетворяет уравнению Беллмана

$$\inf_{u\in U}(L_u V(x)+1)=0,\quad x\in Q_2;\quad V(x)=0,\quad x\in Q\cup Q_1$$

$$L_u V(x)=(f+Bu)'\,\partial V/\partial x+\frac{1}{2}\,Sp\sigma\sigma'\partial^2 V/\partial x^2+$$

$$+\sum_{i=1}^{l}[V(x+a(x)e_i)-V(x)]\lambda_i \tag{1.4}$$

Здесь Q_2 — дополнение $Q\cup Q_1$ до E^n, штрих — знак транспонирования, $\partial V/\partial x$ — вектор с координатами $\partial V/\partial x_i$; $\partial^2 V/\partial x^2$ — матрица с компонентами $\partial^2 V/\partial x_i\partial x_j$, i, $j=1, 2, \dots, n$, Sp — след матрицы, e_i — вектор, i-я координата которого равна единице, а остальные координаты равны нулю, λ_i — i-я координата вектора λ.

Задача Коши (1.4) имеет неединственное решение. Для пояснения этого факта в разделе 2 настоящей работы будет рассмотрен пример 2.1 для скалярной системы вида (1.1). На основе теоремы 2.1 будет дана методика построения решения уравнения Беллмана для указанного случая, а на основе рассматриваемой ниже леммы 1.1 будет дана верхняя оценка значений функции Беллмана.

Перейдем к вопросу о допустимых управлениях. Управление u будем называть допустимым, если при этом управлении $M\tau_x(u)<\infty$ для любых конечных x и существует сильное решение уравнения (1.1), то есть [2] существует случайный процесс, измеримый относительно $\xi(s)$ и $\eta(s)$, $0\leqslant s\leqslant t$ и удовлетворяющий с вероятностью 1 интегральному тождеству

$$x(t)-x=\int_0^t[f(x(s))+Bu(x(s))]\,ds+$$

$$+\int_0^t\sigma(x(s))\,d\xi(s)+\int_0^t a(x(s))\,d\eta(s)$$

Из [3] (стр. 130—131) вытекает

Лемма 1.1. Пусть в Q_2 существует дважды непрерывно дифференцируемая неотрицательная функция $D(x)$ такая, что при управлении $u(x)$, удовлетворяющем ограничению (1.2), существует решение системы (1.1) и выполняется неравенство

$$L_u D(x)\leqslant -c,\quad x\in Q_2 \tag{1.5}$$

где c — некоторая положительная константа. Тогда управление $u(x)$ является допустимым, причем $M\tau_x(u)\leqslant c^{-1}D(x)$.

Пример 1.1. Пусть задан закон движения материальной точки

$$\begin{cases} dx=y\,dt\\ dy=u\,dt+\sigma d\xi(t)+a\,d\eta(t),\quad t\geqslant 0\end{cases} \tag{1.6}$$

Здесь u — управление, $|u| \leqslant b$, a, b и σ — некоторые положительные константы, $\xi(t)$ — скалярный стандартный винеровский процесс, $\eta(t)$ — скалярный пуассоновский процесс с математическим ожиданием $M\eta(t) = 1$. Требуется выбором управления u обеспечить быстрейшее попадание точки, движущейся по закону (1.6) на ось $x = 0$.

Рассмотрим случай, когда начальная фазовая точка системы (1.6) находится в правой полуплоскости (xy), то есть $x(0) > 0$. Из (1.6) видно, что в этом случае оптимальным может быть управление $u = -b$. Выясним, допустимо ли управление $u = -b$. Положим

$$a < b \tag{1.7}$$

Построим неотрицательную функцию $D(x, y)$ вида

$$D(x, y) = \frac{1}{2} y^2 + k_1 y + (b - a) x + k_2 \tag{1.8}$$

где k_1 и k_2 — положительные константы. Константа k_2 подбирается после выбора константы k_1 таким образом, чтобы при малых отрицательных y обеспечивалось $D(x, y) \geqslant 0$, а константа k_1 будет подобрана ниже.

Уравнение Беллмана для поставленной задачи имеет вид

$$L_{-b}V + 1 = 0$$

$$L_{-b}V = y\frac{\partial V(x, y)}{\partial x} - b\frac{\partial V(x, y)}{\partial y} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial y^2} +$$

$$+ V(x, y + a) - V(x, y) \tag{1.9}$$

Из (1.8) и (1.9) имеем

$$L_{-b}D = -k_1(b - a) + \frac{\sigma^2 + a^2}{2} \tag{1.10}$$

Отсюда видно, что при $k_1 > \dfrac{\sigma^2 + a^2}{2(b-a)}$ выполняется неравенство $L_{-b}D < 0$. Поэтому, на основании леммы 1.1 управление $u = -b$ допустимо.

При $a = b$ из (1.8), приняв $k_2 = 0$, и из (1.10) имеем

$$D(x, y) = \frac{1}{2} y^2 + k_1 y \tag{1.11}$$

$$L_{-b}D = \frac{\sigma^2 + a^2}{2} > 0 \tag{1.12}$$

Из (1.12) видно, что условия леммы (1.1) нарушены. Выясним допустимо ли управление $u = -b$ в этом случае. Предположим, что управление $u = -b$ допустимо. Обозначим через τ момент достижения материальной точкой оси $x = 0$ при условии, что траектории процесса (1.6) в момент $t = 0$ выходят из некоторой фиксированной точки с координатами

$x_0 > 0$, $y_0 > 0$. Тогда согласно (1.6) $y(\tau) < 0$. Без потери общности можно считать, что $y(\tau + 0) = y(\tau) < 0$. Тогда

$$My(\tau) < 0 \tag{1.13}$$

На основании формулы Ито [2], учитывая (1.12), имеем

$$D(x(\tau),\ y(\tau)) - D(x_0,\ y_0) = \int\limits_0^\tau L_{-b} D ds = \frac{\sigma^2 + a^2}{2}\tau$$

Далее,

$$MD(x(\tau),\ y(\tau)) = D(x_0,\ y_0) + \frac{\sigma^2 + a^2}{2} M\tau > D(x_0,\ y_0) \tag{1.14}$$

С другой стороны, в силу (1.11)

$$MD(x(\tau),\ y(\tau)) = \frac{1}{2} My^2(\tau) + k_1 My(\tau)$$

Поскольку согласно (1.13) $My(\tau) < 0$, то всегда можно подобрать такую константу k_1, что

$$MD(x(\tau),\ y(\tau)) < D(x_0,\ y_0)$$

Сравнивая последнее выражение с (1.14), убеждаемся в их противоречивости. Поэтому $M\tau = \infty$, и управление $u = -b$ недопустимо. В случае $a > b$ траектории процесса (1.6), выходящие в момент $t = 0$ из произвольной фиксированной точки, будут проходить над соответствующими траекториями процесса (1.6) при $a = b$. Поэтому в этом случае также $M\tau = \infty$, и управление $u = -b$ недопустимо. Следовательно, поставленная выше задача оптимального быстродействия разрешима только при $a < b$.

2. В этом разделе выясним условия существования и методику построения решения уравнения Беллмана (1.4). Всюду далее будем считать, что множество Q, куда должны стремиться траектории процесса (1.1), есть ограниченная область в фазовом пространстве E^n с гладкой границей Q, типа Ляпунова. Выделим в множестве U класс допустимых управлений, который обозначим через Ω. Будем считать, что множество Ω не пусто. Всюду далее допустимые управления будем обозначать через $\omega(x)$, $\omega(x) \in \Omega$, а оптимальное управление — через $\omega_0(x)$.

Рассмотрим в E^n такую последовательность концентрических шаров радиуса N, обозначаемую через R_N, что $Q \subset R_N$. Обозначим через r_N границу шара радиуса N и определим последовательность скалярных функций $V_N(x)$ посредством краевой задачи

$$\begin{aligned} &\inf_{u \in U} (L_u V_N(x) + 1) = 0, \quad x \in Q_2 \cap R_N \\ &V_N(x) = 0, \quad x \in Q_1, \quad x \in r_N \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь $L_u V_N(x)$ определяется формулой (1.4). Из [5, 6] вытекает следующая

Лемма 2.1. Если коэффициенты уравнения (2.1) удовлетворяют требованиям раздела 1, ограниченная область Q имеет границу Q_1 типа Ляпунова и матрица $\sigma(x)$ невырождена при любом $x \in E^n$, то существует единственное решение $V_N(x)$ задачи (2.1) и $V_N(x) \geqslant 0$. Кроме того, для любых $N_2 > N_1$ справедливо неравенство

$$V_{N_2}(x) \geqslant V_{N_1}(x), \quad x \in Q_2 \cap R_{N_1}$$

Поскольку из леммы 2.1 следует, что краевая задача (2.1) имеет единственное неотрицательное решение $V_N(x)$ для произвольного выпуклого ограниченного множества управлений U, то возникает вопрос — при каких условиях последовательность $V_N(x)$ имеет предел, когда $N \to \infty$, и каков этот предел. На этот вопрос отвечает

Теорема 2.1. Если требования леммы 2.1 дополнить требованием существования непустого класса допустимых управлений Ω, то справедливы следующие утверждения:

1) монотонно-неубывающая последовательность $V_N(x)$ в любом ограниченном множестве изменения x равномерно сходится при $N \to \infty$ к некоторой функции, обозначаемой $V_0(x)$;

2) функция $V_0(x)$ есть минимальное положительное решение задачи (1.4);

3) функция $V_0(x)$ является точной нижней гранью значений функционала (1.3);

4) если выполняется равенство

$$\inf_{\omega \in \Omega} L_\omega V_0(x) = L_{\omega_0} V_0(x) = -1$$

то $\omega_0(x)$ есть оптимальное управление;

5) для любого числа ε, $0 < \varepsilon < 1$, найдется такое допустимое управление ω_ε, что

$$M\tau_x(\omega_\varepsilon) \leqslant (1-\varepsilon)^{-1} V_0(x)$$

Доказательство. Обозначим $W(x) = M\tau_x(\omega)$. Докажем, что при всех N

$$V_N(x) \leqslant W(x) \tag{2.2}$$

Момент первого достижения процессом (1.1) границ множества $Q_2 \cap R_N$ при управлении ω и $x \in Q_2 \cap R_N$ обозначим через $\tau_x^N(\omega)$, а через $x(t, \omega)$ — решение системы (1.1) при управлении ω. Поскольку понятно, что

$$M\tau_x^N(\omega) \leqslant W(x) \tag{2.3}$$

то для доказательства (2.2) достаточно установить, что

$$V_N(x) \leqslant M\tau_x^N(\omega) \tag{2.4}$$

На основании определения функции $V_N(x)$, леммы 2.1 и конечности $M\tau_x^N(\omega)$, в силу (2.3) к функции $V_N(x)$ и марковскому моменту $\tau_x^N(\omega)$ можно применить формулу Дынкина [7]. Отсюда с учетом (2.1) имеем

$$V_N(x(\tau_x^N(\omega), \omega)) - V_N(x) = M\int\limits_0^{\tau_x^N(\omega)} L_u V_N(x(t, \omega))\, dt \geqslant$$

$$\geqslant M\int\limits_0^{\tau_x^N(\omega)} \inf_{u \in U} L_u V_N(x(t, \omega))\, dt = -M\tau_x^N(\omega)$$

Из этого выражения вытекает (2.4), тем самым устанавливается и (2.2).

Теперь перейдем к доказательству п. 1) теоремы 2.1. Зафиксируем произвольную ограниченную область $Q_3 \subset E^n$ с границей того же типа, что и Q_1, причем $Q \subset Q_3$. Рассмотрим последовательность $V_N(x)$, $x \in Q_2 \cap Q_3$, при $N \to \infty$. Из неравенства (2.2) видно, что в уравнении (2.1) член $\sum\limits_{i=1}^{r} [V_N(x + a(x) e_i) - V_N(x)] b_i$ не превышает некоторой константы в ограниченной области изменения x. Поэтому к уравнению (2.1) можно применить те же рассуждения для получения соответствующих априорных оценок, которые были применены в работе [6] (стр. 359) для квазилинейного эллиптического уравнения. С учетом сказанного из [6, 12] вытекают оценки

$$\max_x |\partial V_N(x)/\partial x| \leqslant c_1, \quad x \in Q_3 \cap Q_2 \tag{2.5}$$

$$\max_x |\partial^2 V_N(x)/\partial x^2| \leqslant c_2 \quad x \in Q_3 \cap Q_2 \tag{2.6}$$

Здесь c_1 и c_2 — некоторые неотрицательные константы.

Оценки (2.2), (2.5), (2.6) показывают, что на любом ограниченном множестве $Q_3 \cap Q_2$ изменения фазовой координаты x последовательность $V_N(x)$ вместе со своими производными первого и второго порядков равномерно ограничена, то есть ([8], стр. 240), последовательность $(V_N(x), \partial V_N(x)/\partial x)$ компактна в пространстве непрерывных функций для всех $x \in Q_3 \cap Q_2$. Отсюда следует равномерная сходимость последовательности $(V_N(x), \partial V_N(x)/\partial x)$. Обозначим предел последовательности $V_N(x)$ при $N \to \infty$ через $V_0(x)$. Итак, утверждение 1) теоремы доказано. Перейдем к доказательству п. 2) теоремы.

Из [9] (стр. 176) и произвольности области Q_3 следует, что предел $V_0(x)$ есть решение задачи (1.4). Покажем, что $V_0(x)$ является минимальным положительным решением задачи (1.4). Предположим противное. Пусть найдется другое положительное решение $V^0(x)$ задачи (1.4) и

$$0 \leqslant V^0(x) \leqslant V_0(x) \tag{2.7}$$

Поскольку функция $V^0(x)$ есть решение задачи (1.4), то она удовлетворяет уравнению (2.1) при любом N внутри области $Q_2 \cap R_N$ и граничным условиям

$$
\begin{aligned}
V^0(x) &= V_N(x) = 0, \quad x \in Q_1 \\
V^0(x) &\geqslant V_N(x) = 0, \quad x \in r_N
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

Из (2.7), (2.8) и из [5] следует, что для всех $x \in Q_2 \cap R_N$

$$
V_N(x) \leqslant V^0(x) \tag{2.9}
$$

Из (2.7), (2.9) и из того факта, что $V_0(x) = \lim_{N \to \infty} V_N(x)$, следует, что $V^0(x) = V_0(x)$. Тем самым доказано утверждение 2) теоремы.

Доказательство пункта 3) теоремы также будем вести от противного. Предположим, что при некотором допустимом управлении из класса Ω получено значение $W_0(x)$ функционала (1.3) меньшее, чем $V_0(x)$. Теми же рассуждениями, что и при выводе оценки (2.2), можно доказать, что при любом N справедливо соотношение

$$
V_N(x) \leqslant W_0(x)
$$

Отсюда и из того факта, что $\lim_{N \to \infty} V_N(x) = V_0(x)$, убеждаемся в противном, то есть $W_0(x) \geqslant V_0(x)$. Следовательно, утверждение 3) теоремы доказано.

Перейдем к доказательству пункта 4) теоремы. Поскольку функции $V_0(x)$ и $\omega_0(x)$ удовлетворяют уравнению Беллмана (1.4), то для них справедливо неравенство (1.5) леммы 1.1. Отсюда и из леммы 1.1

$$
M\tau_x(\omega_0) \leqslant V_0(x)
$$

Но на основании п. 3 теоремы 2.1

$$
M\tau_x(\omega_0) \geqslant V_0(x)
$$

Следовательно, $M\tau_x(\omega_0) = V_0(x)$, то есть утверждение 4) теоремы 2.1 справедливо.

Обратимся к доказательству п. 5) теоремы. Пусть $V(x)$ — некоторое положительное решение уравнения Беллмана (1.4). Из доказательства лемм 2.1, 2.2 работы [10] следует оценка

$$
u_0' B' \frac{\partial V}{\partial x} \leqslant \inf_{u \in U} u' B' \frac{\partial V}{\partial x} + \mu \tag{2.10}
$$

где $0 < \mu < 1$, и управление $u_0(x) \in U$ удовлетворяет локальному условию Липшица в каждом ограниченном множестве изменения x, то есть при $|x_1| \leqslant N$, $|x_2| \leqslant N$

$$
|u_0(x_1) - u_0(x_2)| \leqslant c(N)|x_1 - x_2| \tag{2.11}
$$

Здесь N — произвольное положительное число, $c(N)$ — некоторая заданная постоянная, зависящая от N. Поэтому, ввиду ограниченности множества U при управлении $u_0(x)$ согласно [11] существует единственное решение системы (1.1). Кроме того, из (1.4) и (2.11) имеем

$$L_{u_0}V+1=\inf_{u\in U} L_u V+1+u_0'B'\frac{\partial V}{\partial x}-\inf_{u\in U} u'B'\frac{\partial V}{\partial x}\leqslant\mu$$

или

$$L_{u_0}V\leqslant -1+\mu \tag{2.12}$$

Поэтому на основании леммы (1.1) управление $u_0(x)$ есть допустимое управление. Отсюда и из (2.12) согласно лемме 1.1 вытекает

$$M\tau_x(u_0)\leqslant(1-\mu)^{-1}V(x)$$

Из последнего неравенства следует справедливость утверждении 5) теоремы 2.1. Теорема доказана.

Теорема 2.1 допускает следующие обобщения в виде следствий.

Следствие 1. При доказательстве теоремы 2.1 на функцию $f(x)$ из (1.1) можно наложить более слабые требования, потребовать, чтобы функция $f(x)$ росла не быстрее некоторой степени $|x|$ при $|x|\to\infty$ и удовлетворяла бы локальному условию Липшица типа (2.11). При этом все выводы теоремы 2.1 остаются в силе. Справедливость следствия 1 устанавливается повторением доказательства теоремы.

Следствие 2. Требование существования допустимого управления является очевидным из постановки задачи быстродействия, но при доказательстве теоремы 2.1 оно участвовало лишь при обосновании оценки (2.2). Поэтому, если это требование заменить требованием существования неотрицательного решения $W_0(x)$ задачи (1.4), а другие требования теоремы сохранить, то все утверждения теоремы 2.1 имеют силу.

Действительно, требование существования решения $W_0(x)\geqslant 0$ задачи (1.4) согласно [9] означает, что для любого N имеет место оценка $V_N(x)\leqslant W_0(x)$, что равносильно оценке (2.2).

Следует отметить, что во многих конкретных задачах быстродействия оптимальное управление иногда угадывается из вида системы (1.1). Но даже при найденном оптимальном управлении найти или угадать минимальное положительное решение $V_0(x)$ уравнения Беллмана (1.4) бывает трудно, а зачастую и невозможно. Однако, благодаря предельному переходу при $N\to\infty$ для последовательности функций $V_N(x)$, определяемых из краевой задачи (2.1), оказывается возможным найти функцию $V_0(x)$ в некоторых ограниченных областях изменения x. В случае же, если функция $V_0(x)$ найдена и не найдено оптимальное управление, последнее можно определить, используя п. 4) теоремы 2.1. Таким образом, теорема 2.1 дает не только условия существования, но и методику нахождения решения задачи быстродействия для систем вида (1.1). В целях иллюстрации сказанного рассмотрим пример.

Пример 2.1. Рассмотрим следующую скалярную систему:

$$\begin{gathered} dx(t)=u(x(t))\,dt+\sqrt{2}\,d\xi(t)-d\eta(t)\\ x(0)=x>0,\quad t\geqslant 0\end{gathered} \tag{2.13}$$

Здесь управление $u \in [-1, 1]$, $\xi(t)$ — скалярный стандартный винеровский процесс, $\eta(t)$ — скалярный однородный пуассоновский процесс с математическим ожиданием $M\eta(t) = 1$.

Ставится задача об определении минимального среднего времени достижения процессом $x(t)$ отрицательной полуоси $[-\infty, 0]$ множества x. Очевидно, что для системы (2.13) оптимальное управление будет $u = -1$. С учетом этого уравнение Беллмана для поставленной задачи имеет вид

$$\frac{d^2 V(x)}{\partial x^2} - \frac{dV(x)}{dx} + V(x-1) - V(x) + 1 = 0$$
$$V(x) = 0, \quad x \in [-\infty, 0] \tag{2.14}$$

Разобьем ось x на ряд единичных интервалов и будем искать минимальное положительное решение $V_0(x)$ уравнения (2.14) для нескольких начальных интервалов. Для интервала $[0, 1]$ уравнение (2.14) с учетом начального условия примет вид

$$\frac{d^2 V(x)}{dx^2} - \frac{dV(x)}{dx} - V(x) + 1 = 0$$
$$V(x) = 0, \quad x \in [-\infty, 0] \tag{2.15}$$

Обозначим $\frac{dV}{\partial x} = z(x)$, а производную по x будем обозначать точкой над знаком соответствующей функции. С учетом сказанного уравнение (2.15) преобразуется в следующую систему:

$$\begin{cases} \dot V(x) = z(x) \\ \dot z(x) - z(x) - V(x) = -1 \end{cases} \tag{2.16}$$

Фундаментальная система решений для соответствующей (2.16) однородной системы имеет вид

$$(V(x) = \exp A_1 x; \quad z(x) = A_1 \exp A_1 x)$$
$$(V(x) = \exp A_2 x; \quad z(x) = A_2 \exp A_2 x)$$

где A_1, A_2 — корни квадратного уравнения $A^2 - A - 1 = 0$

$$A_1 = (1 - \sqrt{5})/2; \qquad A_2 = (1 + \sqrt{5})/2 \tag{2.17}$$

По общему правилу решение системы (2.16) будем искать в виде

$$V(x) = c_1(x) \exp A_1 x + c_2(x) \exp A_2 x$$
$$z(x) = A_1 c_1(x) \exp A_1 x + A_2 c_2(x) \exp A_2 x \tag{2.18}$$

Подставив (2.18) в (2.16), получим для функций $c_1(x)$ и $c_2(x)$ следующую систему:

$$\begin{cases} \dot c_1(x) A_1 \exp A_1 x + \dot c_2(x) A_2 \exp A_2 x = -1 \\ \dot c_1(x) \exp A_1 x + \dot c_2(x) \exp A_2 x = 0 \end{cases}$$

Отсюда

$$\dot{c}_1(x) = (A_2 - A_1)^{-1} \exp(-A_1 x)$$

$$\dot{c}_2(x) = (A_1 - A_2)^{-1} \exp(-A_2 x)$$

Проинтегрировав эти выражения от 0 до x, с учетом (2.17) получим

$$c_1(x) = c_1(0) + (1 + A_1^2)^{-1} [\exp(-A_1 x) - 1]$$

$$c_2(x) = c_2(0) + (1 + A_2^2)^{-1} [\exp(-A_2 x) - 1]$$

Следовательно, общее решение уравнения (2.15) имеет вид

$$V(x) = c_1(x) \exp A_1 x + c_2(x) \exp A_2 x =$$

$$= (1 + A_1^2)^{-1} (1 - \exp A_1 x) + (1 + A_2^2)^{-1} (1 - \exp A_2 x) +$$

$$+ c_1(0) \exp A_1 x + c_2(0) \exp A_2 x$$

Далее, учитывая, что $V(0) = 0$, имеем

$$c_1(0) = - c_2(0)$$

Окончательно для $V(x)$, имея ввиду (2.17), получим

$$V(x) = 1 - (1 + A_1^2)^{-1} \exp A_1 x - (1 + A_2^2)^{-1} \exp A_2 x + \tag{2.19}$$

$$+ c_2(0) (\exp A_2 x - \exp A_1 x)$$

Формула (2.19) дает континуум решений для уравнения (2.15). Для того, чтобы найти минимальное положительное решение, нужно соответствующим образом подобрать постоянную $c_2(0)$. С этой целью разделим ось x на N охватывающих друг друга отрезков вида $[0, N]$, где N пробегает значения 1, 2, ..., n, ... Будем решать для каждого отрезка следующую краевую задачу — найти решение уравнения (2.15) для функции $V_N(x)$ с граничными условиями $V_N(0) = 0$ и $V_N(N) = 0$. Ясно, что согласно теореме 2.1 при $N \to \infty$, $V_N(x) \to V_0(x)$ для произвольной точки x интервала $[0, 1]$, следовательно, и $c_2(0)_N$ стремится к некоторому пределу. Обозначим

$$\lim_{N \to \infty} c_2(0)_N = c_0$$

С учетом сказанного и из (2.19) имеем

$$V_N(x) = 1 - (1 + A_1^2)^{-1} \exp A_1 x - (1 + A_2^2)^{-1} \exp A_2 x +$$

$$+ c_2(0)_N (\exp A_2 x - \exp A_1 x)$$

Отсюда и из того факта, что $V_N(N) = 0$, имеем

$$c_2(0)_N = \frac{1}{\exp A_1 N - \exp A_2 N} - \frac{(1 + A_1^2)^{-1} \exp A_1 N}{\exp A_1 N - \exp A_2 N} -$$

$$-\frac{(1+A_2^2)^{-1}\exp A_2N}{\exp A_1N-\exp A_2N}=\frac{(\exp A_1N)^{-1}}{1-\exp(A_2-A_1)N}-$$

$$-\frac{(1+A_1^2)^{-1}}{1-\exp(A_2-A_1)N}-\frac{(1+A_2^2)^{-1}}{\exp(A_1-A_2)N-1}$$

Из последнего выражения с учетом (2.17) видно, что

$$c_0=\lim_{N\to\infty}c_2(0)_N=(1+A_2^2)^{-1}$$

Подставив c_0 в (2.19) вместо $c_2(0)$, получим

$$V_0(x)=1-\exp A_1x=1-\exp\frac{1-\sqrt{s}}{2}x \tag{2.20}$$

Рассмотрим теперь интервал [1, 2] оси x. Согласно принципу динамического программирования с учетом (2.20) уравнение Беллмана (2.14) здесь будет иметь вид

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2}-\frac{dV(x)}{dx}-V(x)-\exp A_1(x-1)+2=0$$

$$V(1)=1-\exp A_1 \tag{2.21}$$

Ввиду громоздкости выкладок и поскольку ход решения уравнения (2.21) аналогичен ходу решения уравнения (2.15) приведем здесь окончательный вид функции $V_0(x)$. Имеем для $x\in[1, 2]$

$$V_0(x)=2-\exp A_1x-\exp A_1(x-1)-\frac{(x-1)\exp A_1(x-1)}{A_2-A_1}$$

Приведем также выражение $V_0(x)$ для $x\in[2, 3]$. На интервале [2, 3] множества x имеем

$$V_0(x)=3-\exp A_1x-\left(1+\frac{x-1}{A_2-A_1}\right)\exp A_1(x-1)-$$

$$-\left[1+\frac{6(x-2)}{(A_2-A_1)^3}+\frac{(x-2)^2}{2(A_2-A_1)^2}\right]\exp A_1(x-2)$$

Как видно из приведенных выражений для $V_0(x)$, угадать вид $V_0(x)$ для произвольного единичного интервала оси x довольно трудно, поэтому здесь приобретает интерес оценка функции $V_0(x)$ сверху. Для этой цели воспользуемся леммой 1.1. В качестве функции Ляпунова $D(x)$ возьмем $D(x)=x^2$. Тогда, согласно (2.14)

$$L_{-1}D(x)=2-2x+x^2-2x+1-x^2=3-4x \tag{2.22}$$

Отсюда для всех $x\geqslant\frac{3}{4}$ выполняется $L_{-1}D(x)\leqslant 0$. Поэтому из (2.22) согласно лемме 1.1 для всех $x>\frac{3}{4}$

$$V_0(x) = M\tau_x(-1) \leqslant \frac{x^2}{4x-3} \tag{2.23}$$

При достаточно больших x согласно (2.23) можно приближенно оценить $V_0(x)$ как

$$V_0(x) \leqslant \frac{x}{4}$$

Следует отметить, что при $x = 1$ формула (2.23) дает довольно грубую оценку $V_0(1) \leqslant 1$, что видно из (2.20), но с увеличением x формула (2.23) дает более точную оценку сверху для функции $V_0(x)$.

Замечание. Если в (1.1) положить $a(x(t)) \equiv 0$, то результаты данной работы совпадают с результатами [6].

Автор выражает благодарность В. Б. Колмановскому за внимание к работе и ценные обсуждения.

Институт проблем
механики АН СССР

Поступила 24 III 1980

Գ. Գ. ԵՂՅԱՆ

ՍՏՈԽԱՍՏԻԿ ՍԻՍՏԵՄՆԵՐԻ ՄԻ ԴԱՍԻ ՀԱՄԱՐ ՕՊՏԻՄԱԼ ԱՐԱԳԱԳՈՐԾՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է վիներյան և Պուասոնի պրոցեսների տեսքի պատահական լրացուցիչ գրգռումներով կառավարող համակարգ։

Խնդիր է դրվում նշված համակարգը արագորեն բերել որոշ տրված վիճակին։ Ցույց են տրվում դիտարկվող համակարգը պահանջված վիճակին բերելու համար մինիմալ միջին ժամանակը գտնելու եղանակներ։ Դիտարկվում են երկու օրինակներ։

ON TIME-OPTIMAL CONTROL FOR A CLASS OF STOCHASTIC SYSTEMS

G. G. EGIYAN

Summary

The control system is considered with random additive perturbations in the form of Winner's and Poisson's processes. The problem of the fastest possible reduction of the system to a given state is formulated. The methods for finding the minimal average time of the reduction are given. Two examples are considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черноусько Ф. Л., Колмановский В. Б.* Оптимальное управление при случайных возмущениях. М., «Наука», 1978.
2. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. М., «Наука», 1965.
3. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М., «Наука», 1969.
4. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М., «Наука», 1966.
5. *Майзенберг Т. Л.* Об одном итерационном процессе синтеза оптимального управления в стохастических системах. Численные методы нелинейного программирования. Тр. II Всесоюзного семинара. Харьков, 1976.
6. *Колмановский В. Б.* О некоторых вопросах оптимального быстродействия в стохастических системах. Проблемы управления и теории информации, 1975, т. 4, № 4.
7. *Дынкин Е. Б.* Марковские процессы. М., Физматгиз, 1963.
8. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. М., «Наука», 1965.
9. *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа. М., ИЛ, 1957.
10. *Fleming W. H.* Duality and a priori estimatesin Markovian optimization problems. J. of Math. Anal. and Applic., 1967, vol. 16, No. 2.
11. *Ито К., Нисио М.* Стационарные решения стохастических дифференциальных уравнений. Математика (сб. переводов), 1967, т. 5.
12. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., «Наука», 1973.