ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

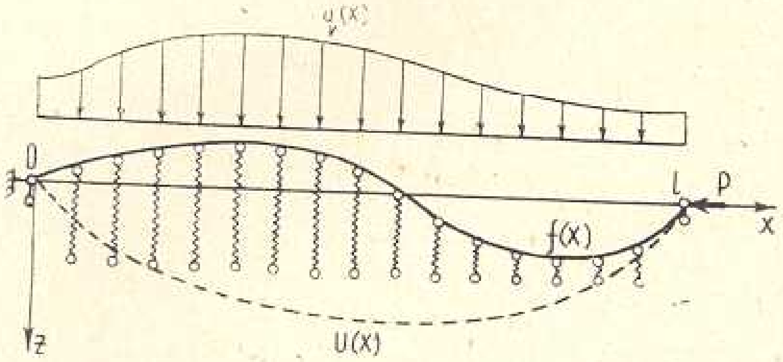
Մեխանիկա XXXIII, № 5, 1980 Механика

Н. В. БАНИЧУК, А. Д. ЛАРИЧЕВ

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО ИЗОГНУТЫХ СТЕРЖНЕЙ

Рассматриваются задачи оптимизации жесткости предварительно искривленного стержня, лежащего на упругом винклеровском основании. Стержень нагружен продольными и поперечными изгибающими силами. Минимизация критерия качества осуществляется за счет наилучшего выбора распределения начальных кривизн по стержню. Дан вывод сопряженного уравнения и необходимых условий экстремума. Приводится пример и результат расчета оптимального решения для заданных значений параметров, характеризующих величины нагрузок, податливость основания.

§ 1. Приведем постановку задачи и основные уравнения. Рассмотрим изгиб предварительно искривленного стержня, лежащего на упругом винклеровском основании, коэффициент податливости которого равен C. Стержень шарнирно закреплен в точках $x = 0$ и $x = l$, подвержен сжатию силой P и действию поперечной нагрузки $q(x)$ (фиг. 1).



Фиг. 1.

Форма криволинейного стержня в недеформированном состоянии (при отсутствии основания и действия нагрузок) описывается функцией $f(x)$. Начальная кривизна стержня предполагается малой. Смещения, получаемые точками оси стержня в направлении оси z, при действии нагрузок и реакции основания обозначим через $u(x)$. Величины смещений $u(x)$ отсчитываются от недеформируемой оси криволинейного стержня, то есть полное отклонение стержня от оси x определяется величиной $f(x)+u(x)$, а реакция винклеровского основания равна $C[f(x)+u(x)]$. Уравнение равновесия и граничные условия имеют вид [1]

$$(Du_{xx})_{xx}+Pu_{xx}+Cu+Pf_{xx}+Cf=q(x) \tag{1.1}$$

$$u(0)=u(l)=0, \quad Du_{xx}\big|_{x=0}=Du_{xx}\big|_{x=l}=0 \tag{1.2}$$

где $D=EJ$, E — модуль Юнга, а J — момент инерции сечения стержня. Считается, что модуль Юнга и момент инерции не меняется вдоль стержня, тем самым обеспечивая постоянство величины D.

Будем считать полную длину стержня заданной и равной L. Это приводит к изопериметрическому условию

$$\int_0^l \sqrt{1+f_x^2}\,dx=L$$

Учитывая то, что стержень является слабо искривленным, данное соотношение можно записать в виде

$$\int_0^l f_x^2 dx=\beta, \text{ где } \beta=2(L-l) \tag{1.3}$$

Кроме того, из условия шарнирного закрепления стержня в точках (0, 0) и (0, l) вытекает, что функция $f(x)$ предварительного распределения кривизны должна также удовлетворять следующим граничным условиям:

$$f(0)=f(l)=0 \tag{1.4}$$

Функция $f(x)$, удовлетворяющая условию непрерывности, изопериметрическому равенству (1.3) и граничным условиям (1.4), рассматривается ниже в качестве искомой управляющей переменной. Исследуемая задача оптимизации формулируется следующим образом. Требуется найти непрерывную функцию $f(x)$, удовлетворяющую условиям (1.3), (1.4) и такую, что перемещения $u(x)$, определяемые из краевой задачи (1.1), (1.2), доставляют минимум функционалу качества

$$\bar{J}=\int_0^l q(x)\,u(x)\,dx\to\min \tag{1.5}$$

Сформулированная задача относится к классу несамосопряженных задач оптимизации. Уравнение (1.1) играет роль дифференциальной связи, для учета которой используется метод множителей Лагранжа и с его помощью выведем уравнение для сопряженной переменной.

Заметим, что ранее [2] в теории изгиба стержней исследовались задачи оптимизации механических характеристик за счет наилучшего распределения «толщин» по стержню или распределения жесткости $D(x)$.

В отличие от указанных работ, в данном исследовании рассмотрен новый тип управления — управление предварительной кривизной.

§ 2. Получим уравнение для сопряженной переменной и условие оптимальности. Составим расширенный функционал Лагранжа

$$\Pi = \bar{J} + \int_0^l v(x)\left[(Du_{xx})_{xx} + Pu_{xx} + Cu + Pf_{xx} + Cf - q(x)\right]dx +$$

$$+ \lambda \int_0^l f_{x}^2 dx$$

Через $v(x)$ в этом выражении обозначена сопряженная переменная, а константа λ определяется из изопериметрического условия (1.3). Выписывая выражение для первой вариации функционала Π и выполняя стандартные преобразования (интегрирование по частям), преобразуем выражение для $\delta\Pi$ к виду

$$\delta\Pi = \int_0^l \{[(Dv_{xx})_{xx} + Pv_{xx} + Cv + q(x)]\delta u +$$

$$+ [Pv_{xx} + Cv - 2\lambda f_{xx}]\delta f\}\, dx + v\delta[(Du_{xx})_x]\Big|_0^l + Dv_{xx}\delta(u_x)\Big|_0^l$$

Из условия $\delta\Pi = 0$ приходим к краевой задаче для сопряженной переменной

$$(Dv_{xx})_{xx} + Pv_{xx} + Cv = -q(x) \qquad (2.1)$$

$$v(0) = v(l) = 0, \quad Dv_{xx}\big|_{x=0} = Dv_{xx}\big|_{x=l} = 0 \qquad (2.2)$$

и к необходимому условию оптимальности

$$Pv_{xx} + Cv - 2\lambda f_{xx} = 0 \qquad (2.3)$$

Отметим, что сопряженная переменная $v(x)$, определяемая как решение краевой задачи (2.1) при граничных условиях (2.2), описывает распределение прогибов прямолинейного стержня, лежащего на упругом основании, подверженного действию продольной силы P и поперечной нагрузки $q(x)$. Эта интерпретация позволяет при отыскании функции $v(x)$ использовать имеющиеся результаты расчета для стержня на упругом основании.

Уравнения (2.1) и (2.3) совместно с уравнениями (1.1)—(1.4) составляют замкнутую систему соотношений, служащую для определения неизвестных величин u, v, f, λ. Заметим, что краевая задача (2.1), (2.2) (служащая для определения сопряженной переменной) не зависит от управляющей функции $f(x)$ и описывает продольно-поперечный изгиб балки на упругом основании, шарнирно закрепленной в точках $x=0$, $x=l$.

§ 3. Рассмотрим случай, когда стержень нагружен постоянной поперечной нагрузкой $q(x) = q_0$, а продольные силы являются сжимающими $P > 0$, причем будем предполагать, что основные параметры задачи удовлетворяют следующим неравенствам:

$$P < \frac{n^2\pi^2 D}{l^2} + \frac{Cl^2}{n^2\pi^2} \text{ при } \frac{Cl^4}{\pi^4 D} < n^2(n+1)^2$$

$$P < \frac{(n+1)^2\pi^2 D}{l^2} + \frac{Cl^2}{(n+1)^2\pi^2} \text{ при } \frac{Cl^4}{\pi^4 D} > n^2(n+1)^2 \tag{3.1}$$

$$n = \operatorname{entier}\left(\frac{l}{\pi}\sqrt{\frac{C}{D}}\right)$$

При выполнении условий (3.1) стержень находится в докритическом состоянии и не теряет устойчивости.

Получим выражение для сопряженной переменной $v(x)$. С этой целью проинтегрируем уравнение (2.1) и выберем четыре постоянных интегрирования, используя для этого четыре граничных условия (2.2). Будем иметь в первом случае, когда $P^2/4D > C$

$$v = C_1 \sin A_1 x + C_2 \cos A_1 x + C_3 \sin A_2 x + C_4 \cos A_2 x - q_0/C$$

$$A_1 = \sqrt{\frac{P}{2D} - \sqrt{\frac{P^2}{4D^2} - \frac{C}{D}}}, \quad A_2 = \sqrt{\frac{P}{2D} + \sqrt{\frac{P^2}{4D^2} - \frac{C}{D}}}$$

$$C_1 = \frac{A_2^2}{A_2^2 - A_1^2}\frac{q_0}{C}\frac{(1-\cos A_1 l)}{\sin A_1 l}, \quad C_2 = \frac{A_2^2}{A_2^2 - A_1^2}\frac{q_0}{C}$$

$$C_3 = \frac{A_1^2}{A_1^2 - A_2^2}\frac{q_0}{C}\frac{(1-\cos A_2 l)}{\sin A_2 l}, \quad C_4 = \frac{A_1^2}{A_1^2 - A_2^2}\frac{q_0}{C}$$

во втором случае, когда $P^2/4D = C$

$$v = C_1 \sin \mu x + C_2 \cos \mu x + C_3 x \cos \mu x + C_4 x \sin \mu x - q_0/C$$

$$\mu = \sqrt{\frac{P}{2D}}$$

$$C_1 = \frac{q_0}{C \sin^2 \mu l}(1 - \cos \mu l)\left(\sin \mu l - \frac{\mu l}{2}\right), \quad C_2 = \frac{q_0}{C}$$

$$C_3 = \frac{q_0 \mu}{2C \sin \mu l}(\cos \mu l - 1), \quad C_4 = \frac{q_0 \mu}{2C} \tag{3.2}$$

в третьем случае, когда $P^2/4D < C$

$$v = C_1 \operatorname{sh} A_1 x \sin A_2 x + C_2 \operatorname{sh} A_1 x \cos A_2 x + C_3 \operatorname{ch} A_1 x \sin A_2 x + C_4 \operatorname{ch} A_1 x \cos A_2 x - q_0/C$$

$$A_1 = \sqrt{\sqrt{\frac{C}{4D_2}} - \frac{P}{4D}}, \quad A_2 = \sqrt{\sqrt{\frac{C}{4D}} + \frac{P}{4D}}$$

$$C_1 = \frac{A_2^2 - A_1^2}{2A_1A_2}\frac{q_0}{C}, \quad C_2 = \frac{q_0(A_1^2 - A_2^2)}{2CA_1A_2}\frac{\sin A_2 l}{(\operatorname{ch} A_1 l + \cos A_2 l)}$$

$$C_3 = \frac{q_0}{C(\operatorname{ch} A_1 l + \cos A_2 l)}\left(\sin A_2 l + \frac{A_1^2 - A_2^2}{2A_1A_2}\operatorname{sh} A_1 l\right), \quad C_4 = \frac{q_0}{C}$$

Используя найденное представление для сопряженной переменной $v(x)$ и условие оптимальности (2.3), получим искомое распределение начальных прогибов $f(x)$. Для этого последовательно подставляем выражение (3.2) в (2.3) и дважды интегрируем получающиеся уравнения для $f(x)$. Определив далее константы интегрирования из условий (1.4), запишем выражения для $f(x)$ в указанных случаях

$$f(x) = \frac{1}{2\lambda}\left\{-\frac{q_0x^2}{2} + \frac{Dq_0A_1^2A_2^2}{(A_2^2 - A_1^2)}\left[\frac{(1-\cos A_1 l)}{\sin A_1 l}\sin A_1 x + \cos A_1 x - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{(1-\cos A_2 l)}{\sin A_2 l}\sin A_2 x - \cos A_2 x\right] + \frac{q_0 l}{2}x\right\} \quad \text{при} \quad \frac{P^2}{4D} > C \qquad (3.3)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\lambda}\left\{-\frac{q_0x^2}{2} - \frac{Dq_0\mu^3}{2C}\left[\frac{l(1-\cos\mu l)}{\sin^2\mu l}\sin\mu x + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{(1-\cos\mu l)}{\sin\mu l}x\cos\mu x - x\sin\mu x\right] + \frac{q_0 l}{2}x\right\} \quad \text{при} \quad \frac{P^2}{4D} = C \qquad (3.4)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\lambda}\left\{-\frac{q_0x^2}{2} - \frac{Dq_0(A_1^2 + A_2^2)^2}{2CA_1A_2}\left[-\operatorname{sh} A_1 x\sin A_2 x + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{(\sin A_2 l\operatorname{sh} A_1 x\cos A_2 x + \operatorname{sh} A_1 l\operatorname{ch} A_1 x\sin A_2 x)}{(\operatorname{ch} A_1 l + \cos A_2 l)}\right] + \frac{q_0 l}{2}x\right\} \qquad (3.5)$$

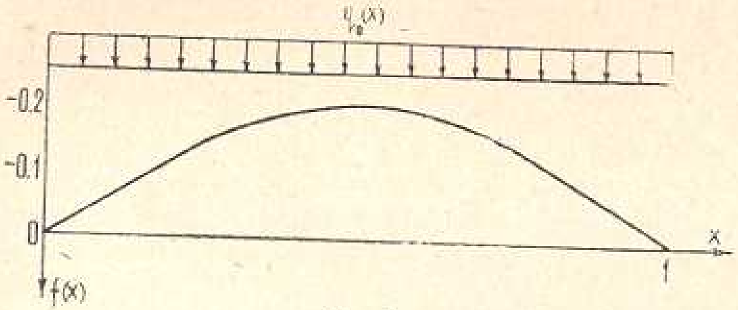
при $P^2/4D < C$.

Константа λ, фигурирующая в (3.3)—(3.5), подсчитывается по формуле

$$\lambda = \left[\frac{1}{8(L-l)}\int_0^l f_x^2 dx\right]^{1/2} \qquad (3.6)$$

Для отыскания соответствующих распределений прогибов $u(x)$ требуется подставить найденные выражения для $f(x)$ в уравнение равновесия (1.1), выполнить интегрирование этого уравнения и удовлетворить краевым условиям (1.2). Проведя выкладки, приходим к громоздким выражениям для прогибов $u(x)$, которые ввиду краткости изложения опустим.

Рассмотрим конкретный пример. Для удобства проведения расчетов воспользуемся безразмерными переменными $P' = \frac{Pl^2}{D}$; $q_0' = \frac{q_0 l^4}{D}$; $C' = \frac{Cl^4}{D}$; $x' = \frac{x}{l}$; $L = \frac{L}{l}$ и придадим безразмерным параметрам задачи следующие значения $P' = 0$; $C' = 16$; $q_0' = 20$; $L' = 1.1$. Для указанного набора параметров $P^2/4D = C$ и, следовательно, справедлива формула (3.4). Оптимальное распределение начальной кривизны $f(x)$ представлено на фиг. 2. Как видно, отклонение оси стержня от прямолинейного положения является симметричным относительно точки $x = 1/2$ и направлено против действия поперечной нагрузки.



Фиг. 2.

Оценим эффективность оптимизации. Для этого сопоставим значения функционалов $\overline{I}$ при рассмотренном наборе параметров для оптимально искривленного стержня и стержня, осевая линия которого является параболой $f(x) = \sqrt{24(L-l)/l^3}\, x(x-l)/2$. Выигрыш, получаемый за счет оптимизации, по сравнению со стержнем, первоначально изогнутым по параболе, составляет 7%.

§ 4. Приведем другую постановку задачи оптимизации предварительно изогнутого стержня на упругом основании. В отличие от задачи, разобранной в §1—3, будем предполагать, что реакция основания на криволинейный стержень до приложения нагрузок равна нулю, то есть будем считать, что форма поверхности упругого основания совпадает с формой осевой линии ненагруженного стержня. Обозначим, как и прежде, величины смещений в направлении оси z точек осевой линии стержня под действием нагрузок через $u(x)$. Тогда реакция упругого основания будет равна $Cu(x)$, а момент продольных сил P запишется в виде $P[u(x) + f(x)]$.

В рассматриваемом случае задача оптимизации заключается в отыскании функции $f(x)$, удовлетворяющей изопериметрическому условию (1.3), граничным условиям для $f(x)$ (1.4) и такой, что функция $u(x)$, определяемая как решение краевой задачи для уравнения равновесия

$$(Du_{xx})_{xx} + Pu_{xx} + Cu + Pf_{xx} = q \tag{4.1}$$

при граничных условиях (1.2), доставляет минимум функционалу (1.5).

Для получения условия оптимальности используем методику, примененную ранее в § 2. При этом сопряженная переменная снова определяется как решение краевой задачи (2.1), (2.2). Условие же оптимальности примет вид

$$Pv_{xx} - 2\nu f_{xx} = 0 \tag{4.2}$$

Интегрируя дважды уравнение (4.2) и выбирая константы интегрирования из граничных условий (1.4), будем иметь

$$f(x) = Pv(x)/2\lambda \tag{4.3}$$

Таким образом, функция $f(x)$, описывающая форму осевой линии предварительно искривленного стержня, отличается от сопряженной переменной только постоянным множителем $P/2\lambda$. Отыскание же сопряженной переменной $v(x)$ сводится к задаче (2.1), (2.2) расчета балок (прямолинейных стержней) на упругом основании при указанных продольных и поперечных силах. Для типичных статических нагрузок, встречающихся в приложениях, эта задача решена и функция $v(x)$ может считаться известной.

Приходим к выводу, что отыскание формы предварительно искривленного стержня сводится к вычислению фигурирующего в (4.3) множителя Лагранжа λ. Окончательное решение задачи оптимизации примет вид

$$f(x) = \sqrt{2(L-l)}\left(\int_0^l v_x^2\, dx\right)^{-1/2} v \tag{4.4}$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение: оптимальное предварительное искривление стержня определяется с точностью до множителя функции распределения прогибов прямолинейного стержня, лежащего на упругом основании при тех же условиях нагружения. Нахождение же множителя сводится к вычислению определенного интеграла.

Это утверждение остается справедливым и для других видов граничных условий.

Институт проблем механики
АН СССР
ЦНИИСК им. Кучеренко

Поступила 12 II 1980

Ն. Վ. ԲԱՆԻՉՈՒԿ, Ա. Գ. ԼԱՐԻՉԵՎ

ՆԱԽԱՊԵՍ ԿՈՐԱՑՎԱԾ ՁՈՂԵՐԻ ՕՊՏԻՄԻԶԱՑԻԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում են առաձգական վինկլերյան հիմքի վրա դրված նախապես կորացված ձողի կոշտության օպտիմիզացիայի խնդիրները։

Ձողը բեռնավորված է երկայնական և լայնական ծռող ուժերով։

Որակի կրիտերիայի մինիմիզացիան իրագործվում է ըստ ձողի սկզբնական կորությունների բաշխման ամենալայն ընտրության հաշվով։ Արտածվում են համալուծ համակարգը և էքստրեմումի համար անհրաժեշտ պայմանները։ Բերվում է օրինակ և օպտիմալ լուծման հաշվարկի արդյունքը պարամետրերի տրված արժեքների համար, որոնցով բնորոշվում են բեռի մեծությունը, հիմքի ենթարկվողությունը և ձողի սկզբնական երկարությունը։

S u m m a r y

The problems of optimization of prebending beams on elastic foundation are considered. The minimization criterion of the quality is realized by means of the initial curvity over the beam.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Болотин В. В.* Применение методов теории вероятности и теории надежности в расчетах сооружений. М., Стройиздат, 1971, 255 с.

2. *Niordson F. I., Pedersen P.* A review of optimal structural design. Proc. 13-th Int. Congress IUTAM, Moscow. Springer—Verlag, Berlin, 1973.