ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIII, №5, 1980 Механика

В. И. МАЛЫЙ, С. В. БАЗИЛЕВСКИЙ

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ЧАСТОТ И ФОРМ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЗАМКНУТОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Основу решения сложных динамических задач для упругих тел составляет определение форм и частот их собственных колебаний. Для замкнутых сферических оболочек известны точные аналитические, а также приближенные решения задачи о свободных колебаниях [1÷8].

Данная работа посвящена анализу и упрощению аналитических решений задачи о свободных колебаниях замкнутой сферической оболочки. Получены асимптотические приближения для частот и форм колебаний. Такой подход позволил представить результаты в виде простых формул, которые удобны для инженерных расчетов и описывают в сравнительно наглядной форме влияние на частоты и формы колебаний каждого из трех безразмерных параметров задачи-номера формы n, коэффициента Пуассона ν и относительной толщины h/R (здесь h — толщина оболочки, а R — ее радиус).

Свободные колебания сферической оболочки будем описывать уравнениями движения [2] в форме В. В. Новожилова [9]

$$\Delta U+2U-\rho R^2\frac{1-\nu^2}{E}\frac{\partial^2}{\partial t^2}[U-(2+\nu)w]=0$$

$$\Delta\Delta w+2\Delta w+(1-\nu^2)\frac{1+\chi}{\chi}w+(1+\nu)\frac{1+\chi}{\chi}U+$$

$$+\rho R^2\frac{1-\nu^2}{E}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\left(\frac{1}{\chi}+2+\nu\right)w-U\right]=0$$

$$\Delta V+2V-2\rho R^2\frac{1+\nu}{E}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=0$$

$$U=\frac{\partial u}{\partial\theta}+\operatorname{ctg}\theta\cdot u+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+(1+\nu)w \qquad (1.1)$$

$$V=\frac{\partial v}{\partial\theta}+\operatorname{ctg}\theta\cdot v-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}$$

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2},\qquad \chi=\frac{h^2}{12R^2}$$

где u, v, w — компоненты смещения вдоль меридиана, параллели и нормали, соответственно, θ и φ — углы широты и долготы на сфере, t — время; ρ, E и ν — плотность материала оболочки, его модуль упругости и коэффициент Пуассона.

В случае замкнутой оболочки граничные условия для решений системы (1.1) сводятся к условиям периодичности по окружной координате φ и к требованию регулярности решений в полюсах оболочки.

Известно [10], что существуют два типа колебаний сферической оболочки. Колебания первого типа сопровождаются вращением вокруг нормали без изменения поверхностной плотности материала оболочки ($U = w = 0$, $V \neq 0$). Второй тип колебаний — дивергентный, при этом отсутствует вращение элементов оболочки вокруг нормали ($V = 0$, $U \neq 0$, $w \neq 0$). В случае колебаний первого типа разделение переменных в уравнениях движения происходит, если принять

$$v(\theta, \varphi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} V_n^m v_n^m(\theta, \varphi) e^{ip_n t}$$

$$u(\theta, \varphi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} V_n^m u_n^m(\theta, \varphi) e^{ip_n t}, \quad w(\theta, \varphi, t) = 0 \tag{1.2}$$

$$v_n^m(\theta, \varphi) = e^{im\varphi} \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos\theta), \quad u_n^m(\theta, \varphi) = -\frac{im}{\sin\theta} P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi}$$

где $P_n^m(\cos\theta)$ — присоединенные полиномы Лежандра, p_n — частота собственных колебаний, а V_n^m — произвольные коэффициенты. При этом первое и второе из уравнений (1.1) удовлетворяются тождественно, ибо $U = 0$ и $w = 0$. А так как

$$\triangle P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi} = -\lambda P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi}, \quad \lambda = n(n+1)$$

то и третье уравнение удовлетворяется, если собственную частоту определять из соотношения

$$p_n^2 = \frac{E}{2(1+\nu)\rho R^2}(\lambda - 2) \tag{1.3}$$

Таким образом, собственная частота p_n вырождена $(2n+1)$ — кратно и ей соответствуют собственные формы $(u_n^m, v_n^m, 0)$ при $-n \leq m \leq n$.

Аналогично в случае колебаний дивергентного типа ($V = 0$) разделение переменных произойдет, если собственные формы искать в виде

$$w_n^m(\theta, \varphi) = P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi}$$

$$u_n^m(\theta, \varphi) = \mu_n \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi}, \qquad v_n^m(\theta, \varphi) = \mu_n \frac{im}{\sin\theta} P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi} \tag{1.4}$$

Тогда первые два из уравнений движения (1.1) удовлетворяются при условиях

$$
\begin{cases} k_n^2 + (1+\nu)(\lambda-2) + \lambda(k_n^2 - \lambda + 2)\mu_n = 0 \\ \chi\lambda(\lambda-2) + (1+\chi)(2+2\nu-k_n^2) - \lambda[(1+\nu)(1+\chi)+\chi k_n^2]\mu_n = 0 \end{cases} \tag{1.5}
$$

$$
k_n^2 = \rho R^2 \frac{1-\nu^2}{E} p_n^2
$$

а третье удовлетворяется тождественно.

Система (1.5) для коэффициента формы μ_n имеет решение

$$
\mu_n = \frac{k_n^2 + (1+\nu)(\lambda-2)}{\lambda(\lambda-2-k_n^2)} = \frac{\chi\lambda(\lambda-2) + (1+\chi)[2(1+\nu)-k_n^2]}{\lambda[(1+\nu)(1+\chi)+\chi k_n^2]} \tag{1.6}
$$

если безразмерная собственная частота k_n определяется как корень уравнения

$$
k_n^4 - Ak_n^2 + B = 0 \tag{1.7}
$$

где

$$
A = \chi\lambda^2 + (1+\nu\chi)\lambda - \chi(1-\nu) + 1 + 3\nu
$$

$$
B = \chi\lambda^3 - 4\chi\lambda^2 + [(5-\nu^2)\chi + 1 - \nu^2]\lambda - 2(1-\nu^2)(1+\chi)
$$

Уравнение (1.7) для каждого значения n дает 2 значения квадрата частотного параметра $(k_n')^2$ и $(k_n'')^2$, которым, согласно (1.6) и (1.4), соответствуют два значения коэффициента формы μ_n' и μ_n'' и два вида форм собственных колебаний. Однако аналитический вид зависимости величин k_n', k_n'', μ_n' и μ_n'' от параметров n, ν и χ является довольно сложным.

Численные эксперименты показали, что один из частотных параметров k_n' с большой точностью совпадает с большей из частот, определяемых по безмоментной теории при $\chi = 0$

$$
(k_n')^2 \approx \frac{1+3\nu+\lambda}{2} + \sqrt{\left(\frac{1+3\nu+\lambda}{2}\right)^2 - (1-\nu^2)(\lambda-2)} \tag{1.8}
$$

При этом исследование ограничивалось областью $n < \chi^{-1/2} = \sqrt{12}R/h$, так как при бо́льших значениях n длины полуволн собственных форм колебаний будут меньше толщины оболочки, что делает неправомерным использование исходных уравнений (1.1).

Разложив корень в (1.8) по степеням величины λ^{-1}, получаем

$$
(k_n')^2 \approx \lambda + 3\nu + \nu^2 + \frac{35+24\nu+4\nu^2}{16\lambda} \tag{1.9}
$$

Так как для тонких оболочек параметр $\chi < 10^{-3}$ (что соответствует условию $h < 0.1\,R$), то, естественно, для коэффициента A в уравнении (1.7) использовать приближение

$$
A \approx \chi\lambda^2 + \lambda + 1 + 3\nu \tag{1.10}
$$

Тогда по теореме Виетта из (1.9) и (1.10) получаем частоту другого вида дивергентных колебаний оболочки

$$(k_n'')^2 = A - (k_n')^2 \approx \varkappa\lambda^2 + 1 - \nu^2 - \frac{35 + 24\nu + 4\nu^2}{16\lambda} \qquad (1.11)$$

Проверка показала, что уже при $n \geqslant 2$ соотношения (1.9) и (1.11) позволяют вычислить k_n' и k_n'' с погрешностью менее 1% и 3% при толщинах оболочек $h < R/60$ и $h < R/20$ соответственно. Для более грубых расчетов, так как коэффициент Пуассона реально изменяется в пределах $0 \leqslant \nu \leqslant 0.5$, можно рекомендовать еще более простые соотношения

$$\begin{aligned} (k_n')^2 &\approx \lambda + 3\nu + \nu^2 + \frac{2.6}{\lambda} \\ (k_n'')^2 &\approx \varkappa\lambda^2 + 1 - \nu^2 - \frac{2.6}{\lambda} \end{aligned} \qquad n \geqslant 2 \qquad (1.12)$$

Но для металлов с коэффициентами Пуассона $0.25 < \nu < 0.3$ потери точности при использовании соотношений (1.12) практически не происходит.

При $n = 0$ и $n = 1$ необходимо использовать значения

$$(k_0')^2 = 2(1 + \nu), \quad (k_1')^2 = 3(1 + \nu), \quad (k_1'')^2 = 0 \qquad (1.13)$$

получаемые по безмоментной теории.

Рассматривая разность $(k_n')^2 - (k_n'')^2$, нетрудно убедиться, что при $n \lesssim \sqrt{12}\,R/h$ колебания второго вида являются более низкочастотными, чем первые.

Приближенные соотношения для коэффициента формы μ_n получим, используя в (1.6) для частоты выражения (1.9), (1.11) или (1.12). Например, полученные из (1.12) после некоторых преобразований соотношения

$$\begin{aligned} \mu_n' &\approx \frac{\varkappa\lambda^2 - \lambda + 2 - \nu - \nu^2 - \frac{2.6}{\lambda}}{\lambda(1 + \nu + \varkappa\lambda)} \\ \mu_n'' &\approx -\frac{1 + \nu + \varkappa\lambda}{\varkappa\lambda^2 - \lambda + 2 - \nu - \nu^2 - \frac{2.6}{\lambda}} = -\frac{1}{\lambda\mu_n'} \end{aligned} \qquad n \geqslant 2 \qquad (1.14)$$

позволяют вычислять μ_n' и μ_n'' с точностью до 3% и 5% при $h < R/60$ и $h < R/20$ соответственно. Но если допустить погрешность до 10% при $R/h \geqslant 20$ и $n \leqslant 4\sqrt{R/h}$, то можно пренебречь зависимостью μ_n от $\varkappa$ и даже от ν

$$\begin{aligned} \mu_n' &\approx -\frac{\lambda^2 - (2 - \nu - \nu^2)\lambda + 2.6}{\lambda^2(1 + \nu)} \approx -\frac{\lambda - 1.3}{\lambda(1 + \nu)} \\ \mu_n'' &\approx \frac{\lambda(1 + \nu)}{\lambda^2 - (2 - \nu - \nu^2)\lambda + 2.6} \approx \frac{1 + \nu}{\lambda - 1.3} \end{aligned} \qquad n \geqslant 2 \qquad (1.15)$$

При $n = 1$, согласно (1.6) и (1.13), имеем

$$\mu_1' = -1/2, \quad \mu_1'' = 1 \tag{1.16}$$

В частности, теперь, используя (1.15), нетрудно убедиться, что при $n \geqslant 2$

$$\left|\frac{\mu_n''}{\mu_n'}\right| \approx (1+\nu)^{-2}\left(\lambda - 2.6 + \frac{1.69}{\lambda}\right) > \frac{3.4}{(1+\nu)^2} > 1$$

то есть доля меридиональных смещений больше в колебаниях более высокочастотного вида.

Своеобразные трудности возникают при практических вычислениях с собственными формами колебаний (1.2), (1.4) из-за необходимости определять значения полиномов Лежандра $P_n^m(\cos\theta)$ при больших значениях номера n. В этих случаях оказываются полезными известные [12] асимптотические разложения присоединенных полиномов Лежандра по функциям Бесселя вблизи полюсов $\theta \to 0$ и $\theta \to \pi$ и по тригонометрическим функциям вдали от полюсов. Однако ни та, ни другая асимптотика не является равномерно пригодной на полном интервале $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, из-за чего ситуация остается неопределенной при промежуточных значениях θ.

Можно заметить, что при $n \to \infty$ существует область на сфере, где оба эти разложения пригодны. Используя прием сращивания асимптотических разложений [11], получаем первое приближение равномерно пригодного на всей сфере асимптотического разложения для полиномов Лежандра

$$P_n^m(\cos\theta) \approx \lambda^{m/2}\left[(-1)^m J_m(\sqrt{\lambda}\,\theta) + (-1)^n J_m(\sqrt{\lambda}(\pi-\theta)) + \right.$$
$$\left. + \lambda^{-1/4}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{\sin\theta}} - \frac{1}{\sqrt{\theta}} - \frac{1}{\sqrt{\pi-\theta}}\right)\cos\left(\sqrt{\lambda}\,\theta - \frac{\pi}{4} + m\frac{\pi}{2}\right)\right] \tag{1.17}$$

которым удобно пользоваться уже при $n \geqslant 4$. Здесь $J_m(\theta)$ — функция Бесселя порядка m.

Таким образом, получены простые формулы (1.9), (1.11—1.17), которые позволяют с достаточной для инженерных расчетов точностью определять формы и частоты собственных колебаний замкнутой сферической оболочки.

Проиллюстрируем возможности использования полученных соотношений на примере анализа поля деформации сферической оболочки при дивергентных собственных колебаниях низкочастотного вида. Ограничимся при этом осессиметричным случаем $m = 0$, когда смещения имеют вид

$$w = w_n P_n(\cos\theta), \quad u = \mu_n' w_n \frac{d}{d\theta} P_n(\cos\theta), \quad v = 0,$$

а деформации равны

$$\varepsilon_\theta\left(\pm\frac{h}{2}\right)=\frac{1}{R}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}+w\right)\mp\frac{h}{2R^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}-\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=$$

$$=\frac{w_n}{R}\left\{P_n(\cos\theta)+\left[\mu_n^*\mp\frac{h}{2R}(1-\mu_n^*)\right]\frac{d^2P_n(\cos\theta)}{d\theta^2}\right\}$$

$$\varepsilon_\varphi\left(\pm\frac{h}{2}\right)=\frac{1}{R}(u\operatorname{ctg}\theta+w)\mp\frac{h}{2R^2}\left(\frac{\partial w}{\partial\theta}-u\right)\operatorname{ctg}\theta=$$

$$=\frac{w_n}{R}\left\{P_n(\cos\theta)+\left[\mu_n^*\mp(1-\mu_n^*)\frac{h}{2R}\right]\operatorname{ctg}\theta\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}\right\} \tag{1.18}$$

Здесь величины $\varepsilon_j\left(+\frac{h}{2}\right)$ и $\varepsilon_j\left(-\frac{h}{2}\right)$ равны деформациям наружной и внутренней поверхностей оболочки.

Практически важно знать максимальные величины деформаций для каждой формы колебаний. При $n=0$, как известно, $\varepsilon_j\left(\pm\frac{h}{2}\right)=w_0/R$.

При $n=1$, согласно (1.16), $\mu_1^*=1$, так что $\varepsilon_\theta=\varepsilon_\varphi=0$, то есть деформации отсутствуют и сфера смещается как жесткое целое.

При $n=2$ из (1.18) получаем

$$\varepsilon_\theta\left(\pm\frac{h}{2}\right)=\frac{w_2}{R}a_2(b_2+\cos 2\theta);\quad \varepsilon_\varphi\left(\pm\frac{h}{2}\right)=\frac{w_2}{R}c_2(d_2+\cos 2\theta)$$

$$a_2=3\left[\frac{1}{4}-\mu_2^*\pm(1-\mu_2^*)\frac{h}{2R}\right];\quad b_2=\frac{1}{4a_2}$$

$$c_2=\frac{1}{2}(a_2+3/4);\quad d_2=\frac{a_2+3/4}{a_2-1/4}$$

и экстремумы деформаций достигаются при $\theta=0$ и $\theta=\pi/2$.

Согласно (1.15), можно принять $\mu_2^*=\frac{1+\nu}{4.7}$, так что имеем в полюсе

$$\varepsilon_\theta\left(\pm\frac{h}{2}\right)=\varepsilon_\varphi\left(\pm\frac{h}{2}\right)=\frac{w_2}{R}\left[0.042+0.319(1-2\nu)\pm3(1-\mu_2^*)\frac{h}{2R}\right]$$

а на экваторе

$$\varepsilon_\theta\left(\pm\frac{h}{2}\right)=\frac{w_2}{R}\left[0.457-0.319(1-2\nu)\mp3(1-\mu_2^*)\frac{h}{2R}\right]$$

$$\varepsilon_\varphi\left(\pm\frac{h}{2}\right)=-\frac{w_2}{2R}$$

Таким образом, при $n=2$ наибольшие величины деформаций ε_φ наблюдаются на экваторе, а ε_θ при $0\leqslant\nu<0.175$ максимальны в полюсе на наружной поверхности оболочки, а при $0.175\leqslant\nu\leqslant0.5$ на экваторе на внутренней поверхности.

При $n=3$ из (1.18) аналогично получаем

$$\varepsilon_\theta\left(\pm\frac{h}{2}\right)=\frac{w_3}{R}a_3(\cos\theta+b_3\cos 3\theta)$$

$$\varepsilon_\varphi\left(\pm\frac{h}{2}\right)=\frac{w_3}{R}c_3(\cos\theta+d_3\cos 3\theta)$$

$$a_3=\frac{3}{8}\left[1-\mu_3^*\pm(1-\mu_3^*)\frac{h}{2R}\right]\approx\frac{3}{8}[1-\mu_3^*]$$

$$b_3=\frac{5}{8}\left[1-9\mu_3^*\pm9(1-\mu_3^*)\frac{h}{2R}\right]\Big/a_3$$

$$c_3=\frac{3}{8}\left[1-11\mu_3^*\pm11(1-\mu_3^*)\frac{h}{2R}\right]$$

$$d_3=\frac{5}{8c_3}\left[1-3\mu_3^*\pm3(1-\mu_3^*)\frac{h}{2R}\right]\approx\frac{5}{8c_3}(1-3\mu_3^*)$$

Анализ этих зависимостей показывает, что при $n=3$ всегда имеется экстремум деформаций в полюсе, для которого, учитывая, что согласно (1.15) $\mu_3^*=\dfrac{1+\nu}{10.7}$, имеем

$$\varepsilon_\theta\left(\pm\frac{h}{2}\right)=\varepsilon_\varphi\left(\pm\frac{h}{2}\right)=\frac{w_3}{R}\left(0.439-0.561\,\nu\pm(1-\mu_3^*)\frac{3h}{R}\right)\quad(1.19)$$

Если выполнены условия $-9\leqslant\dfrac{1}{b_3}\leqslant3$, $-9\leqslant\dfrac{1}{d_3}\leqslant3$, функции ε_θ и ε_φ имеют второй экстремум, положение которого определяется по формулам

$$\theta_{1*}=\arcsin\sqrt{\frac{1+9b_3}{12b_3}},\qquad\theta_{2*}=\arcsin\sqrt{\frac{1+9d_3}{12d_3}}$$

Вычисления показывают, что для всех допустимых значений ν и h/R $|d_3|>1.5$, поэтому для деформаций ε_φ всегда существуют второй экстремум при $\theta_{2*}\approx\pi/3$, для которого

$$\varepsilon_\varphi\left(\pm\frac{h}{2}\right)\approx\frac{w_3}{R}\left[-0.455-0.018\,\nu\pm0.094(1-\mu_3^*)\frac{h}{R}\right]\approx$$

$$\approx-0.46\frac{w_3}{R}\quad(1.20)$$

Из сравнения (1.19) и (1.20) следует, что наибольшие деформации ε_φ при $0\leqslant\nu\leqslant-0.028+4.57\dfrac{h}{R}$ наблюдаются на наружной поверхности оболочки в полюсе, а для других значений ν и $\dfrac{h}{R}$ — на внутренней поверхности при $\theta\approx\pi/3$.

Величина второго экстремума меридиональных деформаций равна

$$\varepsilon_\theta\left(\pm\frac{h}{2}\right)=\frac{w_3}{R}\frac{a_3}{3}(1-3b_3)\sqrt{\frac{3b_3-1}{3b_3}} \qquad (1.21)$$

В зависимости от ν и h/R наибольшие величины ε_θ могут находиться как в полюсе, так и в точке второго экстремума. Если значения b_3 находятся вблизи границ интервала $-9\leqslant\frac{1}{b_3}\leqslant 3$, то количество экстремумов ε_θ может различаться при определении μ_3^* по точным (1.6) или приближенным (1.15) формулам. Однако, в этих случаях значения экстремумов близки между собой, так что наибольшие значения $|\varepsilon_\theta|$ могут определяться по формуле (1.19). Интересно, что при значениях коэффициента Пуассона, близких к $\nu=0.3$, значения деформаций в полюсе (1.19) и в точке второго экстремума (1.21) различаются не более, чем на 5%, так что наибольшее значение $|\varepsilon_\theta|$ также можно приближенно определять по более простой формуле (1.19).

Численно можно проверить, что наибольшие деформации у высших форм колебаний ($n\geqslant 4$) возникают в двух ближайших к полюсу экстремумах. В этой области для вычисления полиномов Лежандра можно использовать бесселеву асимптотику. Погрешность в определении экстремумов деформаций при этом уменьшается с ростом номера n и не превосходит 6% уже при $n=4$. Формулы для вычисления деформаций при $n\geqslant 4$ имеют вид

$$\varepsilon_\theta\left(\pm\frac{h}{2}\right)=\frac{w_n}{R}\left\{-\nu J_0(\tilde\theta)+(1+\nu)\frac{J_1(\tilde\theta)}{\tilde\theta}\pm\frac{h\lambda}{2R}\left[J_0(\tilde\theta)-\frac{J_1(\tilde\theta)}{\tilde\theta}\right]\right\}$$

$$\varepsilon_\varphi\left(\pm\frac{h}{2}\right)=\frac{w_n}{R}\left[J_0(\tilde\theta)-(1+\nu)\frac{J_1(\tilde\theta)}{\tilde\theta}\pm\frac{h\lambda}{2R}\frac{J_1(\tilde\theta)}{\tilde\theta}\right]$$

где $\tilde\theta=\sqrt{\lambda}\,\theta\approx(n+1/2)\,\theta$.

Качественно положения и величины главных экстремумов зависят от параметров ν и h/R, как оказалось, так же, как и при $n=3$. Один экстремум деформаций всегда расположен в полюсе, где деформации равны

$$\varepsilon_\theta\left(\pm\frac{h}{2}\right)=\varepsilon_\varphi\left(\pm\frac{h}{2}\right)=\frac{w_n}{R}\left(\frac{1-\nu}{2}\pm\frac{h}{R}\frac{\lambda}{4}\right) \qquad (1.22)$$

Аналогично случаю $n=3$ значения деформаций ε_θ в точке второго экстремума в зависимости от ν и $\frac{h}{R}\lambda$ могут быть как больше, так и меньше, чем в полюсе, однако при $\nu=0.3$ отличаются от деформаций в полюсе не более, чем на 2%. Таким образом, наибольшие значения меридиональных деформаций $\varepsilon_\theta\left(+\frac{h}{2}\right)$ при $n\geqslant 4$ могут определяться по формуле (1.22).

Положение $\tilde{\theta}_{2*}$ и величина второго экстремума для ε_2 при $\nu \simeq 0.3$ и $\frac{h}{R}\lambda \leqslant 0.4$ определяются по формулам

$$\tilde{\theta}_{2*} = (n + 1/2)\,\theta_{2*} = 3.42 + 0.4\,\frac{h}{R}\lambda$$

$$\varepsilon_2\left(\pm\frac{h}{2}\right) = \frac{w_n}{R}\left(-0.432 \pm 0.025\,\frac{h}{R}\lambda\right) \tag{1.23}$$

При $\frac{h}{R}\lambda \leqslant 0.4$ соотношения (1.23) позволяют определить наибольшие по модулю значения деформаций ε_2, которые наблюдаются в точке $\theta = \theta_{2*}$ на внутренней поверхности оболочки, а при $\frac{h}{R}\lambda > 0.4$ наибольшими являются значения $\varepsilon_2\left(+\frac{h}{2}\right)$ в полюсе, определяемые по формуле (1.22).

Полученные соотношения для максимальных величин деформаций могут быть использованы как для расчетов, так и при планировании экспериментов по тензометрированию сферических оболочек.

ЦНИИ Проектстальконструкция

Поступила 11 XII 1979

Վ. Ի. ՄԱԼԻ, Ս. Վ. ԲԱԶԻԼԵՎՍԿԻ

ՓԱԿ ՍՖԵՐԻԿ ԹԱՂԱՆԹԻ ԱԶԱՏ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՃԱԽԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԵՎ ՁԵՎԵՐԻ ՈՐՈՇՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Փակ սֆերիկ թաղանթի ազատ տատանումների հավասարումների ճշգրիտ լուծումների ասիմպտոտական անալիզի հիման վրա ստացվել են հասարակ մոտավոր բանաձևեր սեփական տատանումների ձևերի և հաճախականությունների համար։ Այդ բանաձևերը կիրառվում են ըստ սեփական ձևերի տատանվող սֆերիկ թաղանթների դեֆորմացիաների մաքսիմալ լայնույթները որոշելու համար։

DETERMINATION OF FREQUENCIES AND MODES OF FREE VIBRATIONS OF A CLOSED SPHERICAL SHELL

V. I. MALY, S. V. BASILEVSKY

Summary

Based on the asymptotic analysis of exact solutions of the equations of free vibrations of a closed spherical shell, simple approximations

for modes and frequencies are presented. As one of the applications of these formulas maximum deformations of the spherical shell, when vibrating with particular mode, are determined.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лужин О. В.* К вопросу о свободных колебаниях тонкой сферической оболочки. «Строит. механика и расчет сооружений», 1961, № 3.
2. *Рабинович И. М., Лужин О. В.* и др. Расчет сооружений на импульсивные воздействия. М., «Стройиздат», 1970.
3. *Naghdi P. M., Kalnins A.* On vibrations of elastic spherical shells. Trans. ASME, Ser. E, Journ. Appl. Mech., 1962, vol. 29, No. 1.
4. *Kalnins A.* Effect of Bending on Vibrations of Spherical Shells. Journ. of the Acoustical Society of America, 1964, vol. 36, pp. 74—81.
5. *Лизарев А. Д.* О низших частотах собственных осесимметричных колебаний непологих сферических оболочек. Инженерный журнал, МТТ, 1967, № 3.
6. *Мартыненко В. С., Шпакова С. Г.* Несимметричные колебания сферических оболочек. Прикл. механика, АН УССР, 1973, 9, № 10.
7. *Шмаков В. П.* О колебаниях непологих сферических оболочек. Изв. АН СССР, МТТ, 1969, № 3.
8. *Zarghamee M. S., Robinson A. R.* A numerical method for analysis of free vibration of spherical shells. AIAA Journal, 1967, vol. 5, No. 5.
9. *Новожилов В. В.* Расчет напряжений в тонкой сферической оболочке при произвольной нагрузке. ДАН СССР, 1940, том XXVII, № 6.
10. Вибрации в технике. Справочник, т. 1. М., «Машиностроение», 1978.
11. *Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике. М., «Мир», 1972.
12. *Robin L.* Fonctions spheriques de Legendre et fonctions spheroidal. Ed. Gauthier-Villars, Paris, 1957—1959.