ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIII, № 5, 1980 Механика

Т. П. ПЕТРЕНКО

РЕШЕНИЕ КВАЗИСТАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ИЗГИБА ПЛАСТИНКИ МЕТОДОМ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Предложенный Гольденвейзером А. Л. асимптотический метод построения теории оболочек [1] был применен им в работе [2] для построения приближенной теории изгиба пластинки в случае статики.

Этот метод нашел применение и для решения динамических задач колебаний тонких пластинок. В частности, в работе [3] рассматриваемый метод позволил получить двумерные динамические уравнения колебаний пластинок из трехмерных уравнений теории упругости и установить предел применимости полученных уравнений.

В нашей работе методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости решается для случая установившихся колебаний квазистатическая задача изгиба пластинки.

Согласно методу Гольденвейзера напряженное состояние пластинки составляется как сумма медленно затухающего напряженного состояния, которое строится при помощи основного итерационного процесса, и быстро затухающих при удалении от краев напряженных состояний, которые строятся при помощи вспомогательного итерационного процесса.

Пусть ось z перпендикулярна к плоскости пластинки, а срединная плоскость совпадает с плоскостью xy.

Основные уравнения теории упругости в случае установившихся колебаний с частотой ω можно записать так:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}=-\rho\omega^2u \qquad (xy)\\ &\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=-\rho\omega^2w \end{aligned} \tag{1.1}$$

Формулы перемещения — напряжения имеют вид

$$E\frac{\partial u}{\partial x}=\sigma_x-\nu(\sigma_y+\sigma_z)\quad(xy),\qquad E\frac{\partial w}{\partial z}=\sigma_z-\nu(\sigma_x+\sigma_y)$$

$$E\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)=2(1+\nu)\tau_{xz}\quad(xy) \tag{1.2}$$

$$E\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=2(1+\nu)\tau_{xy}$$

Здесь и в дальнейшем символ (xy) означает, что имеет место второе соотношение, которое может быть получено из приведенного путем замены x и u на y и v и наоборот.

На плоскостях пластинки $z = \pm h$ должны выполняться следующие граничные условия:

$$\sigma_z = \pm \frac{1}{2} p(x, y), \quad \tau_{xz} = 0, \quad \tau_{yz} = 0 \tag{1.3}$$

при этом $p(x, y) e^{i\omega t}$ — интенсивность внешней нормальной нагрузки.

Обозначим $\rho\omega^2$ через $h^{\varkappa} a^2$, где a^2 порядка E, $\varkappa$ — параметр, который для рассматриваемой нами квазистатической задачи можно принять равным двум.

Зададим любое из перемещений и напряжений в виде

$$Q = h^{-q} \sum_{s=1}^{s} h^{s-1} Q^{(s)} \tag{1.4}$$

Здесь q есть целое число, которое определяется из соотношений:

$$\begin{gathered}(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) \to q = \varkappa + 2, \quad (\tau_{xz}, \tau_{yz}) \to q = \varkappa + 1 \\ \sigma_z \to q = \varkappa, \quad (u, v) \to q = \varkappa + 2, \quad w \to q = \varkappa + 3\end{gathered} \tag{1.5}$$

(число $\varkappa$ определяется из граничных условий).

Заменяя в уравнениях (1.1), (1.2 z по формуле

$$z = h\zeta$$

приняв, что по переменным (x, y, ζ) скорость изменения напряжений и перемещений не слишком велика, выражая перемещения и напряжения по формулам (1.4), (1.5) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях h, получим

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \sigma_x^{(s)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^{(s)}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^{(s)}}{\partial \zeta} = -a^2 u^{(s-2)} \quad (xy) \\
\frac{\partial \tau_{xz}^{(s)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^{(s)}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z^{(s)}}{\partial \zeta} = -a^2 w^{(s)} \\
E \frac{\partial u^{(s)}}{\partial x} = \sigma_x^{(s)} - \nu \left(\sigma_y^{(s)} + \sigma_z^{(s-2)} \right) \quad (xy) \\
E \frac{\partial w^{(s)}}{\partial \zeta} = \sigma_z^{(s-4)} - \nu \left(\sigma_x^{(s-2)} + \sigma_y^{(s-2)} \right) \\
E \left(\frac{\partial u^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial w^{(s)}}{\partial x} \right) = 2(1+\nu)\, \tau_{xz}^{(s-2)} \quad (xy) \\
E \left(\frac{\partial u^{(s)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(s)}}{\partial x} \right) = 2(1+\nu)\, \tau_{xy}^{(s)}
\end{gathered} \tag{1.6}$$

Отметим, что при $\alpha > 2$ те же преобразования приводят к системе, которая приближается к полученной в работе [2] системе для случая статики.

Интеграл системы (1.6) представим в виде

$$Q^{(s)} = Q_i^{(s)} + Q^{*(s)} \tag{1.7}$$

где $Q_i^{(s)}$ — интеграл однородной системы, получающейся из системы (1.6) за счет отбрасывания величин с верхним индексом, меньшим s, а $Q^{*(s)}$ — какой-либо частный интеграл неоднородной системы (1.6), в которой все величины с индексом, меньшим s, рассматриваются как известные.

Интеграл однородной системы имеет вид

$$u_i^{(s)} = \zeta u_1^{(s)} \quad (xy), \quad w_i^{(s)} = w_0^{(s)}, \qquad \sigma_{xi}^{(s)} = \zeta \sigma_{x1}^{(s)} \quad (xy)$$

$$\tau_{xyi}^{(s)} = \zeta \tau_{xy1}^{(s)}, \qquad \tau_{xzi}^{(s)} = \zeta^2 \tau_{xz2}^{(s)} + \tau_{xz0}^{(s)} \quad (xy) \tag{1.8}$$

$$\sigma_{zi}^{(s)} = \zeta^3 \sigma_{z3}^{(s)} + \zeta \sigma_{z1}^{(s)}$$

Здесь величины, отмеченные дополнительными индексами внизу,— функции двух переменных (x, y). Они связаны следующими соотношениями:

$$u_1^{(s)} = -\frac{\partial w_0^{(s)}}{\partial x} \quad (xy), \qquad \sigma_{x1}^{(s)} = -\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w_0^{(s)}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0^{(s)}}{\partial y^2}\right) \quad (xy)$$

$$\tau_{xy1}^{(s)} = -\frac{E}{1+\nu}\frac{\partial^2 w_0^{(s)}}{\partial x \partial y}, \qquad \tau_{xz2}^{(s)} = \frac{E}{2(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^3 w_0^{(s)}}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w_0^{(s)}}{\partial x \partial y^2}\right) \quad (xy)$$

$$\sigma_{z3}^{(s)} = \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^2 \sigma_{x1}^{(s)}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \tau_{xy1}^{(s)}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_{y1}^{(s)}}{\partial y^2}\right) \tag{1.9}$$

$$\sigma_{z1}^{(s)} = -\left(\frac{\partial \tau_{xz0}^{(s)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz0}^{(s)}}{\partial y} + \alpha^2 w_0^{(s)}\right)$$

Интеграл системы (6) можно представить в виде

$$w^{*(s)} = \frac{1}{E}\int_0^{\zeta}\left[\sigma_z^{(s-4)} - \nu\left(\sigma_x^{(s-2)} + \sigma_y^{(s-2)}\right)\right] d\zeta$$

$$u^{*(s)} = \frac{2(1+\nu)}{E}\int_0^{\zeta} \tau_{xz}^{(s-2)} d\zeta - \frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\zeta} w^{*(s)} d\zeta \quad (xy)$$

$$\sigma_x^{*(s)} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u^{*(s)}}{\partial x} + \nu \frac{\partial v^{*(s)}}{\partial y}\right) + \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_z^{(s-2)} \quad (xy) \tag{1.10}$$

$$\tau_{xy}^{*(s)} = \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial u^{*(s)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{*(s)}}{\partial x}\right)$$

$$\tau_{xz}^{*(s)} = -\int_0^{\zeta}\left(\frac{\partial \sigma_x^{*(s)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^{*(s)}}{\partial y}\right) d\zeta - \alpha^2 \int_0^{\zeta} u^{(s-2)} d\zeta \quad (xy)$$

$$\sigma_z^{*(s)} = -\int_0^{\zeta}\left(\frac{\partial\tau_{xz}^{*(s)}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}^{*(s)}}{\partial y} + a^2 w^{*(s)}\right) d\zeta$$

Как видим, все величины $Q^{*(s)}$ при $s = 1$ и $s = 2$ равны нулю, а при $s > 2$ строятся при помощи рекуррентных формул (1.10).

Потребуем теперь, чтобы напряжения и перемещения, вычисляемые при помощи основного итерационного процесса, удовлетворяли при $z = \pm h$ соотношениям (1.3) и дополнительному условию

$$\frac{\partial\sigma_z}{\partial z} = -h^2 a^2 w \tag{1.11}$$

которое вытекает из (1.3) и (1.1). При помощи (1.4), (1.5) и (1.8) из (1.3) и (1.11) получим при $z = h$ $(\zeta = 1)$

$$h^{s-\varkappa-1}\left(\sigma_{z3}^{(s)} + \sigma_{z1}^{(s)} + \sigma_z^{*(s)}\right) = \frac{1}{2} p_s$$

$$3\sigma_{z3}^{(s)} + \sigma_{z1}^{(s)} + \frac{\partial\sigma_z^{*(s)}}{\partial\zeta} + a^2 w_0^{(s)} + a^2 w^{*(s)} = 0 \tag{1.12}$$

$$\tau_{xz2}^{(s)} + \tau_{xz0}^{(s)} + \tau_{xz}^{*(s)} = 0 \quad (xy)$$

где $p_1 = p(x, y)$, $p_s = 0$ при $s > 1$. Аналогичные условия будут выполняться автоматически при $z = -h$, так как задача обратно симметрична.

Из уравнений (1.12), положив $\varkappa$ равным нулю, найдем

$$\sigma_{z3}^{(1)} = -\frac{1}{4} p - \frac{a^2}{2} w_0^{(1)}, \qquad \sigma_{z1}^{(1)} = \frac{3}{4} p + \frac{a^2}{2} w_0^{(1)}$$

$$\sigma_{z3}^{(s)} = -\frac{a^2}{2} w_0^{(s)} + \frac{1}{2}\left(\sigma_z^{*(s)} - \frac{\partial\sigma_z^{*(s)}}{\partial\zeta} - a^2 w^{*(s)}\right) \quad (s > 1) \tag{1.13}$$

$$\sigma_{z1}^{(s)} = \frac{a^2}{2} w_0^{(s)} - \frac{1}{2}\left(3\sigma_z^{*(s)} - \frac{\partial\sigma_z^{*(s)}}{\partial\zeta} - a^2 w^{*(s)}\right) \quad (s > 1)$$

$$\tau_{xz0}^{(s)} = -\tau_{xz2}^{(s)} - \tau_{xz}^{*(s)} \quad (xy)$$

Из (1.9) и (1.13) получим уравнение относительно функции $w_0^{(s)}$. Все величины, отмеченные индексом s и звездочкой, можно считать известными, если уже построены $s - 2$ первых приближений,

$$\frac{a^2}{2} w_0^{(s)} - \frac{E}{3!\,(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^4 w_0^{(s)}}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w_0^{(s)}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_0^{(s)}}{\partial y^4}\right) =$$

$$= -\frac{1}{4} p\delta_{1s} + \frac{1}{2}\left(\sigma_z^{*(s)} - \frac{\partial\sigma_z^{*(s)}}{\partial\zeta} - a^2 w^{*(s)}\right) \tag{1.14}$$

где $\delta_{11} = 1$ и $\delta_{1s} = 0$ при $s > 1$.

Таким образом, система (1.9) может быть разрешена и из нее можно определить все входящие в (1.9) величины.

При построении вспомогательного итерационного процесса будем считать, что боковой край пластинки проходит вдоль линии $x = 0$, а пластинка простирается в сторону отрицательных x.

Зададим любое из перемещений и напряжений в виде

$$Q = h^q \sum_{s=1}^{s} h^{s-1} Q^{(s)} \tag{1.15}$$

Для выбора значений q возможны два варианта.

Вариант I

$$\begin{gathered}(\tau_{xy}, \tau_{yz}) \to q = -\lambda, \quad (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xz}, \sigma_z) \to q = -\lambda + 1 \\ (u, w) \to q = -\lambda + 2, \quad v \to q = -\lambda + 1\end{gathered} \tag{1.16}$$

Вариант II

$$\begin{gathered}(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xz}, \sigma_z) \to q = -\mu + 1, \quad (\tau_{xy}, \tau_{yz}) \to q = -\mu + 2 \\ (u, w) \to q = -\mu + 2, \quad v \to q = -\mu + 3\end{gathered} \tag{1.17}$$

В соответствии с этими вариантами можно построить два варианта вспомогательного итерационного процесса и считать, что напряжения и перемещения составляются как сумма трех слагаемых, соответствующих основному итерационному процессу и двум вариантам вспомогательного итерационного процесса.

Числа λ и μ выбираются в зависимости от граничных условий на боковом крае пластинки.

Заменим в уравнениях (1.1), (1.2) x и z по формулам

$$x = h\xi, \quad z = h\zeta$$

принимая, что по переменным (ξ, y, ζ) скорость изменения величин не слишком велика, выразим перемещения и напряжения по формулам (1.15), выбирая для q значения из (1.16) или из (1.17), и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях h. Получим

$$\begin{gathered}\frac{\partial \sigma_x^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{xy}^{(s)}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^{(s)}}{\partial \zeta} = -a^2 u^{(s-4)} \\ \frac{\partial \tau_{xy}^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_y^{(s)}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}^{(s)}}{\partial \zeta} = -a^2 v^{(s-4)} \\ \frac{\partial \tau_{xz}^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{yz}^{(s)}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z^{(s)}}{\partial \zeta} = -a^2 w^{(s-4)}\end{gathered} \tag{1.18}$$

$$E \frac{\partial u^{(s)}}{\partial \xi} = \sigma_x^{(s)} - \nu (\sigma_y^{(s)} + \sigma_z^{(s)}), \quad E \frac{\partial v^{(s)}}{\partial y} = \sigma_y^{(s)} - \nu (\sigma_x^{(s)} + \sigma_z^{(s)})$$

$$E \frac{\partial w^{(s)}}{\partial \zeta} = \sigma_z^{(s)} - \nu (\sigma_x^{(s)} + \sigma_y^{(s)}), \quad E \left(\frac{\partial u^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial w^{(s)}}{\partial \xi} \right) = 2 (1 + \nu) \tau_{xz}^{(s)}$$

$$E\left(\frac{\partial v^{(\alpha)}}{\partial \zeta}+\frac{\partial w^{(\gamma)}}{\partial y}\right)=2(1+\nu)\,\tau_{yz}^{(\alpha)}, \qquad E\left(\frac{\partial u^{(\gamma)}}{\partial y}+\frac{\partial v^{(\alpha)}}{\partial \xi}\right)=2(1+\nu)\,\tau_{xy}^{(\alpha)}$$

Здесь α, β, γ принимают значения:

$$\alpha = s, \quad \beta = s, \quad \gamma = s-2 \quad \text{для варианта I}$$

$$\alpha = s, \quad \beta = s-2, \quad \gamma = s \quad \text{для варианта II}$$

Полученная нами при $\alpha = 2$ система уравнений (1.18) приближается к приведенной в работе [2] системе для случая статики.

Донецкий государственный
университет

Поступила 10 XII 1979

Տ. Պ. ՊԵՏՐԵՆԿՈ

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԱՍԻՄՊՏՈՏԱԿԱՆ ԻՆՏԵԳՐՄԱՆ ՄԵԹՈԴՈՎ ՍԱԼԻ ԾՌՄԱՆ ԿՎԱԶԻՍՏԱՏԻԿ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում է կայունացված տատանումների համար սալի ծռման կվազիստատիկ խնդիրը։ Լարված վիճակը ներկայացվում է մի քանի լարված վիճակների գումարի տեսքով, որոնք կառուցվում են հիմնական և օժանդակ իտերացիոն պրոցեսների օգնությամբ։ Հիմնական և օժանդակ իտերացիոն պրոցեսները կառուցվել են առաձգականության տեսության հավասարումների ասիմպտոտական ինտեգրման մեթոդով։

THE SOLUTION TO A QUASI-STATIC PROBLEM FOR A PLATE FLEXURE BY ASYMPTOTIC INTEGRATION OF EQUATIONS IN THE THEORY OF ELASTICITY

T. P. PETRENKO

S u m m a r y

The solution to a quasi-static problem for a plate flexure under steady vibration is suggested. The problem is solved by asymptotic integration of equations in the theory of elasticity.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А. Л.* Асимптотический метод построения теории оболочек. Материалы I Всесоюзной школы по теории и численным методам расчета оболочек и пластин. Гегечкори, Груз.ССР, 1—10 окт. 1974, Изд-во Тбил. ун-та, 1975.
2. *Гольденвейзер А. Л.* Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ, 1962, т. 26, вып. 4.
3. *Гусейн-Заде М. И.* Асимптотический анализ трехмерных динамических уравнений тонкой пластинки. ПММ, 1974, т. 38, вып. 6.