ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIII, № 5, 1980 Механика

Р. С. МИНАСЯН, Г. А. ПОГОСЯН

РАСТЯЖЕНИЕ ОДНОРОДНОГО АНИЗОТРОПНОГО СЛЕГКА ИЗОГНУТОГО БРУСА

В статьях П. М. Риза [1], А. К. Рухадзе [2], Р. С. Минасяна [3, 4, 5], Г. М. Хатиашвили [6] и др. исследуется напряженное состояние слегка изогнутого бруса с осью, представляющей кривую второго порядка при различных видах деформаций. В настоящей статье ставится более общая задача — исследовать напряженное состояние при растяжении бруса, ось которого — плоская кривая произвольного порядка.

1. *Постановка задачи.* Отнесем однородный анизотропный брус с одной плоскостью упругой симметрии (13 упругих постоянных) к прямоугольной, прямолинейной системе координат. Примем начало координат в центре тяжести нижнего закрепленного основания, а оси Ox и Oy направим по его главным центральным осям.

Положим, что брус слегка изогнут, ограничен боковой поверхностью

$$F\left(x+\varepsilon\frac{z^n}{n},\ y\right)=0 \tag{1.1}$$

и основаниями: нижним $z=0$, верхним $z=l$; $n\geqslant 2$ — целое положительное число; ε — настолько малый параметр, что во всех нижеприведенных вычислениях членами с множителем ε^2 пренебрегаем.

Упругие постоянные материала стержня обозначим через A_{ij}. Полагаем, что объемные силы отсутствуют, боковая поверхность F свободна от напряжений, а все внешние силы, приложенные к верхнему основанию, приводятся к растягивающей силе N, приложенной в его центре тяжести и параллельной оси Oz.

Задачу решаем в линейной постановке, то есть полагаем смещения такими, что их компоненты деформаций с достаточной точностью определяются линейными членами, а напряжения не превосходят предел пропорциональности и определяются известными формулами [7]

$$\begin{aligned}\tau_{jj}&=\sum_{i=1}^{3}A_{ji}e_{ii}+A_{j4}e_{12},\quad j=1,2,3,4,\quad \tau_{44}=\tau_{12}\\ \tau_{3i}&=A_{\alpha\alpha}e_{3i}+A_{56}e_{3\gamma},\quad i=1,2,\quad \alpha=4+i,\quad \gamma=3-i\end{aligned}\tag{1.2}$$

причем

$$e_{ii}=\frac{\partial u_i}{\partial x_i},\qquad e_{ij}=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i},\qquad i,j=1,2,3,\quad i\neq j \tag{1.3}$$

где u_i — смещения: $u_1\equiv u$, $u_2\equiv v$, $u_3\equiv w$; $x_1=x$, $x_2\equiv y$, $x_3\equiv z$.

Из формул (1.2) легко получить компоненты деформаций

$$e_{ii} = E^{-1} \sum_i \sigma_{ji} \tau_{ii}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \quad e_{44} \equiv e_{12}$$

$$e_{3i} = \mu_{3i}^{-1} (\tau_{3i} - \nu_i \tau_{3j}), \quad i = 1, 2 \tag{1.4}$$

$$\mu_{3i} = A_{\alpha\alpha} - \nu_i A_{56}, \quad \mu_{31}\nu_2 = \mu_{32}\nu_1, \quad \nu_j = A_{\alpha\alpha}^{-1} A_{56}, \quad \alpha = 4 + i, \quad \gamma = 3 - i$$

В формулах (1.4), как и в нижеприведенных (1.5), σ с одинаковыми индексами следует приписать знак плюс, а с различными — знак минус.

Приведем также зависимости между постоянными A_{ij}, E и σ_{ij}

$$\sum_i A_{ij} \sigma_{ij} = E; \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \quad \sum_i A_{2i} \sigma_{ji} = 0 \quad j = 1, 3, 4$$

$$\sum_i A_{1i} \sigma_{ji} = 0; \qquad j = 2, 3, 4 \qquad \sum_i A_{3i} \sigma_{ji} = 0 \quad j = 1, 2, 4 \tag{1.5}$$

$$\sum_i A_{4i} \sigma_{ji} = 0 \quad j = 1, 2, 3$$

причем $\sigma_{33} = 1$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Ниже применяются также обозначения $\sigma_{3i} = \sigma_i$, $\sigma_{4j} = \sigma_j$, $i = 1, 2$, $j = 3, 4$.

Математически рассматриваемая задача сводится к определению шести компонентов напряжений в области V, занятой брусом, удовлетворяющих однородным уравнениям равновесия

$$\sum_j \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = 0 \qquad i, j = 1, 2, 3 \tag{1.6}$$

граничным условиям на боковой поверхности F

$$\sum_j \tau_{ij} \cos(n, x_j) = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \tag{1.7}$$

причем n — нормаль к боковой поверхности (внешняя по отношению к области V).

Компоненты деформаций, соответствующие искомым напряжениям τ_{ij}, должны удовлетворять условиям совместности Сен-Венана, а усилия на верхнем основании $z = l$ — приводиться к заданной растягивающей силе N.

2. *Некоторые формулы преобразования.* Введем новую систему координат [1]

$$\xi = x + \varepsilon \frac{z^n}{n}, \quad \eta = y, \quad \zeta = z \tag{2.1}$$

Тогда рассматриваемый, слегка изогнутый брус в пространстве ξ, η, ζ переходит в призматический, ограниченный боковой поверхностью $F_0(\xi, \eta) = 0$, основаниями: нижним $\zeta = 0$, верхним $\zeta = l$ с поперечным сечением S, контур которого L. Брус загружен на верхнем основании центрально приложенной силой N.

Для перехода из пространства x, y, z в пространство ξ, η, ζ, с вышеуказанной точностью, используются формулы

$$\frac{\partial}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial \xi_i}, \qquad \frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial \zeta}+\varepsilon\zeta^{n-1}\frac{\partial}{\partial \xi_1}$$

$$\cos(n, x_i)=\cos(n, \xi_i), \ \cos(n, z)=\varepsilon\zeta^{n-1}\cos(n, \xi_1), \ i=1, 2 \tag{2.2}$$

При этом, как в (2.2), так и ниже

$$\xi_1\equiv\xi, \quad \xi_2\equiv\eta, \quad \xi_3\equiv\zeta$$

3. *Растяжение слегка изогнутого бруса.* Решение рассматриваемой задачи в пространстве ξ, η, ζ будем искать в виде [1]

$$u_i=\alpha\left(\sigma_i\xi_i+\frac{1}{2}\sigma_3\xi_\gamma\right)+\alpha\varepsilon u_i', \quad w=\alpha\zeta+\alpha\varepsilon w', \quad \alpha=J_{11}^{-1}N, \tag{3.1}$$

$$i=1, 2, \quad \gamma=3-i$$

где $J_{11}=ES$ — жесткость бруса при растяжении; u_i', w' — смещения, выражающие влияние кривизны на деформированное состояние.

Если воспользоваться последовательно формулами (3.1), (2.2), (1.3) и (1.2), с указанной выше точностью получим

$$\begin{gathered}\tau_{ij}=\alpha\varepsilon\tau_{ij}', \quad i, j=1, 2, \qquad \tau_{33}=\alpha E+\alpha\varepsilon\tau_{33}' \\ \tau_{3i}=\alpha\varepsilon(\zeta^{n-1}H_i+\tau_{3i}'), \quad i, j=1, 2\end{gathered} \tag{3.2}$$

где

$$H_1=-\left(A_{55}\sigma_1+\frac{1}{2}A_{56}\sigma_3\right), \quad H_2=-\left(\frac{1}{2}A_{66}\sigma_3+A_{56}\sigma_1\right) \tag{3.3}$$

В формулах (3.2) τ_{ij}' — неизвестные напряжения, соответствующие смещениям u_i', w'*.

Используя формулы перехода (2.2) и компоненты напряжений (3.2), уравнения равновесия (1.6) и граничные условия (1.7), соответственно представятся так:

$$\sum_i\frac{\partial\tau_{ji}'}{\partial\xi_i}+(n-1)\zeta^{n-2}H_j=0, \ i, j=1, 2, 3 \tag{3.4}$$

$$\sum_i\tau_{ji}'\cos(n, \xi_i)=0, \quad i, j=1, 2 \tag{3.5}$$

$$\sum_i\tau_{3i}'+\zeta^{n-1}[(E+H_1)\cos(n, \xi)+H_2\cos(n, \eta)]=0 \tag{3.6}$$

В уравнениях (3.4) и (3.6) H_1 и H_2 имеют значения (3.3), а $H_3=0$. Итак, задача свелась к определению шести компонентов напряжений τ_{ij}', удовлетворяющих в области, занятой брусом (в пространстве ξ, η, ζ)

* Термины смещения и напряжения здесь применяются условно, то есть в действительности указанные величины будут соответственно смещениями и напряжениями, будучи умноженными на $\alpha\varepsilon$.

уравнениям равновесия (3.4) и граничным условиям (3.5) и (3.6). При этом, компоненты деформаций, соответствующие напряжениям τ'_{ij} должны удовлетворять также шести условиям совместности Сен-Венана.

Полученную задачу решаем полуобратным методом. Зададимся общим видом искомых напряжений, вводя в них неизвестные функции и неизвестные постоянные. За счет неизвестных функций будут удовлетворены перечисленные выше условия, а за счет постоянных постараемся обеспечить разрешимость граничных задач, которые получим.

Итак, примем

$$\tau'_{ii}=\sum_k \zeta^k T_{ii}^{(k)} + k_1(2-i)E\zeta^k\xi, \quad \tau'_{12}=\sum_k \zeta^k T_{12}$$

$$\tau'_{33}=\sum_k \zeta^k \left[\sigma_{33}^{(k)} - k_2^{-1}E\zeta^2\left(a^{(k_1)}-\sum_j p_j^{(k)}\xi_j\right)\right] - E(\alpha^* + \beta_1^*\xi + \beta_2^*\eta)$$

$$\tau'_{3i}=\zeta^{k_1}[E(i-2)-H_i]+\sum_k \zeta^{k_1}\left\{\frac{\partial\Psi_{ii}}{\partial\xi_i} + L_i\omega^{(k_1)} + \frac{1}{2}a^{(k_1)}E\xi_i + \right.$$

$$\left. + c^{(k)}\left[A_{\alpha\alpha}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_i}+\varkappa\xi_\gamma\right)+A_{56}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_\gamma}-\varkappa\xi_i\right)\right]\right\} \tag{3.7}$$

$$k_i=k+i, \quad \alpha=4+i, \quad \gamma=3-i, \quad \varkappa=(-1)^i, \quad i, j=1, 2$$

где $k=n-2(t+1)$, $t=0, 1, 2, 3, \ldots$, наибольшее значение t соответствует $k=0$ при n четном и $k=-1$ при n нечетном (в формулах $k\geqslant 0$ и $k_1\geqslant 0$).

В (3.7) введены обозначения

$$T_{ii}=k_1\left(\tau^*_{ii}+\frac{\partial^2\Phi^{(k)}}{\partial\xi_\gamma^2}\right), \quad T_{12}=k_1\left(\tau^*_{12}-\frac{\partial^2\Phi^{(k)}}{\partial\xi\partial\eta}\right), \quad \sigma_{33}^{(k)}=\sigma_1 T_{11}^{(k)}+\sigma_2 T_{22}^{(k)}+T_{33}^{(k)}$$

$$\tau^*_{ii}=-c^{(k)}\left(A_{\alpha\alpha}\varphi-\frac{1}{2}\varkappa A_{56}\xi_i^2\right)-\frac{1}{4}a^{(k_1)}E\xi_i^2-\Psi_{ii}-A_{\alpha\alpha}\omega^{(k_1)}$$

$$\tau^*_{12}=-c^{(k)}\left[A_{66}\varphi-\frac{1}{2}(A_{55}\eta^2-A_{66}\xi^2)\right]-A_{56}\omega^{(k_1)}$$

$$T_{33}=k_1E\left\{\sum_i p_i^{(k)}\psi^{(i)}+\omega^{(k_1)}+\varphi+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}a^{(k_1)}\sum_i\left[(E\mu_{3i}^{*-1}-2\sigma_i)\xi_i^2-\nu_i\mu_{3i}\xi\eta\right]-\frac{1}{2}a^{(k_1)}\sigma_3\xi\eta\right\}$$

$$\frac{\partial\Psi_{ii}}{\partial\xi_i}=\sum_{j=1}^{2}p_j^{(k)}(A_{\alpha\alpha}\tau_{3i}^{(j)}+A_{56}\tau_{3\gamma}^{(j)})+U_{3i}^{(k+2)}, \qquad \psi^{(i)}=\chi^{(i)}-\sigma_i\xi_i^2$$

причем

$$\tau_{31}^{(1)}=\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial\xi}-\frac{1}{2}(\sigma_1\xi^2-\sigma_2\eta^2), \quad U_{3i}^{(k)}=A_{\alpha\alpha}U_i^{(k)}+A_{56}U_\gamma^{(k)}$$

$$\tau_{32}^{(1)} = \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \eta} - \sigma_2 \xi \eta - \frac{1}{2} \sigma_3 \xi^2, \qquad L_i = A_{\alpha\alpha} \frac{\partial}{\partial \xi_i} + A_{56} \frac{\partial}{\partial \xi_\gamma}$$

$\tau_{31}^{(2)}$ и $\tau_{32}^{(2)}$ получаются соответственно из $\tau_{32}^{(1)}$ и $\tau_{31}^{(1)}$ перестановкой ξ и η, σ_1 и σ_2 и заменой верхнего индекса 1 на 2.

$$U_i^{(k)} = \int \left\{ e_i^{(k)} d\xi_i + d\xi_\gamma \int \left[\frac{\partial e_i^{(k)}}{\partial \xi_\gamma} d\xi_i + \left(\frac{\partial e_{12}^{(k)}}{\partial \xi_\gamma} - \frac{\partial e_\gamma^{(k)}}{\partial \xi_i} \right) d\xi_\gamma \right] \right\} \tag{3.8}$$

при этом $e^{(k)}$ имеют значения

$$e_i^{(k)} = kE^{-1} (\alpha_{ii} T_{ii}^{(k)} - \alpha_{i\gamma} T_{11}^{(k)} - \alpha_{i3} T_{12}^{(k)} - \sigma_i T_{33}^{(k)}) + (n-1) t_{ii}$$

$$e_{12}^{(k)} = kE^{-1} (-\alpha_{13} T_{11}^{(k)} - \alpha_{23} T_{22}^{(k)} + \alpha_{33} T_{12}^{(k)} - \sigma_3 T_{33}^{(k)}) - (n-1) t_{12}$$

$$i = 1, 2, \quad \gamma = 3 - i$$

$$\alpha_{ii} = \sigma_{ii} - \sigma_i^2, \quad \alpha_{12} = \sigma_{12} + \sigma_1 \sigma_2, \quad \alpha_{i3} = \sigma_i \sigma_3 + \sigma_{i4}, \quad \alpha_{33} = \sigma_3^2 - \sigma_{44}$$

где t_{ij} при наибольшем значении k, то есть при $k = n - 2$ определяются формулами

$$t_{ii} = \sigma_{1i} \xi, \quad i = 1, 2, \quad t_{12} = -\sigma_{14} \xi$$

при всех остальных значениях k $t_{ij} = 0$.

В решении (3.7) φ и $\chi^{(i)}$ — неизвестные функции из теории напряженного состояния однородного анизотропного призматического бруса [7], причем φ — функция кручения, $\chi^{(1)}$ — функция изгиба в плоскости $\xi O \zeta$, а $\chi^{(2)}$ — в плоскости $\eta O \zeta$.

Неизвестными в решении являются функции $\Phi^{(k)}$ и $\omega^{(k_1)}$ и постоянные $a^{(k_1)}$, $p_i^{(k)}$, $c^{(k)}$, α^*, β_1^*, β_2^*.

Компоненты напряжений (3.7) удовлетворяют первым двум уравнениям равновесия (3.4), а из третьего получим

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} (L_i \omega^{(k_1)}) = - \left(k_2 \sigma_{33}^{(k_2)} + \sum_i \frac{\partial U^{(k_1)}}{\partial \xi_i} \right), \quad i = 1, 2 \tag{3.9}$$

Вычислив по формулам (1.4) компоненты деформаций, соответствующие напряжениям (3.7), и подставив их в условия совместности Сен-Венана, убеждаемся, что последние будут удовлетворены, если функции $\Phi^{(k)}$ в области S будут определяться условием

$$\sum_i \left(\alpha_{ii} \frac{\partial^4 \Phi^{(k)}}{\partial \xi_\gamma^4} + 2\alpha_{i3} \frac{\partial^4 \Phi^{(k)}}{\partial \xi_i \partial \xi_\gamma^3} \right) + (\alpha_{33} - 2\alpha_{12}) \frac{\partial^4 \Phi^{(k)}}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \Big(k_1^{-1} \sigma_3 T_{33}^{(k)} +$$

$$+ \alpha_{33} \tau_{12}^* - \sum_i \alpha_{i3} \tau_{ii}^* \Big) + \sum_i \Big[\frac{\partial^2}{\partial \xi_\gamma^2} (\alpha_{ii} \tau_{ii}^* - \alpha_{12} \tau_{\gamma\gamma}^* - \alpha_{i3} \tau_{12}^*) -$$

$$- k_1^{-1} \sigma_i \frac{\partial^2 T_{33}^{(k)}}{\partial \xi_\gamma^2} \Big] = 0, \quad i = 1, 2 \tag{3.10}$$

Перейдем к граничным условиям. Подставляя напряжения (3.7) в условия (3.6), получим

$$\sum_{i} L_{i}\omega^{(k_i)} = -\left(\sum_{i}\frac{1}{2}a^{(k_i)}E\xi_i + U_{3i}^{(k_i)}\right)\cos(n, \xi_i), \quad i = 1, 2 \tag{3.11}$$

а из (3.5) следует

$$\frac{\partial\Phi^{(k)}}{\partial\xi_\gamma} = (-1)^i\int[(\tau_{ii}^* + f)\cos(n, \xi_i) + \tau_{12}^*\cos(n, \xi_\gamma)]\, dS \tag{3.12}$$

$$i = 1, 2, \quad \gamma = 3 - i$$

где при наибольшем значении k $f = (2-i)\, k_1 E\xi_i$; при всех остальных значениях k $f = 0$.

Итак, определение неизвестных напряжений τ_{ij}^* свелось к решению плоских гармонических и бигармонических задач. Первые определяются условиями (3.9) в области S и (3.11) на контуре L, вторые — соответственно, условиями (3.10) и (3.12).

Разрешимость гармонических задач обеспечивается постоянными

$$a^{(k_i)} = k_2 J_{11} \iint \sigma_{33}^{(k_i)} d\xi d\eta,$$

причем, при наибольшем значении k $a^{(k_i)} = \omega^{(k_i)} = U_{3i}^{(k_i)} = U_{3i}^{(k_i)} = 0$.

Во всех формулах двойной интеграл берется по площади. Обеспечена также разрешимость бигармонической задачи. Как показывают вычисления $\dfrac{\partial\Phi^{(k)}}{\partial\xi}$, $\dfrac{\partial\Phi^{(k)}}{\partial\eta}$ и сама функция $\Phi^{(k)}$ будут однозначны при обходе контура L, если при наибольшем значении k, то есть при $k = n - 2$ принять

$$p_1^{(k)} = J_{11}J_{22}^{-1}, \quad p_2^{(k)} = 0$$

а при всех остальных значениях k

$$p_i^{(k)} = -k_2 J_{jj}^{-1}\iint \xi_i \sigma_{33}^{(k_i)} d\xi d\eta; \quad i = 1, 2, \quad j = 1 + i$$

Постоянная $c^{(k)}$ при всех значениях k определяется формулой

$$c^{(k)} = D^{-1}\iint\left[\eta\left(\frac{\partial\Psi_{13}}{\partial\xi} - L_1\omega^{(k_i)}\right) - \xi\left(\frac{\partial\Psi_{23}}{\partial\eta} - L_2\omega^{(k_i)}\right)\right] d\xi d\eta$$

где

$$J_{11} = ES, \quad J_{22} = E\iint \xi^2 d\xi d\eta, \quad J_{33} = E\iint \eta^2 d\xi d\eta$$

$$D = \iint\{A_{44}\xi(\varphi_\eta' + \xi) - A_{55}\eta(\varphi_\xi' - \eta) + A_{56}(\xi\varphi_\xi' - \eta\varphi_\eta' - 2\xi\eta)\}\, d\xi d\eta$$

Наконец, как следует из вычислений, усилия на основании $z=l$ приводятся к заданной силе N при

$$\alpha^*=J_{11}^{-1}\iint\sigma_{33}^{(0)}d\xi d\eta,\qquad \beta_1^*=J_{22}^{-1}\iint\xi\sigma_{33}^{(0)}d\xi d\eta,\qquad \beta_2^*=J_{33}^{-1}\iint\eta\sigma_{33}^{(0)}d\xi d\eta$$

n четном и $\alpha^*=\beta_1^*=\beta_2^*=0$ при n нечетном.

Чтобы получить полную систему напряжений в пространстве ξ, η, ζ, следует напряжения τ_{ij}' по формулам (3.7) подставить в формулы (3.2).

4. *Частные случаи.* а) Рассмотрим некоторые частные случаи. Положим, что ось бруса — плоская кривая второго порядка ($n=2$). Тогда, подставляя в формулу (3.8) $k=0$ (так как n — четное число) получаем, что наибольшее значение $t=0$ (это и единственное его значение). Поэтому получим $k=0$, $k_1=1$, то есть задача сводится к одной бигармонической функции $\Phi^{(0)}=\Phi^*$, поскольку в соответствии с вышеизложенным $\omega^{(1)}=0$. В этом случае напряжения τ_{ij}' представляются так:

$$\tau_{11}'=E\xi+T_{11}^{(0)},\quad \tau_{22}'=T_{22}^{(0)},\quad \tau_{12}'=T_{12}^{(0)}$$

$$\tau_{33}'=\frac{1}{2}E\zeta^2p_1^{(0)}\xi+\sigma_{33}^{(0)}-E(\alpha^*+\beta_1^*\xi+\beta_2^*\eta)$$

$$\tau_{3i}'=-\zeta[(2-i)E+H_i]+\zeta\frac{\partial\Psi_{ii}^{(0)}}{\partial\xi_i},\qquad p_1^{(0)}=J_{11}\cdot J_{22}^{-1},\quad i=1,\ 2$$

$\sigma_{33}^{(0)}$, $\Psi_{ij}^{(0)}$, $T_{ij}^{(0)}$ получим, если в соответствующие формулы подставим $a^{(1)}=U^{(2)}=\omega^{(1)}=0$. Используя (3.10) и (3.12), легко получим условия определения бигармонической функции Φ^* и значение постоянной $c^{(0)}$.

б) Допустим ось бруса — плоская кривая третьего порядка ($n=3$). Так как n — число нечетное, то из соотношения (3.8) при $k=-1$ получим наибольшее значение $t=1$. Поэтому, в соответствии с вышеизложенным, принимаем $t=0,1$; тогда $k=1$, а $k_1=0.2$. Имея ввиду, что $\omega^{(2)}=a^{(2)}=0$, в этом случае решение приводится к двум неизвестным функциям — бигармонической $\Phi^{(1)}$ и гармонической $\omega^{(0)}$. Однако, как следует из определения условий $\Phi^{(1)}$, имеет место $\Phi^{(1)}=\Phi^*$. Поэтому новой функцией будет только одна $\omega^{(0)}=\omega^*$.

в) Рассмотрим случай, когда $n=4$. Проведя вычисления, подобные предыдущим случаям, получим, что $k=0.2$, а $k_1=3.1$. Однако $\omega^{(3)}=a^{(3)}=0$ и задача приводится к $\Phi^{(2)}$, $\Phi^{(0)}$ и $\omega^{(1)}$. Так как $\Phi^{(2)}=\Phi^*$, а $\omega^{(1)}=2\omega^*$, новой функцией оказывается бигармоническая функция $\Phi^{(0)}=\Phi^{**}$.

г) Наконец, при $n=5$ задача приводится к определению функций $\Phi^{(3)}=\Phi^*$, $\Phi^{(1)}=3\Phi^{**}$, $\omega^{(2)}=6\omega^*$ и новой гармонической функции.

5. *Заключение.* Решение задачи растяжения слегка изогнутого бруса, когда ось бруса — плоская кривая n-го порядка, свелось к граничным пло-

ским задачам — определению бигармонических и гармонических функций, общее число которых $n-1$. При этом, как видно из рассмотренных частных случаев, повышение порядка уравнения оси бруса на единицу, влечет появление в решении новой функции — бигармонической или гармонической.

Всесоюзный заочный институт
текстильной и легкой
промышленности

Поступила 22 I 1980

Ռ. Ս. ՄԻՆԱՍՅԱՆ, Գ. Ա. ՊՈՂՈՍՅԱՆ

ԹԵԹԵՎԱԿԻ ԾՌՎԱԾ ՀԱՄԱՍԵՌ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ՁՈՂԻ ՁԳՈՒՄԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ուսումնասիրվում է համասեռ անիզոտրոպ ձողի լարված վիճակը, երբ ձողի առանցքը ցանկացած կարգի հարթ կոր է։

Սեն-Վենանի կիսադարձային եղանակի օգտագործմամբ խնդրի լուծումը բերվել է բիհարմոնիկ և հարմոնիկ ֆունկցիաների որոշմանը։ Ցույց է տրվում ստացված եզրային խնդիրների լուծելիությունը։

ON TENSION OF A HOMOGENEOUS ANISOTROPIC SLIGHTLY BENT BEAM

R. S. MINASIAN, G. A. POGOSIAN

S u m m a r y

The solution to a problem for the tension (compression) of a homogeneous anisotropic beam is obtained by Sen-Venan's method where the beam's axis is a plane curve of an arbitrary order.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Риз П. М.* Деформация стержня со слабо изогнутой осью. ДАН СССР, т. XXIV, 1939, вып. 2.
2. *Рухадзе А. К.* К задаче деформаций стержня со слабо изогнутой осью. Сообщения АН Грузинской ССР, 1941, т. 8, № 5.
3. *Минасян Р. С.* Изгиб силой однородного бруса постоянного сечения со слабо изогнутой осью. ДАН Азерб.ССР, 1960, т. XXVI, № 3.
4. *Минасян Р. С.* К вопросу изгиба парой сил составного стержня со слабо изогнутой осью. ДАН Азерб.ССР, 1960, т. XXVI, № 4.
5. *Минасян Р. С.* К вопросу изгиба поперечной силой составного стержня со слабо изогнутой осью. ДАН Азерб.ССР, 1961, т. XXVII, № 4.
6. *Хатиашвили Г. М.* Задачи Сен-Венана для составных анизотропных тел, близких к призматическим. Труды Вычислительного центра АН Груз.ССР, 1963, т. IV.
7. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М., Наука, 1977.