ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIII, № 5, 1980 Механика

С. М. МХИТАРЯН, Л. А. ШЕКЯН

О ВДАВЛИВАНИИ НЕЛИНЕЙНО ВЯЗКОУПРУГОГО ТЕЛА В ТОНКУЮ ПОЛОСУ, ЛЕЖАЩУЮ НА ДЕФОРМИРУЕМОМ ОСНОВАНИИ

Работа посвящена решению плоской контактной задачи нелинейной теории установившейся ползучести о давлении деформируемого твердого тела, следующего степенному закону связи между напряжениями и скоростями деформации, на бесконечную, тонкую полосу, свободно лежащую на основании типа Фусса—Винклера. Для тонкой полосы принимается модель обычной балки, изгибаемой на линейно деформируемом основании указанного типа и также следующей степенному закону.

Плоская контактная задача нелинейной теории ползучести впервые была поставлена и решена Н. Х. Арутюняном и М. М. Манукяном [1, 2]. В работе [3] рассмотрена плоская контактная задача о давлении нелинейно деформируемого тела на свободно опертую упругую балку.

В настоящей работе при помощи выражений вертикальных перемещений такого нелинейного тела [2] и обычного уравнения изгиба балки поставленная задача формулируется в виде системы трех нелинейных интегральных и дифференциальных уравнений. В эти уравнения входят контактные давления, возникающие между телом и балкой, а также прогиб и изгибающий момент балки. Когда для балки связь между напряжениями и скоростями деформаций линейна, решение задачи приводится к решению одного нелинейного интегрального уравнения и оно решается на основе аппарата ортогональных многочленов Гегенбауэра и принципа сжатых отображений. Для этого случая приводятся приближенные аналитические выражения контактных давлений, меры опускания тела и величины контактной зоны.

Используя эти результаты, в рамках теории удара Герца рассмотрена задача о центральном ударе нелинейно деформируемого тела по ледяной пластинке, лежащей на упругом основании. Определены основные механические характеристики теории удара Герца.

Приведены численные результаты.

§ 1. *Постановка задачи и вывод разрешающих уравнений*

Пусть тело с гладкой поверхностью под действием внешних сил вдавливается в бесконечную балку, лежащую на упругом основании (фиг. 1). Как уже говорилось, для этого тела и балки принимается теория установившейся ползучести при степенном законе связи между интенсивностью скорости деформаций ε_0 и интенсивностью напряжений σ_0:

$$\varepsilon_0 = A_i \sigma_0^{m_i}, \quad (i = 1, 2) \tag{1.1}$$

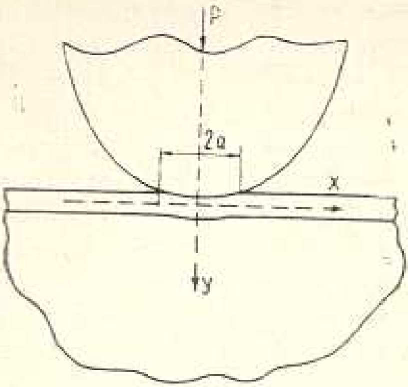
где A_1, m_1 и A_2, m_2 — физические константы материала тела и балки соответственно, притом $A_i > 0$, $1 \leqslant m_i < 2$,

$$\varepsilon_0 = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \cdots + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \cdots)}$$

$$\sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \cdots + 6(\tau_{xy}^2 + \cdots)}$$

Реологическое уравнение (1.1) имеет место для многих материалов, например, для льда [4], металлов [5] и др.

Если пренебречь трением между телом и балкой, вертикальные перемещения граничных точек тела $v_1(x)$ от нормальных контактных напряжений $p(x)$ для больших значений времени t в первом приближении выражаются формулой [2]



Фиг. 1.

$$v_1(x) = \theta\left|\int_{-a}^{a}\frac{p(s)\,ds}{|x-s|^{1-\mu}}\right|^{m-1} \times$$

$$\times \int_{-a}^{a}\frac{p(s)\,ds}{|x-s|^{1-\mu}}, \qquad (m = m_1) \tag{1.2}$$

где $\mu = 1/m$, a — полудлина участка контакта,

$$\theta = A_1 t\,\frac{\sqrt{2\mu - 1}}{(m-1)}\left\{4\int_0^{\pi/2}\left[\cos\left(\alpha m\sqrt{2\mu - 1}\right)\right]^{\mu}\cos\alpha\, d\alpha\right\}^{-m}\sin\frac{\pi\sqrt{2\mu-1}}{2\mu} \tag{1.3}$$

Теперь рассмотрим бесконечную балку, лежащую на сплошном упругом основании, под действием нормальных давлений $p(x)$. Относительно упругого основания примем известную гипотезу Фусса—Винклера, согласно которой реакция основания на балку в каждой точке пропорциональна осадке балки $v_2(x)$. Тогда уравнение равновесия даст ($p(x) = 0$ при $|x| > a$)

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = -p(x) + kv_2(x), \quad (|x| < \infty) \tag{1.4}$$

где k — коэффициент постели упругого основания, $M(x)$ — изгибающий момент в сечении балки. Далее, принимая гипотезу плоских сечений и имея в виду большие значения времени, дифференциальное уравнение изогнутой оси балки можно записать в следующем виде [5]:

$$\frac{d^2v_2(x)}{dx^2} = -\beta\,|M(x)|^{m_2 - 1}M(x) \quad (|x| < \infty) \tag{1.5}$$

где

$$
\beta = A_2 t \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{m_2+1} \left[\iint_F |y|^{m_2+1} dF \right]^{-1} \tag{1.6}
$$

F — площадь поперечного сечения балки.

Уравнения (1.4) и (1.5) вместе с известным условием контакта двух тел [6]

$$
v_1(x) + v_2(x) = \delta - f(x), \quad |x| \leqslant a \tag{1.7}
$$

составляют полную систему нелинейных определяющих уравнений. Здесь δ — мера опускания тела, $f(x)$ — форма основания тела, которая далее будет аппроксимирована параболой второго порядка — $f(x) = cx^2$. Исследование этой системы в общем случае связано с большими трудностями. Поэтому здесь ограничимся пока обсуждением частного случая, когда $m_2 = 1$, то есть рассмотрим случай линейно-ползучей балки.

Тогда из (1.4) и (1.5) получим

$$
v_2(x) = \beta l^3 \int_{-a}^{a} G\left(\frac{x-s}{l} \right) p(s)\, ds, \quad |x| < \infty \tag{1.8}
$$

где

$$
G(z) = \frac{1}{8} e^{-|z|} (\cos z + \sin|z|), \qquad l = \sqrt[4]{\frac{4}{\beta k}} \tag{1.9}
$$

Теперь, на основе соотношений (1.2), (1.7) и (1.8) окончательно получим следующее разрешающее нелинейное интегральное уравнение:

$$
\theta \left| \int_{-a}^{a} \frac{p(s)\, ds}{|x-s|^{1-\mu}} \right|^{m-1} \int_{-a}^{a} \frac{p(s)\, ds}{|x-s|^{1-\mu}} + \beta l^3 \int_{-a}^{a} G\left(\frac{x-s}{l} \right) p(s) ds = \delta - cx^2 \tag{1.10}
$$

$$
(|x| \leqslant a)
$$

Отметим, что точно такое же интегральное уравнение получается, если в (1.1) под ε_π подразумевать попросту интенсивность деформаций. Следовательно, поставленную задачу можно трактовать также в рамках нелинейной теории упругости или деформационной теории пластичности при степенном упрочнении [5].

Решение уравнения (1.10) должно удовлетворять условию непрерывности напряжений в концах контактной зоны

$$
p(-a) = p(a) = 0 \tag{1.11}
$$

а также условию равновесия тела

$$
\int_{-a}^{a} p(x)\, dx = P \tag{1.12}
$$

где P — равнодействующая внешних сил.

Введем безразмерные величины

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad a_0 = \frac{a}{l}, \quad \delta_0 = \frac{\delta}{ca^2} \tag{1.13}$$

$$p_0(\xi) = \left(\frac{\theta}{ca}\right)^{\mu} p(x), \quad \lambda = \beta l^{\beta}(cl)^{\mu-1}\theta^{-\mu}$$

Тогда уравнение (1.10) принимает вид

$$\left|\int_{-1}^{1} \frac{p_0(\eta)\,d\eta}{|\xi-\eta|^{1-\mu}}\right|^{m-1} \int_{-1}^{1} \frac{p_0(\eta)\,d\eta}{|\xi-\eta|^{1-\mu}} + \frac{\lambda}{a_0^{1-\mu}} \int_{-1}^{1} G(|\xi-\eta|\,a_0)\,p_0(\eta)\,d\eta = \delta_0 - \xi^2 \tag{1.14}$$

а условия (1.11) и (1.12) — соответственно вид

$$p_0(-1) = p_0(1) = 0, \quad a_0^{1+\mu}\int_{-1}^{1} p_0(\eta)\,d\eta = \frac{P}{l}\left(\frac{\theta}{cl}\right)^{\mu} \tag{1.15}$$

Таким образом, решение задачи сводится к определению $p_0(\xi)$, δ_0 и a_0 из (1.14) — (1.15). После того, как будут известны эти величины, на основе (1.13) и (1.8) непосредственно определим a, δ, $p(x)$ и $v_2(x)$.

§ 2. *Сведение разрешающего нелинейного интегрального уравнения (1.14) к бесконечной системе нелинейных алгебраических уравнений и ее исследование*

Сначала построим решение интегрального уравнения (1.14) при $\lambda=0$, то есть когда пластинка абсолютно жесткая. С этой целью предварительно рассмотрим интегральное уравнение

$$\left|\int_{-1}^{1} \frac{q(\eta)\,d\eta}{|\xi-\eta|^{1-\mu}}\right|^{m-1} \int_{-1}^{1} \frac{q(\eta)\,d\eta}{|\xi-\eta|^{1-\mu}} = \gamma - \xi^2, \quad (|\xi| \leqslant 1) \tag{2.1}$$

решение которого должно быть подчинено условиям

$$q(-1) = q(1) = 0 \tag{2.2}$$

Уравнение (2.1) преобразуем к эквивалентному виду

$$\int_{-1}^{1} \frac{q(\eta)\,d\eta}{|\xi-\eta|^{1-\mu}} = |\gamma-\xi^2|^{\mu-1}(\gamma-\xi^2), \quad (-1 \leqslant \xi \leqslant 1) \tag{2.3}$$

Решение уравнения (2.3), удовлетворяющее условиям (2.2), представим в виде ряда

$$q(\xi) = (1-\xi^2)^{1-\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n C_{2n}^{\nu+1}(\xi), \quad \omega = \frac{\mu}{2}, \quad \nu = \frac{1-\mu}{2} \tag{2.4}$$

где $\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$ — неизвестные коэффициенты, $C_n^{\nu}(z)$ — многочлены Гегенбауэра. Далее вычислим интеграл

$$\psi_n(\xi) = \int_{-1}^{1} |\xi - \eta|^{\mu-1} (1-\eta^2)^{1-\omega} C_n^{\nu+1}(\eta) d\eta, \quad (n = 0, 1, \ldots) \tag{2.5}$$

Учитывая известные соотношения (см. [7], стр. 220 и [8])

$$(1-\mu)\frac{d}{d\xi}[(1-\xi^2)^{1-\omega} C_n^{\nu+1}(\xi)] = -(n+1)(n+2-\mu)(1-\xi^2)^{-\omega} C_{n+1}^{\nu}(\xi)$$

$$(n = 0, 1, \ldots) \tag{2.6}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{(1-\eta^2)^{-\omega}}{|\xi-\eta|^{1-\mu}} C_n^{\nu}(\eta)\, d\eta = \frac{\pi\Gamma(n+1-\mu)}{\Gamma(1-\mu)\, n!\, \sin\pi\omega} C_n^{\nu}(\xi) \tag{2.7}$$

после некоторых преобразований интеграл (2.5) приведем к виду

$$\psi_n(\xi) = \frac{\pi\Gamma(n+3-\mu)}{\Gamma(2-\mu)\, n!\, \sin\pi\omega} \int_{\xi}^{1} C_{n+1}^{\nu}(\eta)\, d\eta +$$

$$+ \frac{\pi\mu(-1)^n \Gamma(n+1-\mu)\Gamma(n+3-\mu)}{\Gamma(1-\mu)\Gamma(2-\mu)\, n!\, (n+2)!\, \sin\pi\omega} \tag{2.8}$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

Подставив (2.4) в (2.3) и учитывая (2.5) и (2.8), а также ортогональность многочленов Гегенбауэра, получим

$$\gamma_n = 4\mu b_n \int_0^1 |\gamma - \xi^2|^{\mu-1} \xi \varphi_n(\xi)\, d\xi, \quad (n = 0, 1, \ldots) \tag{2.9}$$

где

$$b_n = \frac{\Gamma(2-\mu)(2n)!\, \sin\pi\omega}{\pi\Gamma(2n+3-\mu)\, h_{2n+1}}, \quad \varphi_n(\xi) = \frac{1}{h_{2n+1}}(1-\xi^2)^{-\omega} C_{2n+1}^{\nu}(\xi)$$

$$h_n = \left\{ 2\int_0^1 (1-\xi^2)^{-\omega} [C_n^{\nu}(\xi)]^2\, d\xi \right\}^{1/2} = \left\{ \frac{\pi 2^{\mu}\, \Gamma(n+1-\mu)}{\Gamma^2(\nu)(n+\nu)\, n!} \right\}^{1/2} \tag{2.10}$$

Таким образом, решение интегрального уравнения (2.3) при условиях (2.2) мы получим в виде (2.4), где $\gamma_n (n = 0, 1, \ldots)$ дается формулой (2.9). Но решение интегрального уравнения (2.3), удовлетворяющее условиям (2.2), существует, как обычно, только при определенном условии, накладываемом на его правую часть, то есть на значение параметра γ. Выведем это дополнительное условие, точнее уравнение, откуда может быть определена γ. С этой целью умножим обе части уравнения (2.3) на $(1-\xi^2)^{-\omega}$ и проинтегрируем в пределах $-1 \leqslant \xi \leqslant 1$. Меняя последовательность интегрирования и учитывая (2.7) при $n = 0$, (2.4), а также ортогональность многочленов Гегенбауэра, находим

$$\frac{\pi\gamma_0}{\sin\pi\omega} = \int_0^1 |\gamma - \xi^2|^{\mu-1} (\gamma - \xi^2)(1-\xi^2)^{-\omega}\, d\xi$$

Теперь, подставив сюда значение γ_0, полученное из (2.9), будем иметь

$$J(\gamma) \equiv \int_0^1 |\gamma - \xi^2|^{\mu-1}\left(\gamma - \frac{1+\mu}{1-\mu}\xi^2\right)(1-\xi^2)^{-\mu/2}\, d\xi = 0 \tag{2.11}$$

которое и представляет собой искомое уравнение для определения γ. Покажем, что уравнение $J(\gamma) = 0$ имеет единственное вещественное решение, притом оно находится в интервале $1 < \gamma < (1+\mu)/(1-\mu)$. Действительно, из (2.11) видно, что

$$J(1) = -\frac{\mu\Gamma(\mu/2)\sqrt{\pi}}{2(1-\mu)\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}\right)} < 0, \quad J\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right) > 0$$

и так как функция $J(\gamma)$ непрерывная, то по теореме Коши в указанном интервале она имеет по крайней мере один корень. Этот корень единственный, так как в этом же интервале

$$\frac{dJ(\gamma)}{d\gamma} = \mu\int_0^1 (\gamma - \xi^2)^{\mu-2}(\gamma + \xi^2)(1-\xi^2)^{-\mu/2}\, d\xi > 0$$

то есть функция $J(\gamma)$ монотонно возрастающая. Далее, очевидно, что при $-\infty < \gamma < 0$ $J(\gamma) < 0$, а при $(1+\mu)/(1-\mu) < \gamma < \infty$ $J(\gamma) > 0$ и поэтому уравнение $J(\gamma) = 0$ может иметь еще корни только в интервале $0 < \gamma < 1$. Но легко видеть, что одновременно с $J(1) < 0$ и $J(0) < 0$ и, кроме того, в этом интервале $J''(\gamma) > 0$, вследствие чего указанное уравнение при $0 < \gamma < 1$ корней не имеет.

Перейдем теперь к решению нелинейного интегрального уравнения (1.14) при условиях (1.15). Его решение представим в виде ряда

$$p_0(\xi) = (1-\xi^2)^{1-\mu/2}\sum_{n=0}^{\infty}(\gamma_n + b_n x_n)\, C_{2n}^{\mu+1}(\xi), \qquad (-1 \leqslant \xi \leqslant 1) \tag{2.12}$$

где $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ — неизвестные коэффициенты.

Дифференцируя уравнение (1.14) по ξ, получим

$$\frac{d}{d\xi}\int_{-1}^{1}\frac{p_0(\eta)\, d\eta}{|\xi - \eta|^{1-\mu}} = -\mu\left|\int_{-1}^{1}\frac{p_0(\eta)\, d\eta}{|\xi-\eta|^{1-\mu}}\right|^{1-m} \times$$

$$\times\left[2\xi + \frac{\lambda}{a_0^{1-\mu}}\int_{-1}^{1}\frac{\partial}{\partial\xi}G(|\xi - \eta|a_0)\, p_0(\eta)\, d\eta\right] \tag{2.13}$$

Далее, подставив (2.12) в (2.13) и учитывая (2.5) и (2.8), будем иметь

$$x_n = \mu \int_{-1}^{1} \left| \sum_{k=0}^{\infty} (\gamma_k + b_k x_k) \psi_{2k}(\xi) \right|^{1-m} \left[2\xi + \right.$$

$$\left. + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} (\gamma_k + b_k x_k) g_k(\xi, a_0) \right] \varphi_n(\xi)\, d\xi - \frac{\gamma_n}{b_n}, \quad (n = 0, 1, \ldots) \quad (2.14)$$

где

$$g_n(\xi, a_0) = a_0^{\mu} \int_{-1}^{1} G'(|\xi - \eta| a_0) \operatorname{sgn}(\xi - \eta) (1 - \eta^2)^{1-m} C_{2n}^{\nu+1}(\eta)\, d\eta \quad (2.15)$$

Так как $\gamma > 1$, то с учетом (2.3) — (2.5) систему (2.14) можно привести к виду

$$x_n = \int_{-1}^{1} F(\xi, X, a_0) \varphi_n(\xi)\, d\xi, \quad (n = 0, 1, \ldots) \quad (2.16)$$

где

$$F(\xi, X, a_0) = \mu \left| (\gamma - \xi^2)^{\mu} + \sum_{k=0}^{\infty} x_k b_k \psi_{2k}(\xi) \right|^{1-m} \left[2\xi + \right.$$

$$\left. + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} (\gamma_k + x_k b_k) g_k(\xi, a_0) - 2\mu\xi (\gamma - \xi^2)^{\mu-1} \right], \quad X = (x_0, x_1, \ldots) \quad (2.17)$$

(2.16) является бесконечной системой нелинейных алгебраических уравнений, откуда определяются неизвестные коэффициенты $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Покажем, что существует интервал изменения характерных параметров λ и μ, входящих в (2.17), в котором при любом $a_0 > 0$ систему (2.16) и ее укороченную конечную систему можно решить методом последовательных приближений. С этой целью, как и в [9], введем в рассмотрение $(N+1)$-мерное эвклидово вещественное пространство E_{N+1} с метрикой

$$\rho(X_N, Y_N) = \sqrt{\sum_{n=0}^{N} (x_n - y_n)^2}, \qquad X_N = (x_0, \ldots, x_N),$$

$$Y_N = (y_0, \ldots, y_N)$$

Пусть $S[O_N, R]$ — замкнутый шар в E_{N+1} с центром в точке $O_N = (0, \ldots, 0)$ и радиусом R. Пусть, далее, в $S[O_N, R]$ задан оператор $Y_N = B(X_N)$, определяемый формулами

$$y_n = \int_{-1}^{1} F(\xi, X_N, a_0) \varphi_n(\xi)\, d\xi, \quad n = 0, \ldots, N \quad (2.18)$$

где $F(\xi, X_N, a_0)$ выражается формулой (2.17), когда $x_{N+1} = x_{N+2} = \cdots = 0$.

Используя неравенство Бесселя, из (2.18) имеем

$$\sum_{n=0}^{N} y_n^2 \leqslant \int_{-1}^{1} F^2(\xi, X_N, a_0)(1-\xi^2)^{-m} d\xi \tag{2.19}$$

Далее воспользуемся неравенством Коши—Буняковского для сумм. Тогда из (2.17)

$$|F(\xi, X_N, a_0)| \leqslant \frac{2(1-\mu) R|\xi|\psi(\xi)}{[(\gamma-\xi^2)^\mu - R\psi(\xi)]^m} + \lambda[g^*(\xi) + Rg(\xi)] \tag{2.20}$$

где

$$\psi(\xi) = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 \psi_{2n}^2(\xi)}, \qquad g^*(\xi) = \max_{a_0>0} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n g_n(\xi, a_0) \right|$$

$$g(\xi) = \max_{a_0>0} \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 g_n^2(\xi, a_0)}$$

При получении (2.20) принималось, что

$$R < \min_{0\leqslant\xi\leqslant1} \{\psi^{-1}(\xi)(\gamma-\xi^2)^\mu\} \tag{2.21}$$

Из (2.19) и (2.20) следует, что если

$$\int_{-1}^{1} \left\{ \frac{2|\xi|(1-\mu)\psi(\xi)}{[(\gamma-\xi^2)^\mu - R\psi(\xi)]^m} + \lambda[g^*(\xi) R^{-1} + g(\xi)] \right\}^2 (1-\xi^2)^{-m} d\xi \leqslant 1 \tag{2.22}$$

то оператор $Y_N = B(X_N)$ отображает замкнутый шар $S[0_N, R]$ в себя. Пусть, теперь $X_N^{(i)}$ $(i=1, 2)$ — два произвольных элемента из $S[0_N, R]$ и $Y_N^{(i)} = B(X_N^{(i)})$. Тогда из (2.18) будем иметь

$$\sum_{n=0}^{N} (y_N^{(1)} - y_N^{(2)})^2 \leqslant \int_{-1}^{1} [F(\xi, X_N^{(1)}, a_0) - F(\xi, X_N^{(2)}, a_0)]^2 (1-\xi^2)^{-m} d\xi \tag{2.23}$$

При помощи неравенства Коши—Буняковского для сумм из (2.17) получим

$$|F(\xi, X_N^{(1)}, a_0) - F(\xi, X_N^{(2)}, a_0)| \leqslant \left\{ (1-\mu) \frac{2|\xi| + \lambda g^*(\xi) + \lambda Rg(\xi)}{[(\gamma-\xi^2)^\mu - R\psi(\xi)]^m} + \right.$$

$$\left. + \lambda\mu[(\gamma-\xi^2)^\mu - R\psi(\xi)]^{1-m} g(\xi) \right\} \rho(X_N^{(1)}, X_N^{(2)}) \tag{2.24}$$

С учетом же (2.23) и (2.24) находим, что если

$$\int_{-1}^{1}\left\{\frac{2|\xi|+\lambda g^*(\xi)+\lambda R g(\xi)}{[(\gamma-\xi^2)^{\mu}-R\psi(\xi)]^m}(1-\mu)+\right.$$

$$\left.+\lambda\mu[(\gamma-\xi^2)^{\mu}-R\psi(\xi)]^{1-m}g(\xi)\right\}^2(1-\xi^2)^{-m}d\xi<1 \qquad (2.25)$$

то оператор $Y_N=B(X_N)$ в замкнутом шаре $S[O_N, R]$ сжимающий. Отметим, что если R выбрать таким образом, чтобы условие (2.21) выполнялось, то условия (2.22) и (2.25) будут выполнены при малых λ и при μ, близких к 1. Тогда на основе принципа сжатых отображений [10] существует единственное решение системы уравнений $X_N=B(X_N)$ и это решение можно найти методом последовательных приближений, исходя от любого начального значения $X_N^0=(x_0^0, x_1^0, \ldots, x_N^0)$ из $S[O_N, R]$.

Совершенно аналогичным способом можно показать, что при выполнении условий (2.21), (2.22) и (2.25) бесконечная система (2.16) также имеет единственное решение, которое можно построить методом последовательных приближений, исходя из произвольной точки $X^0=(x_0^0, x_1^0, \ldots)$, для которой $(x_0^0)^2+(x_1^0)^2+\ldots\leqslant R^2$. Кроме того, при помощи теоремы А. Лебега о предельном переходе под знаком интеграла [11] можно доказать, что решение укороченной системы $X_N=B(X_N)$ при $N\to\infty$ совпадает с решением бесконечной системы (2.16).

Отметим, что решение системы (2.16), в частности, коэффициент x_0 зависит от неизвестного параметра a_0.
Для определения a_0 имеем уравнение

$$a_0(\gamma_0+b_0x_0)^{\varepsilon}=P_0^{\varepsilon} \qquad (2.26)$$

где

$$\varepsilon=\frac{1}{1+\mu}, \qquad P_0=\frac{\Gamma(2+\mu)}{\Gamma(2-m)\sqrt{\pi}}\left(\frac{\theta}{lc}\right)^{\mu}P \qquad (2.27)$$

которое получается при подстановке (2.12) в (1.15).

Далее, считая, что a_0 и $p_0(\xi)$ уже известны и подставив в (1.14) $\xi=1$, для δ_0 получим выражение

$$\delta_0=1+\left[\int_{-1}^{1}(1-\eta)^{\mu-1}p_0(\eta)\,d\eta\right]^m+\frac{\lambda}{a_0^{1-\mu}}\int_{-1}^{1}G(a_0-a_0\eta)\,p_0(\eta)\,d\eta \qquad (2.28)$$

В случае $\lambda=0$ из (2.28) непосредственно получим $\delta_0=\gamma$. Пусть параметры R, μ и λ таковы, что условия (2.21), (2.22) и (2.25) выполнены. Тогда в нулевом приближении, когда $x_0^0=x_1^0=\ldots=0$, будем иметь

$$a_0=P_0^{\varepsilon}\gamma_0^{-\varepsilon}, \quad p_0(\xi)=q(\xi) \qquad (2.29)$$

$$\delta_0 = \gamma + \lambda a_0^{\mu-1} \int_{-1}^{1} G(a_0 - a_0 \eta)\, q(\eta)\, d\eta \tag{2.29}$$

где γ определяется из (2.11), а $q(\xi)$ и γ_0 — с помощью (2.4) и (2.9).

Решение системы (2.16) в первом приближении имеет вид

$$x_n = \lambda \mu \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \int_{-1}^{1} (\gamma - \xi^2)^{\mu-1} g_k(\xi, a_0)\, \varphi_n(\xi)\, d\xi, \quad (n = 0, 1, \ldots) \tag{2.30}$$

Для определения a_0 в первом приближении получим уравнение

$$a_0 = P_0^{\varepsilon} \left\{ \gamma_0 + \lambda \mu b_0 \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \int_{-1}^{1} (\gamma - \xi^2)^{\mu-1} g_k(\xi, a_0)\, \varphi_0(\xi)\, d\xi \right\}^{-\varepsilon} \tag{2.31}$$

а для $p_0(\xi)$ — формулу

$$p_0(\xi) = (1 - \xi^2)^{1-\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \gamma_n + \lambda \mu b_n \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \int_{-1}^{1} (\gamma - \right.$$

$$\left. - \eta^2)^{\mu-1} g_k(\eta, a_0)\, \varphi_n(\eta)\, d\eta \right\} C_{2n}^{\nu+1}(\xi), \qquad -1 \leqslant \xi \leqslant 1 \tag{2.32}$$

Для достаточно малых значений P_0, на основе формул (2.26) и (2.28), (2.30) и (1.13), можно получить приближенные выражения

$$a = l P_0^{\mu} [\gamma_0^{-\varepsilon} + \lambda_1 P_0^{\mu\varepsilon} + O(P_0^{2\mu\varepsilon})] \tag{2.33}$$

$$\delta = c l^2 P_0 [\lambda_2 + \gamma_0^{-2\xi} \gamma P_0^{\varkappa} - \lambda_1 \lambda_2 (1 + \mu) \gamma_0^{\varepsilon} P_0^{\mu\varepsilon} + O(P_0^{\delta})] \tag{2.34}$$

где

$$\lambda_1 = \frac{3}{2} \lambda \mu b_0 \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \operatorname{sgn}(\xi - \eta)\, (\gamma - \xi^2)^{1-\omega}\, \varphi_0(\xi)\, C_{2k}^{\nu+1}(\eta)\, d\xi\, d\eta$$

$$\lambda_2 = \lambda \gamma_0^{1+\nu} \frac{9\Gamma(2 - \omega) \sqrt{3\pi}}{32\, \Gamma(2 + \nu)}, \quad \varkappa = \frac{1 - \mu}{1 + \mu}$$

§ 3. *Задача о центральном ударе нелинейно-деформируемого тела по ледяной пластинке, лежащей на упругом основании*

В этой задаче, основанной на теории удара Герца [12], могут быть применены результаты предыдущего параграфа, так как при ударе деформации льда можно считать линейно упругими.

Уравнение движения тела и начальные условия имеют соответственно вид

$$M\frac{d^2\delta}{dt^2} = -P, \quad \delta\big|_{t=0} = 0, \qquad \frac{d\delta}{dt}\bigg|_{t=0} = V \tag{3.1}$$

где M — масса тела, δ — мера опускания тела, t — время, P — равнодействующая контактных давлений, V — скорость приближения тела к пластинке в момент соударения.

Для интегрирования дифференциального уравнения (3.1) в качестве зависимости между δ и P принимается зависимость, выражаемая формулами (2.34) и (2.27). Тогда способом, вполне аналогичном изложенному в работе [13], основные механические характеристики теории удара Герца будут даваться формулами:

$$\delta_{\max} = V_1\left[1 + \frac{B}{2+\varkappa}V_1^{\varkappa} + O(V_1^{2\varkappa})\right]$$

$$P_{\max} = AV_1\left[1 - \frac{2B}{3+\mu}V_1^{\varkappa} + O(V_1^{2\varkappa})\right]$$

$$a_{\max} = \frac{lV_1^{\varkappa}}{(Mcl^2\lambda_2)^{\varkappa}}\left[\gamma_0 - \left(\frac{\lambda_1 V_1}{Mcl^2\lambda_2}\right)^{\mu\varkappa} - \frac{2B\varepsilon}{3+\mu}\gamma_1 V_1^{\varkappa} + O(V_1^{2\mu\varkappa})\right]$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{A}}\left[\pi + \frac{2B}{2+\varkappa}\int_0^1\frac{(1-x^{2+\varkappa})\,dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\,V_1^{\varkappa} + O(V_1^{2\varkappa})\right]$$

где T — продолжительность удара,

$$V_1 = \frac{V}{\sqrt{A}}, \qquad A = \frac{\Gamma(2-\omega)\sqrt{\pi}}{M\Gamma(2+\nu)\,cl^2\lambda_2}\left(\frac{cl}{\delta}\right)^{\mu}, \qquad B = \frac{\gamma_0^{-2}\gamma_1}{\lambda_2(cl^2\lambda_2)^{\varkappa}}$$

§ 4. *Численный пример*

Для некоторых конкретных значений характерных параметров μ, λ и P_0 на ЭВМ ЕС-1022 проведен численный анализ полученных результатов.

Решено трансцендентное уравнение (2.11) и результаты приведены в табл. 1.

Таблица 1

μ	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5
γ	9.07422	4.14941	2.55957	1.80664	1.39453

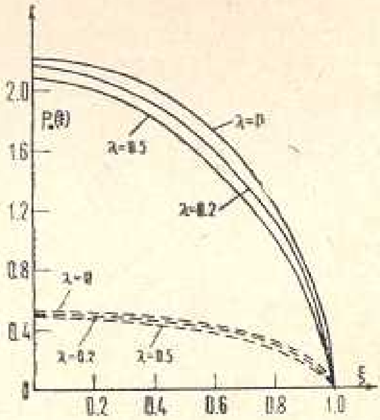
Таблица 2

μ \ n	0	1	2	3	4
0.9	2.23478	−0.00232	−0.00905	−0.00468	−0.001674
0.7	0.52597	0.01234	0.00021	−0.00048	−0.00039

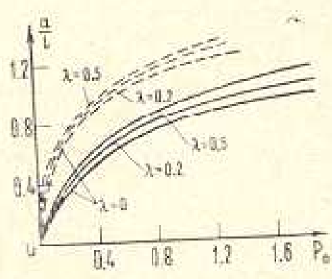
В табл. 2 приведены значения коэффициентов $\{\gamma_n\}_{n=0}^{4}$, определяемые формулами (2.9).

Когда $\mu = 0.9$; 0.7 и $\lambda = 0$; 0.2; 0.5, притом пары $(0.9;\ 0)$, $(0.7;\ 0)$ и $(0.9;\ 0.2)$ заведомо входят в (2.22) и (2.25), получены численные значения безразмерных контактных давлений, зоны контакта и меры опускания тела для некоторых значений P_0.

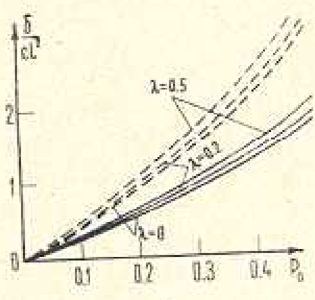
Вычисления показывают, что для указанных значений параметров μ и λ в интервале $0.1 < P_0 < 0.5$ изменение $p_0(\xi)$ в зависимости от P_0 незначительно. На фиг. 2 приведены графики четной функции $p_0(\xi)$, когда $P_0 = 0.5$. Из этих графиков видно, что с уменьшением μ функция $p_0(\xi)$ значительно уменьшается, заметно также, что при постоянном μ с увеличением λ функция $p_0(\xi)$ незначительно уменьшается.



Фиг. 2.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

На фиг. 3 и 4 приведены графики безразмерной зоны контакта a/l и меры опускания тела δ/cl^2 соответственно как функции параметра P_0. Из этих графиков явствует, что с увеличением параметра λ, или с уменьшением μ, величина контактной зоны и мера опускания тела увеличиваются.

На этих фигурах сплошные линии соответствуют случаю $\mu = 0.9$, а пунктирные — случаю $\mu = 0.7$.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 11 II 1980

Ս. Մ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ, Լ. Ա. ՇԵԿՅԱՆ

ԴԵՖՈՐՄԱՑՎՈՂ ՀԻՄՔԻՆ ԴՐՎԱԾ ԲԱՐԱԿ ՇԵՐՏԻՆ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԱՌԱՁԳԱՄԱԾՈՒՑԻԿ ՄԱՐՄՆԻ ՍԵՂՄՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկված է Ֆուսսա-Վինկլերի տիպի հիմքին ազատ դրված բարակ անվերջ շերտին մարմնի ճնշման մասին հարթ կոնտակտային խնդիրը: Մարմնի և շերտի համար որպես ֆիզիկական հիպոթեզ, ընդունված է կայունացված սողքի տեսությունը դեֆորմացիաների արագությունների և լարումների ինտենսիվությունների միջև աստիճանային կապով:

Խնդիրը առաջին մոտավորությամբ բերվում է ոչ գծային ինտեգրալ հավասարման լուծման: Այդ հավասարումը լուծվում է Գեգենբաուէրի օրթոգոնալ բազմանդամների ապարատի և սեղմող արտապատկերումների սկզբունքի հիման վրա:

Հարվածի Հերցի տեսության շրջանակներում դիտարկված է նաև հարվածի համապատասխան խնդիրը:

Բերված են թվային օրինակներ:

THE PRESSURE OF A NON-LINEAR VISCO-ELASTIC BODY ON A THIN STRIP ON A DEFORMABLE BASE

S. M. MKHITARIAN, L. A. SHEKIAN

Summary

The plane contact problem for pressure of a body on a thin infinite strip free on a base of Fussa-Vinkler's type is considered. The theory of steady creep is assumed as a physical hypothesis for the body and the strip under the power law of relation between the intensity of stress and velocity of strain.

The first approximation of the problem is reduced to the solution of a non-linear integral equation. This equation is solved by the set of Gegenbauer's ortogonal polynomials and by the principle of compressed transformations.

A particular impact problem is examined as well in terms of the Hertz impact theory.

Some numerical examples are presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Плоская контактная задача теории ползучести. ПММ, 1959, т. 23, вып. 5.
2. *Арутюнян Н. Х., Манукян М. М.* Контактная задача теории ползучести с учетом сил трения. ПММ, 1963, т. 27, № 5.
3. *Шекян Л. А.* К контактной задаче об ударе тела цо свободно опертой упругой балке. Докл. АН Армянской ССР, 1978, т. 67, № 2.

4. *Glen J. W.* The creep of polycrystalline ice. Proceedings of the Royal society of London, Series A. 1955. Vol. 228, No. 1175, pp. 519—538.

5. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966.

6. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. М.—Л., Гостехиздат, 1949.

7. *Magnus W., Oberhettinger F., Soni R. P.* Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics. Third Editions, Springer—Verlag Berlin, Heidelberg, New-York, 1966.

8. *Попов Г. Я.* Некоторые свойства классических многочленов и их применение к контактным задачам. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.

9. *Мхитарян С. М., Шекян Л. А.* Плоская контактная задача для двух шероховатых твердых тел, изготовленных из степенно упрочняющихся материалов. Изв. АН Армянской ССР, «Механика», 1977, т. 30, № 3.

10. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., «Наука», 1972.

11. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. М., «Наука», 1974.

12. *Кильчевский Н. А.* Теория соударения твердых тел. Киев, Изд. «Наукова думка», 1969.

13. *Шекян Л. А.* О соударении двух твердых тел, изготовленных из степенно упрочняющихся материалов. Докл. АН Армянской ССР, 1974, т. 59, № 4.