ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXIII, № 4, 1980 Механика

В. В. ДОРОГИНИН

О ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ БЕСКОНЕЧНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИ ОРТОТРОПНОЙ ТРУБЫ

1. Рассмотрим равновесие упругой однородной цилиндрически ортотропной трубы, нагруженной заданными поверхностными усилиями. Пусть ось анизотропии совпадает с геометрической осью цилиндра. Для упрощения выкладок предположим, что массовые силы отсутствуют, а поверхностная нагрузка симметрична относительно некоторой плоскости, проходящей через ось трубы и, следовательно, представима неполными рядами Фурье по углу θ

$$\sigma_{r\theta} = \sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty} \sigma_{r\theta k}^{(b)} \sin k\theta, \qquad \sigma_r = \sum_{k=0,2,4,\ldots}^{\infty} \sigma_{rk}^{(b)} \cos k\theta \quad \text{при } r = b$$

$$\sigma_{r\theta} = \sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty} \sigma_{r\theta k}^{(a)} \sin k\theta, \qquad \sigma_r = \sum_{k=0,2,4,\ldots}^{\infty} \sigma_{rk}^{(a)} \cos k\theta \quad \text{при } r = a$$

Через a, b обозначены соответственно внутренний и внешний радиусы трубы.

Система уравнений линейной теории упругости в случае плоской деформации приводится к одному уравнению для функции напряжений F [1]

$$\beta_{22} F_{,rrrr}^{(IV)} + \frac{2\beta_{12}+\beta_{66}}{r^2} F_{,rr\theta\theta}^{(IV)} + \frac{\beta_{11}}{r^4} F_{,\theta\theta\theta\theta}^{(IV)} + \frac{2\beta_{12}}{r} F_{,rrr}''' -$$

$$- \frac{\beta_{66}+2\beta_{12}}{r^3} F_{,r\theta\theta}''' - \frac{\beta_{11}}{r^2} F_{,rr}'' + \frac{2\beta_{11}+2\beta_{12}+\beta_{66}}{r^4} F_{,\theta\theta}'' + \frac{\beta_{11}}{r^3} F_{,r}' = 0 \quad (1.1)$$

где β_{ij} — приведенные упругие постоянные. Напряжения выражаются через функцию F по формулам

$$\sigma_r = \frac{1}{r} F_{,r}' + \frac{1}{r^2} F_{,\theta\theta}''; \qquad \sigma_\theta = F_{,rr}''; \qquad \sigma_{r\theta} = -\left(\frac{F}{r}\right)_{,r}' \quad (1.2)$$

Деформации связаны с напряжениями обобщенным законом Гука

$$\varepsilon_r = \beta_{11}\sigma_r + \beta_{12}\sigma_\theta, \quad \varepsilon_\theta = \beta_{12}\sigma_r + \beta_{22}\sigma_\theta, \quad \gamma_{r\theta} = \beta_{66}\sigma_{r\theta}$$

Ищем решение уравнения (1.1) в виде

$$F = \sum_{k=0,2,4,\ldots}^{\infty} f_k(r) \cos k\theta$$

Получаем для $f_k(r)$ уравнение Эйлера 4-го порядка. Его решение

$$f_k(r)=\sum_{i=1}^{4} c_{ki} r^{\alpha_{ki}}$$

где α_{ki} — корни характеристического уравнения. Предполагаем для определенности, что кратных или комплексных корней нет.

$$\alpha_{k1,2}=1\pm\sqrt{y_{k1}} \qquad \alpha_{k3,4}=1\pm\sqrt{y_{k2}}$$

$$y_{k1,2}=\frac{1+m^2+k^2\gamma}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{(1+m^2+k^2\gamma)^2-4m^2(1+k^2(k^2-2))}$$

$$m^2=\frac{\beta_{11}}{\beta_{22}}, \qquad \gamma=\frac{2\beta_{12}+\beta_{66}}{\beta_{22}}$$

Формулы (1.2) для напряжений примут вид

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \sum_{k=0,2,4,\ldots}^{\infty}\ \sum_{i=1}^{4} c_{ki}(\alpha_{ki}-k^2)\, r^{\alpha_{ki}-2}\cos k\theta \\
\sigma_\theta &= \sum_{k=0,2,4,\ldots}^{\infty}\ \sum_{i=1}^{4} c_{ki}(\alpha_{ki}-1)\,\alpha_{ki} r^{\alpha_{ki}-2}\cos k\theta \qquad (1.3)\\
\sigma_{r\theta} &= \sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty}\ \sum_{i=1}^{4} c_{ki}(\alpha_{ki}-1)\, k r^{\alpha_{ki}-2}\sin k\theta
\end{aligned}$$

Произвольные постоянные c_{ki} определяем из граничных условий. Для каждого $k=2, 4, 6, \ldots$ имеем систему 4-х алгебраических линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^{4} c_{ki}\, d_{ij}^{(k)}=s_{kj}, \quad j=1, 2, 3, 4 \qquad (1.4)$$

где

$$d_{i1}^{(k)}=b^{\alpha_{ik}-2}(\alpha_{ik}-k^2), \qquad d_{i3}^{(k)}=a^{\alpha_{ik}-2}(\alpha_{ik}-k^2)$$

$$d_{i2}^{(k)}=b^{\alpha_{ik}-2}(\alpha_{ik}-1), \qquad d_{i4}^{(k)}=a^{\alpha_{ik}-2}(\alpha_{ik}-1)$$

$$s_{k1}=\sigma_{rk}^{(b)}, \quad s_{k2}=\sigma_{r\theta k}^{(b)}, \quad s_{k3}=\sigma_{rk}^{(a)}, \quad s_{k4}=\sigma_{r\theta k}^{(a)}$$

При $k=0$ используем известное решение задачи о плоской деформации трубы равномерными внутренним и внешним давлениями [1]

$$\sigma_r^{(0)}=\frac{1}{(1-\delta^{2m})}\left[(p\delta^{m+1}-q)\rho^{m-1}+(q\delta^{m-1}-p)\,\delta^{m+1}\rho^{-m-1}\right]$$

$$\sigma_\theta^{(0)}=\frac{1}{(1-\delta^{2m})}\left[(p\delta^{m+1}-q)\rho^{m-1}-(q\delta^{m-1}-p)\,\delta^{m+1}\rho^{-m-1}\right]$$

$$\sigma_{r\theta}^{(0)}=0, \quad p=-\sigma_{r0}^{(a)}, \quad q=-\sigma_{r0}^{(b)}, \quad \delta=\frac{a}{b}, \quad \rho=\frac{r}{b}$$

2. В качестве примера рассмотрим задачу о деформировании кольца нагрузкой

$$\sigma_r = Q\cos 2\theta, \quad \sigma_{r\theta} = 0 \quad \text{при} \quad r = b$$
$$\sigma_r = \sigma_{r\theta} = 0 \quad \text{при} \quad r = a$$

Предположим, что между приведенными упругими постоянными существует зависимость $2\beta_{12} + \beta_{66} = 2\beta_{11}$. Тогда

$$\alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_{3,4} = 1 \pm 3m, \quad m = \sqrt{\frac{\beta_{11}}{\beta_{22}}}$$

Решив систему 4-х уравнений (1.4) при $k = 2$, находим $c_{2i} \equiv c_i$,

$$c_1 = \frac{Qm\delta^{3m}}{\Delta}\{\delta^{3m}(1+3m) + \delta^{-3m}(1-3m) - 2\delta\}$$

$$c_2 = -\frac{Qm\delta^{3m}ab}{\Delta}\{2-(1+3m)\delta^{1-3m} - (1-3m)\delta^{1+3m}\}$$

$$c_3 = \frac{2Qa^{1+3m}}{3b^{6m}\Delta}[\delta^{1-3m}(1+3m) - 3m]$$

$$c_4 = -\frac{Qa^{1+3m}}{\Delta\cdot 3}[6m + \delta^{1+3m}(1-3m) - \delta^{3m-1}(1+3m)]$$

где

$$\Delta = (1-3m)^2(1-\delta^{1+3m})^2 - (1+3m)^2(\delta^{3m}-\delta)^2$$

Напряжения в кольце определяем по формулам (1.3). Например,

$$\sigma_\theta = [2c_1 + 3mc_3(1+3m)r^{3m-1} - 3mc_4(1-3m)r^{-1-3m}]\cos 2\theta$$

Заметим, что если $m = \frac{1}{3}$, то корни α_i кратные и $\Delta = 0$. Формулы для напряжений в этом случае получаются путем предельного перехода при $m \to \frac{1}{3}$.

Автор пользуется случаем выразить благодарность научному руководителю профессору Б. Е. Победре за постановку задачи и постоянное внимание к его работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступила 14 XI 1979

Վ. Վ. ԴՈՐՈԳԻՆԻՆ

ԱՆՎԵՐՋ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ԽՈՂՈՎԱԿԻ ՀԱՐԹ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՅԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ֆուրյեի շարքերի տեսքով կառուցվել է օրթոտրոպ խողովակի հարթ դեֆորմացիայի խնդրի ճշգրիտ լուծումը։ Բերվում է կոնկրետ բեռի համար հաշվարկի օրինակ։

ON PLANE STRAIN OF THE INFINITE CYLINDRICALLY ORTHOTROPIC TUBE

V. V. DOROGININ

S u m m a r y

The plane strain problem for infinite circular cylindrically orthotropic tube under symmetric loading is solved in the form of Fourier series. The example of computation is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М., «Наука», 1977, 416 с.