ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXIII, № 4, 1980 Механика

Р. М. КИРАКОСЯН

О ВЕРХНИХ ОЦЕНКАХ ПРОГИБОВ И НАПРЯЖЕНИЙ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

Предлагается способ определения верхних оценок для максимальных прогибов и напряжений упруго-пластических конструкций, основанный на использовании упругих решений соответствующих краевых задач. Способ иллюстрируется на примере гибкой пластинки при линейном упрочнении материала.

Переходя к обобщенным величинам, что позволяет освободиться от влияния неоднородности напряженно-деформированного состояния по толщине, получены более точные верхние оценки при поперечном изгибе. На основе этих оценок получается единая нижняя оценка для несущей способности произвольных идеально-пластических пластин.

Приводятся примеры сравнения с точными решениями.

1. Рассмотрим некоторую конструкцию из линейно упрочняющегося материала. Связь между интенсивностями касательных напряжений σ_i и деформаций сдвигов ε_i примем в виде [1]

$$\sigma_i = E\varepsilon_i[1-\omega(\varepsilon_i)], \quad 0 \leqslant \omega < 1 \tag{1.1}$$

где

$$\omega = \begin{cases} 0, & \varepsilon_i \leqslant \varepsilon_s \\ \lambda\left(1-\dfrac{\varepsilon_s}{\varepsilon_i}\right), & \varepsilon_i \geqslant \varepsilon_s \end{cases}$$

$$\lambda = 1-\frac{1}{E}\frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i} = \text{const} \tag{1.2}$$

E — модуль Юнга, ε_s — предел упругих деформаций, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ — коэффициент упрочнения материала.

Известно [1], что упруго-пластически деформированное тело можно рассматривать как некоторое приведенное упругое тело с неоднородным модулем упругости $E_{\text{пр}}$. В случае линейного упрочнения и отсутствия разгрузки

$$E_{\text{пр}} = \begin{cases} E, & \varepsilon_i \leqslant \varepsilon_s \\ E\left(1-\lambda+\dfrac{\lambda\varepsilon_s}{\varepsilon_i}\right), & \varepsilon_i \geqslant \varepsilon_s \end{cases} \tag{1.3}$$

За пределами упругости с возрастанием интенсивности деформаций ε_i модуль приведенного материала $E_{\text{пр}}$ монотонно убывает. Следовательно, наименьшее значение $E_{\text{пр}}^{\min}$ получится в той точке конструкции, где ε_i принимает наибольшее значение, то есть

$$E_{\text{пр}}^{\min} = E\left(1 - \lambda + \frac{\lambda\varepsilon_s}{\varepsilon_i^{\max}}\right) \tag{1.4}$$

Так как

$$E_{\text{пр}}^{\min} > E(1-\lambda) \tag{1.5}$$

то, полагая

$$E_{\text{пр}}(0) = E(1-\lambda) \tag{1.6}$$

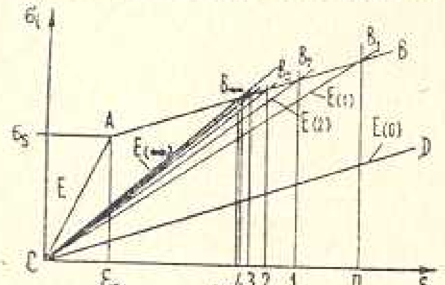
и решая задачу упругого деформирования рассмотренной конструкции при заданных нагрузках и граничных условиях, получим завышенные значения для деформаций. Максимальное значение интенсивности деформаций обозначим через $\varepsilon_i^{\max}(0)$. Соответствующее значение интенсивности напряжений, подсчитанное по действительной зависимости

$$\sigma_i^{\max}(0) = \varepsilon_i^{\max}(0)\left[1 - \lambda + \frac{\lambda\varepsilon_s}{\varepsilon_i^{\max}(0)}\right] \tag{1.7}$$

будет превышать действительное максимальное значение. Таким образом, получены верхние оценки для интенсивностей деформаций и напряжений и нижняя оценка для приведенного модуля

$$\varepsilon_i^{\max}(0) > \varepsilon_i, \quad \sigma_i^{\max}(0) > \sigma_i, \quad E_{\text{пр}}^{\min}(0) < E_{\text{пр}} \tag{1.8}$$

Эти оценки очень грубы и не могут представлять практического интереса. Принимая их в качестве нулевого приближения, последующие приближения построим по реккурентным формулам



Фиг. 1.

$$E_{\text{пр}}^{\min}(n) = \frac{\sigma_i^{\max}(n-1)}{\varepsilon_i^{\max}(n-1)}$$

$$\sigma_i^{\max}(n-1) = \tag{1.9}$$

$$= E\varepsilon_i^{\max}(n-1)\left[1 - \lambda + \frac{\lambda\varepsilon_s}{\varepsilon_i^{\max}(n-1)}\right]$$

где $\varepsilon_i^{\max}(n-1)$ получается решением упругой задачи при $E_{\text{пр}} = E_{\text{пр}}^{\min}(n-1)$.

Смысл этого рекуррентного процесса можно наглядно представить графически (фиг. 1). На оси ε_i числами 0, 1, 2, ..., ∞ обозначены значения соответствующих приближений максимальной интенсивности деформаций

$\varepsilon_i^{max}(n)$. Причем, нулевое приближение $\varepsilon_i^{max}(0)$ получается из упругого решения задачи, когда связь между σ_i и ε_i дается линией CD, параллельной линии $AB(E^{min}(0)=E(1-\lambda))$. Имея нулевое приближение $\varepsilon_i^{max}(0)$ по действительной диаграмме $\sigma_i \sim \varepsilon_i$ (ломаная CAB) определяется нулевое приближение максимального значения интенсивности напряжения $\sigma_i^{max}(0)$ — отрезок OB_1. Соединяя точку B_1 с началом координат C, находим первое приближение приведенного модуля $E^{min}(1) = OB_1/CO$. Далее, решая упругую задачу по диаграмме CB_1, определяем первое приближение максимального значения интенсивности деформаций $\varepsilon_i^{max}(1)$. Оно изображено цифрой „1" на оси ε_i. Первое приближение $\sigma_i^{max}(1)$ получается путем пересечения с действительной диаграммой CAB линии $1B_2$, параллельной оси σ_i. Аналогично строятся и последующие приближения. Так как последовательность минимальных значений модуля $E^{min}(n)$ монотонно растет и ограничена сверху значением действительного модуля Юнга материала E, то она сходится. Предельное значение $E^{min}(\infty) = E^*$ характеризуется тем, что для него максимальные значения интенсивности напряжений $\sigma_i^{max}(\infty) = \sigma_i^*$, подсчитанные по приведенной диаграмме CB_∞ и по действительной диаграмме CAB, совпадают. На основе этого обстоятельства, значение E^* можно определить непосредственно, не связываясь с описанным выше процессом последовательных приближений. Пусть решена задача упругого деформирования конструкции. Далее определяется максимальная интенсивность деформаций как функция от неизвестного модуля $\varepsilon_i^{max}(E^*)$. Приравнивая значения интенсивности напряжений, подсчитанные для $\varepsilon_i^{max}(E^*)$ по соотношениям упругости с модулем E^* и по соотношениям реального упруго-пластического тела (1.1), (1.2), получим

$$E^* = E\left[1-\lambda+\frac{\lambda\varepsilon_s}{\varepsilon_i^{max}(E^*)}\right] \tag{1.10}$$

Это и есть уравнение для определения E^*. Максимальное значение деформаций (перемещений) и напряжений упругой конструкции с однородным модулем E^* будет служить в качестве верхних оценок для действительных значений соответствующих величин реальной упруго-пластической конструкции.

Разумеется, что эти оценки намного лучше исходных (1.8). При однородном напряженно-деформированном состоянии, а также при отсутствии пластических свойств материала ($\lambda = 0$) эти оценки совпадают с точными значениями. По мере возрастания неоднородности напряженно-деформированного состояния и возрастания пластических свойств материала расхождение между оценками и точными значениями соответствующих величин увеличивается. Предлагаемые оценки могут быть успешно использованы особенно для конструкций типа гибких пластин и оболочек, неоднородность напряженно-деформированного состояния которых из-за мембранных усилий мала.

Важно заметить, что с ростом пластических деформаций материал приближается к несжимаемому и его коэффициент поперечной деформации стремится к половине. Предлагаемые оценки получены в предположении о неизменности коэффициента Пуассона. Это приводит к искусственному уменьшению жесткости конструкции, а следовательно, и к завышению деформаций. Оценки от этого становятся несколько грубыми.

2. В качестве иллюстрации предлагаемого способа нахождения верхних оценок рассмотрим задачу круглой гибкой пластинки, деформируемой под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки. Для простоты будем пользоваться аппроксимирующими выражениями точных формул максимальных значений прогибов и напряжений упругой пластинки [2]

$$x + Ax^3 = Bq^*, \quad \sigma_i^* = x(\beta + \alpha x) \tag{2.1}$$

где α, β, A, B — табличные постоянные,

$$x = \frac{w_0}{h}, \quad q^* = \frac{qa^4}{Eh^4}, \quad \sigma_i^* = \frac{\sigma_i^{\max} a^2}{Eh^2} \tag{2.2}$$

w_0 — прогиб в центре, h — толщина, а — радиус, E — модуль Юнга материала, q — интенсивность поверхностной нагрузки пластинки.

Имея в виду (1.10) и (2.1), получим

$$m = \frac{E}{E^*} = \begin{cases} 1, & x \leqslant x_s \\ \dfrac{x(\beta + \alpha x)}{\lambda\mu + (1-\lambda)\, x(\beta + \alpha x)}, & x \geqslant x_s \end{cases}$$

$$\sigma_i^{\max} = \begin{cases} x(\beta + \alpha x), & x \leqslant x_s \\ \dfrac{\lambda\mu}{1 - m(1-\lambda)}, & x \geqslant x_s \end{cases} \tag{2.3}$$

$$x_s = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\alpha\mu}}{2\alpha}, \quad q = \frac{x + Ax^3}{Bm}, \quad \mu = \frac{\sigma_s a^2}{h^2}$$

где x_s — предел упругих прогибов пластинки в центре. Соотношения (2.3) определяют зависимости между верхними оценками максимального прогиба x, максимальной интенсивности напряжений пластинки $\sigma_i^{\max}$ от нагрузки q.

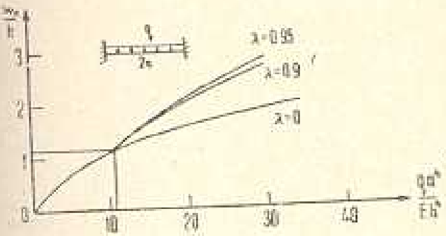
В случае жесткого защемления контура максимальное значение интенсивности напряжений $\sigma_i^{\max}$ получается на крайних верхних волокнах контурных сечений пластинки. Тогда коэффициенты α и β определяются формулами

$$\alpha = \sqrt{\alpha_r^2 - \alpha_r \alpha_t + \alpha_t^2}, \quad \beta = \sqrt{\beta_r^2 - \beta_r \beta_t + \beta_t^2} \tag{2.4}$$

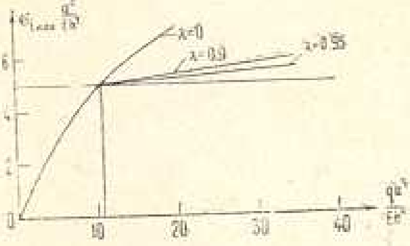
где α_r, α_t, β_r, β_t относятся к контуру пластинки. На основе [2] (стр. 456, табл. 82) с учетом (2.4) при значении коэффициента Пуассона $\nu = 0.3$ находим

$$\alpha = 0.423, \quad \beta = 3.911, \quad A = 0.471, \quad B = 0.171 \tag{2.5}$$

На фиг. 2 и 3 приведены графики зависимости верхних оценок от нагрузки для рассмотренного случая при трех значениях λ. Качественно аналогичными получаются эти графики и для остальных способов опирания пластинки.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

3. Как отмечалось выше, предлагаемые оценки становятся грубыми при поперечном изгибе, особенно когда материал пластинки стремится к идеально пластическому. Ниже, путем перехода к обобщенным величинам, эти оценки существенно улучшаются при отсутствии мембранных сил. Используя соотношения между изгибающими моментами и кривизнами срединной плоскости в рамках теории поперечного изгиба пластин можно записать

$$m_i = D(1-\Omega)\,\varkappa_i, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{3.1}$$

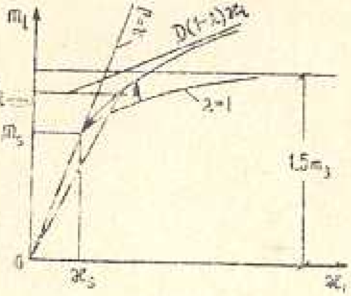
где D — цилиндрическая жесткость, m_i и $\varkappa_i$ — аналоги интенсивностей напряжений и деформаций:

$$m_i = \sqrt{M_1^2 - M_1 M_2 + M_2^2 + 3M_{12}^2}\,, \quad \varkappa_i = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\varkappa_1^2 + \varkappa_1\varkappa_2 + \varkappa_2^2 + \varkappa_{12}^2} \tag{3.2}$$

$$\Omega = \begin{cases} 0, & \varkappa_i \leqslant \varkappa_s = \dfrac{3\varepsilon_s}{2h} \\ \lambda\left(1 - \dfrac{9\varepsilon_s}{4h\varkappa_i} + \dfrac{27\,\varepsilon_s^3}{16h^3\varkappa_i^3}\right), & \varkappa_i \geqslant \varkappa_s \end{cases} \tag{3.3}$$

Здесь через $\varkappa_s$ обозначено значение интенсивности кривизн пластинки, после достижения которого появляются остаточные деформации. На фиг. 4 представлен график зависимости (3.1) для линейно упрочняющегося материала. В пределах упругости ($\varkappa_i \leqslant \varkappa_s$) этот график является прямой линией с угловым коэффициентом D. Моменту появления пластических деформаций соответствуют значения m_s и $\varkappa_s$, которые служат аналогами пределов упругости σ_s и ε_s. С развитием областей пластических деформаций график $m_i \sim \varkappa_i$ отклоняется от прямой линии, непрерывно наклоняясь в сторону оси $\varkappa_i$. График имеет асимптоту с угловым коэффициентом $(1-\lambda)D$. При идеально-пластическом материале $\lambda = 1$ и асимптота становится параллельной оси $\varkappa_i$. Предельное значение интенсивности моментов $m_{\text{пр}}$, которое характеризует несущую способность сечения, оказывается в полтора раза больше предела упругости m_s.

Поступая так, как в пункте 1, для нахождения нижней оценки приведенной жесткости упруго-пластически деформированной пластинки D^* получим следующее уравнение:



Фиг. 4.

$$D^* = D\left\{1 - \lambda\left[1 - \frac{9\varepsilon_s}{4h\varkappa_i^*(D^*)} + \frac{27\varepsilon_s^3}{16h^3(\varkappa_i^*(D^*))^3}\right]\right\} \tag{3.4}$$

где $\varkappa_i^*(D^*)$ — наибольшее значение интенсивности кривизн упругой пластинки при данных нагрузках и граничных условиях, определенное как функция от неизвестной жесткости D^*. Максимальные значения прогиба и напряжений упругой пластинки с однородной жесткостью D^* будут служить в качестве верхних оценок этих величин. Они не зависят от неоднородности напряженно-деформированного состояния по толщине и могут быть полезными в случае поперечного изгиба пластин.

Так как в теории поперечного изгиба однородных упругих пластин как изгибающие моменты, так и их интенсивность m_i не зависят от жесткости пластинки, то нижнюю оценку минимальной жесткости D^* можно определить и следующим образом. Из упругого решения задачи определяется максимальное значение интенсивности моментов $m_i^{\max}$, откладывается это значение вдоль оси m_i и проводится линия, параллельная оси $\varkappa_i$ до пересечения с действительной диаграммой $m_i \sim \varkappa_i$ упруго-пластической пластинки в точке A (фиг. 4). Угловой коэффициент линии OA будет равняться искомому значению нижней оценки минимальной жесткости D^*.

Тот факт, что для однородных упругих пластин интенсивность изгибающих моментов прямо пропорциональна параметру нагрузки q, показывает, что несущая способность произвольной идеально пластической пластинки ограничена снизу единым неравенством

$$q_{\text{пр}} > \frac{3}{2} q_s \tag{3.5}$$

где q_s то значение параметра нагрузки, при котором в какой-то точке (или точках) пластинки впервые достигается предел упругости материала. Например, в случае круглой защемленной по контуру пластинки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой, $q_{\text{пр}} = 1.828\, q_s$ [3] и нижняя оценка несущей способности (3.5) отличается от точной не более 18%.

Рассмотрим задачу определения верхней оценки для максимального прогиба шарнирно опертой по контуру круглой пластинки, изгибаемой под действием равномерно распределенной нагрузки. В случае значения параметра $\lambda = 0.95$ и несжимаемости материала уравнение (3.4) принимает вид

$$\frac{D^*}{D} = \begin{cases} 1, \ \bar{q} = \dfrac{qha^2}{2\sigma_s D} \leqslant \bar{q}_* = 3.429 \\[2ex] 0.05 + 4.886\dfrac{1}{\bar{q}} - 19.144\dfrac{1}{\bar{q}^3}, \quad \bar{q} \geqslant \bar{q}_* \end{cases} \tag{3.6}$$

В нижеприведенной таблице представлены результаты некоторых расчетов, выполненных с помощью (3.6). В последней строке приведены отношения верхних оценок $w^{оц}$ максимальных прогибов упруго-пластической пластинки к максимальным прогибам упругой пластинки w^e. Из точного решения задачи упруго-пластического изгиба, когда в центре пластинки пластическая зона деформаций достигает половины толщины, имеем ([1], стр. 222).

Таблица 1

$\bar{q}$	3.429	4	5	6	7	8
D^*/D	1	0.972	0.874	0.776	0.692	0.623
$\dfrac{w^{оц}}{w^e} = \dfrac{D}{D^*}$	1	1.029	1.144	1.289	1.445	1.604

$$\bar{q} = 5, \qquad \frac{w^{max}}{w^e} = \frac{5.322}{0.286} = 1.126 \tag{3.7}$$

В данном случае верхняя оценка максимального прогиба $\dfrac{w^{оц}}{w^e} = 1.144$ отличается от точного значения (3.7) менее 1.6%.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 7 I 1980

Ռ. Մ. ԿԻՐԱԿՈՍՅԱՆ

ԱՌԱՁԳԱ-ՊԼԱՍՏԻԿԱԿԱՆ ԿՈՆՍՏՐՈՒԿՑԻԱՆԵՐԻ ՃԿՎԱԾՔՆԵՐԻ ԵՎ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՎԵՐԻՆ ԳՆԱՀԱՏԱԿԱՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Առաջարկվում է առաձգա-պլաստիկական կոնստրուկցիաների մաքսիմալ ճկվածքների և լարումների վերին գնահատականների որոշման եղանակ, որը հենված է համապատասխան եզրային խնդիրների առաձգական լուծումների օգտագործման վրա։ Եղանակը ցուցադրվում է ճկուն սալերի օրինակի վրա՝ նյութի գծային ամրապնդման դեպքում։

Անցնելով ընդհանրացված մեծությունների, որը թույլ է տալիս ազատվելու ըստ հաստության լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակի անհամասեռության ազդեցությունից, ստացվում են ավելի ճշգրիտ վերին գնահատականներ լայնական ծռման դեպքում։ Այդ գնահատականների հիման վրա կամայական իդեալական առաձգական սալերի համար ստացվում է կրող ունակության միասնական ստորին գնահատական։

Բերվում են ճշգրիտ լուծումների հետ համեմատության օրինակներ։

ON THE UPPER VALUES OF FLEXURE AND STRESS IN ELASTIC-PLASTIC STRUCTURES

R. M. KIRAKOSIAN

Summary

A method to define the upper values of maximum flexure and stress in elastic-plastic structures, based on elastic solutions for corresponding boundary problems, is proposed. A flexible plate with linear hardening of the material is used to illustrate the method. A transition to generalized values, permittimg to eliminate the heterogeneity of a stress-strain state across the thikness, provides more accurate upper values under cross-bending. On the basis of these values a common lower value for the carrying capacity of arbitrary perfectly-plastic plates is obtained.

Some examples of comparison with accurate solutions are presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильюшин А. А.* Пластичность. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
2. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М., Физматгиз, 1963.
3. Ходж Ф. Пластический анализ конструкций, 1965.