ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIII, № 4, 1980 Механика

С. Г. АВАГЯН, А. Г. БАГДОЕВ

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ПРОНИКАНИЯ ТЕЛ В ВЕСОМУЮ ЖИДКОСТЬ

§ 1. *Проникание тонкого тела в несжимаемую весомую жидкость*

Рассматривается задача о проникании тонкого жесткого конуса в несжимаемую жидкость со свободной поверхностью при учете влияния ускорения силы тяжести. В отсутствие силы тяжести решение задач дано для сжимаемой жидкости в [1—3]. Задача о проникании тел в грунты и металлы решалась в [2, 4].

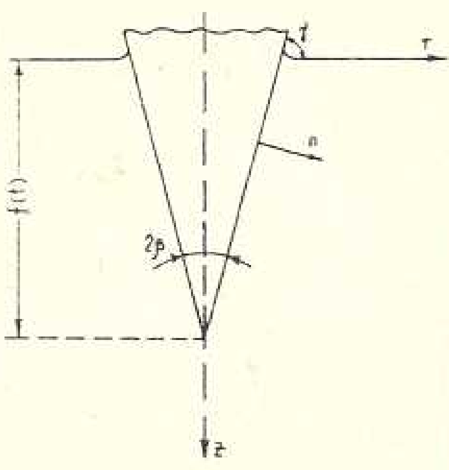
Для потенциального движения жидкости имеет место уравнение

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0 \tag{1.1}$$

где $\varphi=\varphi(r, z, t)$ — потенциал скорости, начало координат выбрано в точке пересечения вершины конуса с поверхностью жидкости, ось r направлена по поверхности жидкости, ось z — перпендикулярно к ней вниз. Имеем следующее граничное условие на боковой поверхности тела:

$$r=r_k;\quad \frac{\partial\varphi}{\partial r}=-f'(t)\frac{\partial r_k}{\partial z}$$
$$0<z<f(t) \tag{1.2}$$

где $f(t)$ — закон движения тела, $f'(t)$ — его скороеть. Начальные условия $\varphi=0$; $\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$ при $t=0$.



Фиг. 1.

Уравнение Коши-Лагранжа примет вид

$$\frac{p}{\rho_0}=-\frac{\partial\varphi}{\partial t}+gz+\frac{p_0}{\rho_0}-\frac{V^2}{2} \tag{1.3}$$

где

$$V^2=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2$$

Если $z=H(r, t)$ — уравнение свободной поверхности, то тогда на ней

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}-gH+\frac{V^2}{2}=0$$

Продифференцировав по t и считая, что V мало, получим при $z = 0$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - g\frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

кроме того

$$v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

поэтому

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - g\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \text{ при } z = 0 \tag{1.4}$$

Решение задачи ищем методом источников в сочетании с интегральными преобразованиями. В силу линейности задачи можно полагать

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 \tag{1.5}$$

где φ_0 соответствует решению о движении тела в безграничной среде $-\infty < z < \infty$, а φ_1 — отражению от свободной поверхности. Подобно [2], можно искать решение в виде источников, распределенных по оси тела

$$\varphi_0 = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{f(t)} \frac{q(z_1, t)\, dz_1}{\sqrt{(z_1 - z)^2 + r^2}} \tag{1.6}$$

Учитывая соотношение для малых r [3]

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)_{r\to 0} \to \frac{1}{2\pi}\frac{q(z, t)}{r} \tag{1.7}$$

можно по (1.2) получить

$$q(z, t) = -2\pi r_k f'(t)\frac{\partial r_k}{\partial z} \tag{1.8}$$

причем для конуса

$$r_k = \beta[f(t) - z] \tag{1.9}$$

где β — угол полураствора конуса. Тогда

$$\varphi_0(r, z, t) = \frac{f'(t)}{2}\int\limits_0^{f(t)} r_k \frac{\partial r_k}{\partial z_1}\frac{dz_1}{\sqrt{(z_1 - z)^2 + r^2}} \tag{1.10}$$

Удобно рассматривать решение для отдельных источников φ^0, где

$$\varphi = \int \varphi^0 dz_1 \tag{1.11}$$

Тогда для φ_0^0 получится

$$\varphi_0^0 = \frac{f'(t)}{2} r_k \frac{\partial r_k}{\partial z_1} \frac{1}{\sqrt{(z_1 - z)^2 + r^2}} \tag{1.12}$$

Для определения φ_1 применяется метод интегральных преобразований. Согласно известному равенству

$$\int\limits_0^\infty e^{-k(z_1-z)} J_0(kr)\, dk = \frac{1}{\sqrt{(z_1 - z)^2 + r^2}} \tag{1.13}$$

можно полагать

$$\varphi_0^0 = \frac{f'(t)}{2} r_k \frac{\partial r_k}{\partial z_1} \int\limits_0^\infty e^{-k(z_1-z)} J_0(kr)\, dk \tag{1.14}$$

Отраженные возмущения φ_1^0 для задачи о точечных источниках можно искать в виде

$$\varphi_1^0 = \int\limits_1^\infty e^{-k(z_1+z)} J_0(kr)\, A(k,\ t)\, dk \tag{1.15}$$

Вводя преобразование по Лапласу по t от φ_0^0, φ_1^0, можно записать (1.14), (1.15) в виде

$$\begin{gathered} \overline{\varphi_0^0} = \overline{\frac{f'(t)}{2} r_k \frac{\partial r_k}{\partial z_1}} \int\limits_0^\infty e^{-k(z_1-z)} J_0(kr)\, dk \\ \overline{\varphi_1^0} = \int\limits_0^\infty e^{-k(z_1+z)} J_0(kr)\, \overline{A(k,\ t)}\, dk \end{gathered} \tag{1.16}$$

Применяя к (1.4) преобразование Лапласа, можно получить

$$s^2 \overline{\varphi} - g \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial z} = 0; \quad z = 0 \tag{1.17}$$

причем указанное соотношение годится и для решения $\overline{\varphi^0}$ задачи о точечных источниках. Полагая еще $\overline{\varphi^0} = \overline{\varphi_0^0} + \overline{\varphi_1^0}$, получим

$$\overline{A(k,\ t)} = \frac{gk - s^2}{gk + s^2}\, \overline{\frac{f'(t)}{2} r_k \frac{\partial r_k}{\partial z_1}} \tag{1.18}$$

Для $\overline{\varphi_1^0}$ получим

$$\overline{\varphi_1^0} = \int\limits_0^\infty e^{-k(z_1+z)} J_0(kr) \frac{gk - s^2}{gk + s^2}\, \overline{\frac{f'(t)}{2} r_k \frac{\partial r_k}{\partial z_1}}\, dk \tag{1.19}$$

Обозначим значение $\overline{\varphi}_1^0$ при $g = 0$ через $\overline{\Phi}_1^0$,

$$\overline{\Phi}_1^0 = -\int_0^\infty e^{-k(z_1+z)} J_0(kr) \overline{\frac{f'(t)}{2} r_k \frac{\partial r_k}{\partial z_1}} dk \tag{1.20'}$$

отсюда

$$\Phi_1^0 = -\frac{f'(t)}{2} r_k \frac{\partial r_k}{\partial z_1} \frac{1}{\sqrt{(z_1+z)^2+r^2}} \tag{1.20'}$$

Разложим дробь $\frac{gk - s^2}{gk + s^2}$ по степеням $\frac{gk}{s^2}$

$$\frac{gk-s^2}{gk+s^2} = 1 - 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{gk}{s^2}\right)^n$$

Для малых t $\frac{gk}{s^2} \ll 1$, поэтому мы можем для них оставить только пять членов

$$\frac{gk-s^2}{gk+s^2} = -1 + 2\frac{gk}{s^2} - 2\left(\frac{gk}{s^2}\right)^2 + 2\left(\frac{gk}{s^2}\right)^3 - 2\left(\frac{gk}{s^2}\right)^4$$

и полагать

$$\overline{\varphi}_1^0 = \int_0^\infty e^{-k(z+z_1)} J_0(kr) \frac{f'(t)}{2} r_k \frac{\partial r_k}{\partial z_1}\left[-1 + 2\frac{gk}{s^2} - 2\left(\frac{gk}{s^2}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + 2\left(\frac{gk}{s^2}\right)^3 - 2\left(\frac{gk}{s^2}\right)^4\right] dk = \overline{\Phi}_1^0 + \frac{2g}{s^2}\frac{\partial \overline{\Phi}_1^0}{\partial z} +$$

$$+ 2\frac{g^2}{s^4}\frac{\partial^2 \overline{\Phi}_1^0}{\partial z^2} - 2\frac{g^3}{s^6}\frac{\partial^3 \overline{\Phi}_1^0}{\partial z^3} + \frac{2g^4}{s^8}\frac{\partial^4 \overline{\Phi}_1^0}{\partial z^4}.$$

Здесь воспользовались формулой (1.20) и тем, что дифференцирование по z интеграла соответствует умножению на ($-k$) подинтегрального выражения. Мы нашли изображение $\overline{\varphi}_1^0$. Для нахождения φ_1^0 сделаем обратное преобразование Лапласа. Пользуемся теоремой о свертке. Тогда

$$\varphi_1^0 = \Phi_1^0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^n}{(2n-1)!} \int_0^{t-\frac{z_1}{v_0}} (t')^{2n-1} \frac{\partial^n \Phi_1^0(t-t', r, z)}{\partial z^n} dt'$$

В дальнейшем для простоты рассматривая постоянную скорость $f'(t) = v_0$, имеем

$$r_k = \beta(v_0 t - z_1); \qquad r_k \frac{\partial r_k}{\partial z_1} = -\beta^2 (v_0 t - z_1)$$

и из (1.20′)

$$\Phi_1^0 (t - t', r, z) = \left(t - t' - \frac{z_1}{v_0}\right) \frac{\beta^2 v_0^2}{2} \frac{1}{R_1}$$

Из (1.12) имеем

$$\varphi_0^0 = -\frac{\beta^2 v_0^2}{2} \left(t - \frac{z_1}{v_0}\right) \frac{1}{R_0}$$

Тогда

$$\varphi^0 = \varphi_0^0 + \varphi_1^0 = -\frac{\beta^2 v_0^2}{2} \left(t - \frac{z_1}{v_0}\right) \frac{1}{R_0} + \Phi_1^0 +$$

$$+ 2g \int_0^{t - \frac{z_1}{v_0}} t' \left(t - t' - \frac{z_1}{v_0}\right) \frac{\beta^2 v_0^2}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R_1}\right) \partial t' +$$

$$+ \frac{g^2}{3} \int_0^{t - \frac{z_1}{v_0}} t'^3 \left(t - t' - \frac{z_1}{v_0}\right) \frac{\beta^2 v_0^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{R_1}\right) dt' +$$

$$+ \frac{g^3}{60} \int_0^{t - \frac{z_1}{v_0}} t'^5 \left(t - t' - \frac{z_1}{v_0}\right) \frac{\beta^2 v_0^2}{2} \frac{\partial^3}{\partial z^3} \left(\frac{1}{R_1}\right) dt' +$$

$$+ \frac{2g^4}{7!} \int_0^{t - \frac{z_1}{v_0}} t'^7 \left(t - t' - \frac{z_1}{v_0}\right) \frac{\beta^2 v_0^2}{2} \frac{\partial^4}{\partial z^4} \left(\frac{1}{R_1}\right) dt'$$

Отсюда найдем

$$\frac{\partial \varphi^0}{\partial t} = -\frac{v_0^2 \beta^2}{2} \frac{1}{R_0} + \frac{v_0^2 \beta^2}{2} \frac{1}{R_1} + \frac{g \beta^2 v_0^2}{2} \left(t - \frac{z_1}{v_0}\right)^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R_1}\right) +$$

$$+ \frac{g^2 \beta^2 v_0^2}{24} \left(t - \frac{z_1}{v_0}\right)^4 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{R_1}\right) + \frac{g^3 \beta^2 v_0^2}{6!} \left(t - \frac{z_1}{v_0}\right)^6 \frac{\partial^3}{\partial z^3} \left(\frac{1}{R_1}\right) +$$

$$+ \frac{g^4 \beta^2 v_0^2}{8!} \left(t - \frac{z_1}{v_0}\right)^8 \frac{\partial^4}{\partial z^4} \left(\frac{1}{R_1}\right)$$

где

$$R_0 = \sqrt{(z_1 - z)^2 + r^2}; \quad R_1 = \sqrt{(z_1 + z)^2 + r^2}$$

Имеем, что

$$\varphi = \int_0^{v_0 t} \varphi^0 dz_1$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \int_0^{v_0 t} \frac{\partial \varphi^0}{\partial t} dz_1$$

Вычисляя интегралы, получим $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ для произвольных r, z, t. При вычислении $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ на теле при $r = r_k$ учитывается, что r_k мало и им можно пренебречь там, где это не приводит к особенностям. После этих упрощений для $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\beta^2 v_0^2}{2} \ln \frac{4z}{\beta^2 (v_0 t - z)} + \frac{\beta^2 v_0^2}{2} \ln \frac{v_0 t + z}{z} +$$
$$+ \frac{\beta^2 v_0^2}{2} \ln \frac{v_0 t + z}{z} \left[\frac{2g (v_0 t + z)}{v_0^2} + \frac{g^2 (z + v_0 t)^2}{v_0^4} + \frac{g^3 (z + v_0 t)^3}{3 v_0^6} + \right.$$
$$\left. + \frac{g^4 (z + v_0 t)^4}{12 v_0^8} \right] + \frac{\beta^2 v_0^2}{2} \left[-\frac{1}{R} \left(g t^2 + \frac{g^2 t^3}{3 v_0} + \frac{g^3 t^4}{12 v_0^2} + \frac{g^4 t^5}{60 v_0^3} \right) + \right.$$
$$+ \frac{1}{R^3} \left(\frac{g^2 t^4 z}{12} + \frac{g^3 t^6}{360} + \frac{g^3 t^5 z}{60\, v_0} + \frac{2 g^4 t^7}{7! v_0} + \frac{2 z g^4 t^6}{6! v_0^2} \right) -$$
$$- \frac{1}{R^5} \left(\frac{g^3 z^2 t^6}{120} + \frac{18 g^4 t^8 z}{8!} + \frac{48\, g^4 z^2 t^7}{8!\, v_0} \right) + \frac{30\, g^4 t^8 z^3}{8! R^7} - \frac{2gt}{v_0} - \frac{g^2 t z}{v_0^3} -$$
$$- \frac{3 g^2 t^2}{2 v_0^2} - \frac{g^3 t^2 (z + v_0 t)}{2 v_0^4} - g^3 \frac{(z + v_0 t)^3 - z^3}{9 v_0^6} - \frac{25 g^4 (v_0 t + z)^4}{144 v_0^8} +$$
$$\left. + \frac{g^4 z (v_0 t + z)^3}{3 v_0^8} - \frac{g^4 z^4}{48 v_0^8} - \frac{g^4 z^2 (v_0 t + z)^2}{4 v_0^8} + \frac{g^4 z^3 (v_0 t + z)}{9 v_0^8} \right] \qquad (1.21)$$

$$R = \sqrt{z^2 + r^2}$$

Давление вычисляется по формуле

$$\frac{p}{\rho_0} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} + gz + \frac{p_0}{\rho_0} - \frac{V^2}{2} \qquad (1.22)$$

где ρ_0 — плотность жидкости.

Сила сопротивления через давление $P = p - p_0$ найдется по формуле

$$R = \int_0^{v_0 t} P\beta 2\pi\beta (v_0 t - z)\, dz = -2\pi\rho_0\beta^2 \int_0^{v_0 t} \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \right.$$

$$\left. - g\left(1 - \frac{\rho'}{\rho_0}\right) z + \frac{\beta^2 v_0^2}{2} \right\} (v_0 t - z)\, dz \tag{1.23}$$

где ρ' — плотность конуса.

Ввиду малости члена $\frac{V^2}{2}$ в нем оставлено только основное слагаемое $\frac{v_r^2}{2} = \frac{\beta^2 v_0^2}{2}$ на конусе. Вычисляя выражения в R, можно найти $R = -2\pi\rho_0\beta^2 J$, где

$$J = \frac{v_0^4 t^2 \beta^2}{4} (\ln 4\beta^2 + 1) - \frac{g v_0^3 t^3 \beta^2}{2}\left(\ln\frac{2}{\beta} - \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{1}{3}\right) +$$

$$+ \frac{g^2 \beta^2 v_0^2 t^4}{24}\left(\frac{1}{\beta} - 5\ln\frac{2}{\beta} + 7.2\right) + \frac{\beta^2 v_0 t^5 g^3}{6!}\left(\frac{6}{\beta} - 36\ln\frac{2}{\beta} + 78\right) +$$

$$+ \frac{\beta^2 g^4 t^6}{8!}\left(-\frac{1}{\beta^3} + \frac{56}{\beta} - 392\ln\frac{2}{\beta} - 300\right) - g\left(1 - \frac{\rho'}{\rho_0}\right)\frac{v_0^3 t^3}{6}$$

Для $g = 0$ имеем

$$R = -2\pi\rho_0\beta^4 \frac{v_0^4 t^2}{4}(1 + \ln 4\beta^2)$$

Когда $g \to \infty$

$$\varphi_1^0 = -\frac{\beta^2 v_0^2}{2}\left(t - \frac{z_1}{v_0}\right)\frac{1}{\sqrt{(z_1 + z)^2 + r^2}}$$

и на конусе получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{\beta^2 v_0^2}{2}\left(\ln\frac{v_0 t - z + \sqrt{(v_0 t - z)^2 + r^2}}{-z + \sqrt{z^2 + r^2}} + \right.$$

$$\left. + \ln\frac{v_0 t + z + \sqrt{(v_0 t + z)^2 + r^2}}{z + \sqrt{z^2 + r^2}}\right) \approx -\frac{\beta^2 v_0^2}{2}\ln\frac{4(v_0 t + z)}{\beta^2 (v_0 t - z)}$$

При $\rho' > \rho_0$ $R \to -\infty$, при $\rho' < \rho_0$ $R \to +\infty$, при $\rho' = \rho_0$

$$R = \pi\rho_0\beta^4 v_0^4 t^2\left(\ln\frac{8}{\beta} - \frac{3}{2}\right)$$

Сравнение со значением при $g = 0$ показывает, что при $\beta \to 0$ R получает одинаковые значения, а при $\beta = 0.2$ значение R при $g \to \infty$ приблизительно в 6 раз больше R при $g = 0$.

Для анализа полученных результатов построим графики зависимости давления от z по (1.21), (1.22). Обозначая $\xi = \frac{z}{v_0 t}$, $\eta = \frac{gt}{v_0}$, подставляя $r = \beta(v_0 t - z)$, получим, удерживая малые порядка η^2

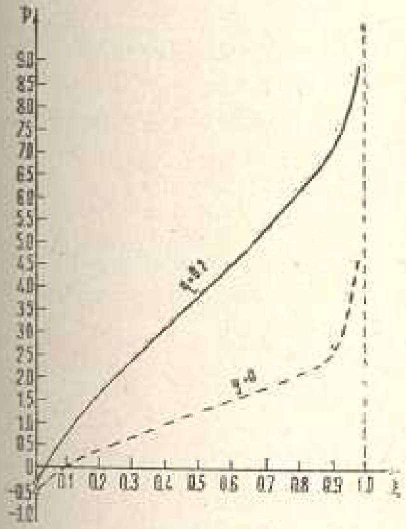
$$\frac{P}{v_0^2\beta^2} = \ln \frac{\xi + \sqrt{\xi^2 + \beta^2(1-\xi)^2}}{\beta\sqrt{1-\xi^2}} - \frac{1}{2} -$$

$$- \frac{\eta}{2} \ln \frac{2(1+\xi)\left(\sqrt{\xi^2+\beta^2(1-\xi)^2} - \xi\right)}{\beta^2(1-\xi)^2} \left(2 + 2\xi + \eta + 2\xi\eta + \xi^2\eta - \right.$$

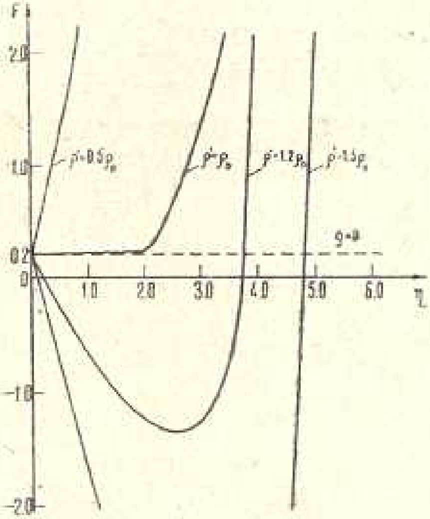
$$\left. - \frac{\beta^2\eta(1-\xi)^2}{2}\right) + \frac{\eta}{2}\left(2 + \frac{1}{\sqrt{\xi^2+\beta^2(1-\xi)^2}} + 2\eta - \right.$$

$$- \frac{\eta}{12[\xi^2 + \beta^2(1-\xi)^2]} + \frac{\eta}{3\sqrt{\xi^2+\beta^2(1-\xi)^2}} - \frac{\eta(1+\xi)^2}{2} +$$

$$\left. + \frac{\eta\xi^2}{2} + 2\xi\eta\right) + \frac{\xi\eta}{\beta^2}. \tag{1.24}$$



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Результаты расчетов по формуле (1.24) для $\frac{P}{\beta^2 v_0^2}$ в функции от $\xi = \frac{z}{v_0 t}$ приведены на фиг. 2, где пунктирной линией дано решение при $g = 0$ для $\frac{gt}{v_0} = \eta$. При этом выбрано $\eta = 0.2$; $\beta = 0.2$. График зависимости $\frac{R}{2\pi\rho_0\beta^4 v_0^4 t^2}$ от η дан на фиг. 3. Во всех расчетах, которые были сделаны, предполагалось, что ряд для φ_1^0 сходится. Докажем это. Заменив $\frac{1}{\sqrt{(z_1+z)^2+r^2}}$ на $\frac{1}{z+r}$, получим

$$\frac{\partial\varphi_1^0}{\partial t}=\frac{1}{z+r}-\frac{g\left(t-\frac{z_1}{v_0}\right)^2}{2!\,(z+r)^2}+\frac{2g^2\left(t-\frac{z_1}{v_0}\right)^4}{4!\,(z+r)^3}-\frac{3!\,g^3\left(t-\frac{z_1}{v_0}\right)^6}{6!\,(z+r)^4}\pm\ldots$$

Тогда получится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n g^n\left(t-\frac{z_1}{v_0}\right)^{2n}\cdot n!}{(2n)!\,(z+r)^{n+1}}$$

который представляет знакопеременный ряд с убывающими членами, поэтому по теореме Лейбница ряд сходится. По абсолютной величине члены этого ряда меньше членов ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n g^n\left(t-\frac{z_1}{v_0}\right)^{2n}}{n!\,(z+r)^{n+1}}$$

Дополнительный член этого ряда $|r_n|<\dfrac{g^{n+1}\left(t-\frac{z_1}{v_0}\right)^{2(n+1)}}{(z+r)^{n+1}(n+1)!}$, что позволяет оценить точность.

Можно получить также точную формулу для решения в форме интеграла. Так как $f'(t)=v_0$ и для конуса $r_k=\beta(v_0t-z_1)$, то

$$\overline{\frac{f'(t)}{2}r_k\frac{\partial r_k}{\partial z_1}}=-\frac{\beta^2v_0^2}{2}\int\limits_{\frac{z_1}{v_0}}^{\infty}\left(t-\frac{z_1}{v_0}\right)e^{-st}dt=-\frac{\beta^2v_0^2}{2}e^{-s\frac{z_1}{v_0}}\frac{1}{s^2}$$

Тогда получится

$$\overline{\varphi}_1^0=-\int\limits_0^{\infty}e^{-k(z_1+z)}J_0(kr)\frac{\beta^2v_0^2}{2}e^{-s\frac{z_1}{v_0}}\frac{1}{s^2}\,\frac{gk-s^2}{gk+s^2}\,dk$$

Вычисление вычетов в точках $s=\pm i\sqrt{gk}$, $s=0$ дает решение в виде

$$\varphi_1^0=-\frac{\beta^2v_0^2}{2}\left(t-\frac{z_1}{v_0}\right)\frac{1}{\sqrt{(z_1+z)^2+r^2}}+$$

$$+\beta^2v_0^2\int\limits_0^{\infty}e^{-k(z_1+z)}\frac{J_0(kr)}{\sqrt{gk}}\sin\sqrt{gk}\left(t-\frac{z_1}{v_0}\right)dk$$

Переходя по (1.11) к φ_1, получим $\varphi_1=\int\limits_0^{v_0t}\varphi_1^0dz_1$, откуда получим

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} = -\frac{\beta^2 v_0^2}{2}\ln\frac{v_0 t + z + \sqrt{(v_0 t + z)^2 + r^2}}{z + \sqrt{z^2 + r^2}} +$$

$$+ \beta^2 v_0^2 \int_0^\infty \frac{v_0 e^{-kz} J_0(kr)}{k^2 v_0^2 + gk}\left[-kv_0 e^{-kv_0 t} + kv_0 \cos\sqrt{gk}t + \sqrt{gk}\sin\sqrt{gk}t\right]dk$$

Используя асимптотическое представление функций Бесселя для больших kr, применяя метод стационарной фазы, учитывая, что первое слагаемое в скобке дает при большом t малую более высокого порядка и имея ввиду, что $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$, окончательно получим выражение для $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ на свободной поверхности. Форму свободной поверхности определяем по формуле $\zeta = \frac{1}{g}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{z=0}$.

$$\zeta = \frac{v_0^3 \beta^2 \sqrt{2}}{g\left(\frac{v_0^2 t^3}{4r} + tr\right)}\left(v_0 t \cos\frac{gt^2}{4r} - r\sin\frac{gt^2}{4r}\right)$$

Как видно из полученных формул, по поверхности жидкости распространяются диспергирующие волны, причем можно учесть и нелинейную постановку задачи о волнах [5—7].

§ 2. *Проникание тонкого тела в весомую жидкость, ограниченную мембраной*

В предположении, что жидкость ограничена упругой мембраной, занимающей плоскость $z = 0$, вместо (1.4) можно получить

$$-\rho\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right) + T\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)\right] +$$

$$+ \rho_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \rho_0 g\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 \text{ при } z = 0 \tag{2.1}$$

где ρ — плотность, T — натяжение мембраны. При выводе (2.1) использовано уравнение колебаний мембраны

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) - (p - p_0) \tag{2.2}$$

условие на поверхности жидкость-мембрана $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial z}$ и уравнение (1.3).

При этом считается, что тонкое тело прошло сквозь мембрану. Предполагая, что до входа в мембрану скорость тела была v_0' и пользуясь формулами, дающими распределение напряжения на теле при проникании в упругую среду с образованием области течения материала вблизи тела [4], можно получить скорость v_0 тела при входе в жидкость. Соответствующее решение о движении в безграничной жидкости имеет снова вид (1.10), (1.12).

Отраженное возмущение ищется в виде (1.16), и вместо (1.18) получится

$$\overline{A} = \frac{Tk^3 + \rho_0 gk + \rho s^2 k - \rho_0 s^2}{Tk^3 + \rho_0 gk + \rho s^2 k + \rho_0 s^2} \tag{2.3}$$

Подставляя (2.3) в (1.16) и совершая обратное преобразование Лапласа по t, после вычисления вычетов в точках $s = 0$

$$s = \pm i \sqrt{\frac{Tk^3 + \rho_0 gk}{\rho k + \rho_0}}$$

получим

$$\frac{\partial \varphi_1^*}{\partial t} = -\frac{\beta^2 v_0^2}{2} \frac{1}{\sqrt{(z_1 + z)^2 + r^2}} + \rho_0 \beta^2 v_0^2 \int_0^\infty \frac{e^{-k(z_1+z)} J_0(kr)}{\rho k + \rho_0} \cos b \left(t - \frac{z_1}{v_0}\right) dk \tag{2.4}$$

где

$$b = \sqrt{\frac{Tk^3 + \rho_0 gk}{\rho k + \rho_0}}$$

Тогда получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\beta^2 v_0^2}{2} \ln \frac{v_0 t - z + \sqrt{(v_0 t - z)^2 + r^2}}{-z + \sqrt{z^2 + r^2}} -$$

$$-\frac{\beta^2 v_0^2}{2} \ln \frac{v_0 t + z + \sqrt{(v_0 t + z)^2 + r^2}}{z + \sqrt{z^2 + r^2}} +$$

$$+ \rho_0 \beta^2 v_0^2 \int_0^\infty \frac{v_0 e^{-kz} J_0(kr)}{(\rho k + \rho_0)(k^2 v_0^2 + b^2)} (k v_0 \cos bt + b \sin bt - k v_0 e^{-k v_0 t})\, dk \tag{2.5}$$

Сила сопротивления находится по (1.23) в виде

$$R = -2\pi \rho_0 \beta^2 \left\{ \frac{\beta^2 v_0^4 t^2}{4} \left(3 + \ln \frac{\beta^2}{64}\right) - g\left(1 - \frac{\rho'}{\rho_0}\right) \frac{v_0^3 t^3}{6} + \right.$$

$$\left. + \rho_0 \beta^2 v_0^2 \int_0^\infty \frac{v_0 (v_0 tk + e^{-v_0 tk} - 1)}{k^2 (\rho k + \rho_0)(k^2 v_0^2 + b^2)}\, k v_0 \cos bt + b \sin bt - k v_0 e^{-k v_0 t} \right\} dk \tag{2.6}$$

Найдем приближенное решение для малых значений параметров

$$\eta; \quad \lambda = \frac{\rho}{\rho_0 v_0 t}; \qquad \alpha = \frac{T}{\rho_0 v_0^3 t}$$

Для этого записываем

$$\overline{A} = 1 - 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{Tk^3 + \rho_0 gk + \rho s^2 k}{\rho_0 s^2} \right)^n$$

и оставляем слагаемые с $n = 0;\ 1;\ 2$. При этом получим

$$\frac{\partial\varphi_1^0}{\partial t}=\frac{\beta^2 v_0^2}{2}\left[\frac{1}{R}+g\left(t-\frac{z_1}{v_0}\right)^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R}\right)+\frac{T}{\rho_0}\left(t-\frac{z_1}{v_0}\right)^2\frac{\partial^3}{\partial z^3}\left(\frac{1}{R}\right)+\right.$$

$$+2\frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R}\right)+\frac{2T^2\left(t-\dfrac{z_1}{v_0}\right)^4}{4!\rho_0^2}\frac{\partial^6}{\partial z^6}\left(\frac{1}{R}\right)+$$

$$+\frac{2g^2}{4!}\left(t-\frac{z_1}{v_0}\right)^4\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{R}\right)+2\frac{\rho^2}{\rho_0^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{R}\right)+$$

$$+\frac{2T\rho}{\rho_0^2}\left(t-\frac{z_1}{v_0}\right)^2\frac{\partial^4}{\partial z^4}\left(\frac{1}{R}\right)+\frac{Tg}{3!\rho_0}\left(t-\frac{z_1}{v_0}\right)^4\frac{\partial^4}{\partial z^4}\left(\frac{1}{R}\right)+$$

$$\left.+\frac{2\rho g}{\rho_0}\left(t-\frac{z_1}{v_0}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{R}\right)\right] \tag{2.7}$$

$$\text{где } R=\sqrt{(z_1+z)^2+r^2}$$

причем $\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial t}=\displaystyle\int_0^{v_0 t}\frac{\partial\varphi_1^0}{\partial t}\,dz_1$. Сила сопротивления находится по формуле (1.23) и имеет во втором порядке значение

$$\frac{R}{2\pi\rho_0\beta^4 v_0^4 t^2}=-\frac{(1+\ln 4\beta^2)}{4}+\frac{\eta}{6\beta^2}\left(1-\frac{\rho'}{\rho_0}\right)+$$

$$+\frac{\eta}{2}\left(\ln\frac{2}{\beta}-\frac{8}{3}\ln 2-\frac{1}{3}\right)-\frac{\alpha}{2}\left(\frac{2}{\beta}+4\ln\beta-2\right)-\lambda\ln 2\beta-$$

$$-\frac{\alpha^2}{24}\left(\frac{9}{\beta^5}+\frac{24}{\beta^4}+\frac{80}{\beta^3}+\frac{48}{\beta^2}+\frac{168}{\beta}\right)-\frac{\eta^2}{24}\left(\frac{1}{\beta}-5\ln\frac{2}{\beta}+7{,}2\right)-$$

$$-2\lambda^2\left(\frac{1}{\beta}+\ln\beta\right)+\alpha\lambda\left(\frac{1}{\beta^3}-\frac{2}{\beta}\right)+\frac{\eta\alpha}{12}\left(\frac{1}{\beta^3}+\frac{4}{\beta^2}-\frac{12}{\beta}+36\ln\frac{2}{\beta}\right)-$$

$$-\lambda\eta\left(\frac{1}{\beta}-3\ln\frac{2}{\beta}+2\right) \tag{2.8}$$

В первом порядке

$$\frac{R}{2\pi\rho_0\beta^4 v_0^4 t^2}=-\frac{(1+\ln 4\beta^2)}{4}+\frac{\eta}{6\beta^2}\left(1-\frac{\rho'}{\rho_0}\right)+$$

$$+\frac{\eta}{2}\left(\ln\frac{2}{\beta}-\frac{8}{3}\ln 2-\frac{1}{3}\right)-\frac{\alpha}{2}\left(\frac{2}{\beta}+4\ln\beta-2\right)-\lambda\ln 2\beta$$

Как видно из полученных формул, оставляя члены первого порядка по η, λ, α, получим, что увеличение η и λ увеличивает R, в то время как увеличение α уменьшает силу сопротивления, кроме того, члены второго порядка имеют большие коэффициенты при $\beta \approx 0$. Поэтому сходимость рядов по η, λ, α вызывает сомнение, и (2.8) следует понимать лишь как асимптотическое разложение.

Институт механики АН Армянской ССР
Артикский индустриально-технологический техникум

Поступила 25 X 1979

Ս. Գ. ԱՎԱԳՅԱՆ, Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ

ԿՇԻՌ ՈՒՆԵՑՈՂ ՀԵՂՈՒԿԻ ՄԵՋ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ԹԱՓԱՆՑՄԱՆ ՈՐՈՇ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Ամփոփում

Դիտարկվում են բարակ պինդ մարմնի կշիռ ունեցող անսեղմելի հեղուկի մեջ թափանցելու վերաբերյալ խնդիրներ։ Սկզբում լուծվել է խնդիրը ազատ մակերևույթով հեղուկի համար։ Գտնվել է ճնշման բաշխումը մարմնի վրա և դիմադրության ուժի արտահայտությունը ինտեգրալի տեսքով։ Վերածելով ըստ $\eta = \frac{gt}{v_0}$ պարամետրի, որտեղ t-ն ժամանակն է, g-ն ծանրության ուժի արագացումն է, v_0-ն ներթափանցման արագությունն է, նշված մեծությունները ստացվել են մինչև η^4 ճշտությամբ։

Լուծվել է նաև այն խնդիրը, երբ հեղուկը ծածկված է թաղանթով։

Ցույց է տրված, որ ըստ η, λ, α պարամետրերի առաջին կարգի վերլուծության մեջ, որտեղ λ-պարամետրը բնութագրում է թաղանթի խտությունը, իսկ α-ն նրա ձգվածությունը, η-ն և λ-ն մեծացնում են, իսկ α-ն փոքրացնում է դիմադրության ուժը։

SOME PROBLEMS IN PENETRATION OF BODIES INTO HEAVY FLUID

S. G. AVAGIAN, A. G. BAGDOEV

Summary

Some problems in penetration of a thin rigid body into heavy incompressible fluid are considered. Initially the problem for a fluid of free surface is solved. The pressure distribution over the body and the value of resistance force are found in a quadrature form. The expansion into parameter $\eta = \frac{gt}{v_0}$, where t is the time, g is the acceleration of gravity, V is the penetration speed, allows to obtain the foregoing values to the accuracy of η^4. The problem of penetration into fluid bounded by an elastic membrane is also solved. It is shown that in the first order expansion into powers of η, λ, α, where parameter λ characterizes the membrane's density, and α is its tension, the presence of η and λ increases, and the presence of α decreases the resistance force.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Григорян С. С.* Некоторые задачи гидродинамики тонких тел. Канд. дисс., МГУ, 1956.
2. *Сагомонян А. Я.* Проникание. М., Изд. МГУ, 1974.
3. *Багдоев А. Г.* Пространственные нестационарные движения сплошной среды с ударными волнами. Ереван, Изд. АН Арм. ССР, 1961.
4. *Багдоев А. Г., Мартиросян А. К., Саркисян Г. А.* Решение некоторых нестационарных задач взаимодействия тел с упругими преградами. МТТ, 1978, № 3.
5. *Уизем Дж. Б.* Линейные и нелинейные волны. М., «Мир», 1977.
6. *Багдоев А. Г.* Определение окрестности фронтов волн в пространственной задаче. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1977, т. XXX, № 6.
7. *Карпман В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. Новосибирск, «Наука», 1973.