ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXIII, № 4, 1980 Механика

Н. Х. АРУТЮНЯН, В. Б. КОЛМАНОВСКИЙ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕОДНОРОДНО ВЯЗКО-УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ

На конечном и бесконечном интервалах времени исследуется устойчивость стержней, свойства которых описываются уравнениями теории вязкоупругости неоднородно стареющих сред [1, 2]. Используя метод, развитый в статье [3], устанавливаются условия устойчивости для стержней, находящихся под действием распределенной продольной нагрузки. Примером такого вида нагрузки является собственный вес стержня.

Сформулированная ниже постановка задачи устойчивости на конечном интервале времени исходит из определений устойчивости движения динамических систем, берущих свое начало с работы Н. Г. Четаева [4].

Отметим, что в [3] изучались такие типы нагрузок и способы закрепления концов стержня, когда в соответствующей упругой задаче дифференциальное уравнение для прогибов имело лишь второй порядок.

В настоящей работе условия устойчивости устанавливаются для ситуаций, когда в соответствующей упругой задаче дифференциальное уравнение для прогибов стержня имеет, вообще говоря, порядок выше второго. При этом условия устойчивости получаются в результате изучения счетной системы уравнений, определяющей коэффициенты Фурье в разложении прогиба в ряд по собственным функциям упругой задачи.

Обзор и библиография работ, посвященных проблеме устойчивости вязкоупругих стержней, имеются в [5—8].

§ 1. *Устойчивость под действием собственного веса на бесконечном интервале времени.* Рассмотрим неоднородно-стареющий стержень длины l, расположенный в недеформированном состоянии вдоль оси ox. Нижний конец стержня ($x = l$) заделан, а верхний свободен (фиг. 1). Обозначим через $y(t, x)$ прогиб стержня в точке x в момент времени $t \geqslant t_0$, отсчитываемый от оси ох. Начальную погибь при $t = t_0 - 0$ обозначим через $y_0(x)$. Функция $y_0(x)$ задана и имеет три непрерывных производных при $x \in [0, l]$. Стержень называется устойчивым, если выполнено условие

$$\sup_{t > t_0,\ x \in [0, l]} |y(t, x)| < \infty \tag{1.1}$$

то есть прогиб равномерно ограничен.

Уравнение для прогиба $y(t, x)$ стержня из неоднородно вязко-упругого материала имеет вид [3].

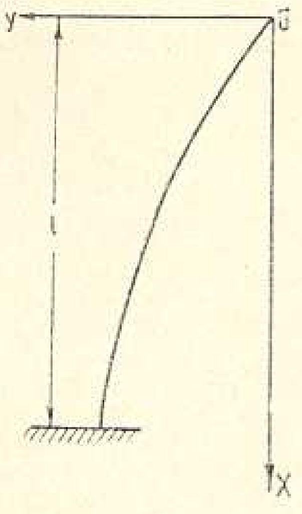
$$L_1(y, M) = \frac{\partial^2 y(t, x)}{\partial x^2} + \frac{1}{EJ} M(t, x) -$$
$$- \frac{1}{J} \int_{t_0}^{t} M(\tau, x) \frac{\partial}{\partial \tau} [\varphi(\tau + \rho(x))(1 - e^{-\gamma(t-\tau)})] \, d\tau = \frac{d^2 y_0(x)}{dx^2} \tag{1.2}$$

Здесь $M(t, x)$ — изгибающий момент в сечении x; положительная непрерывно дифференцируемая функция $\varphi(\tau)$ определяет процесс старения материала. Предполагается, что

$$\lim_{\tau \to \infty} \varphi(\tau) = C_0, \quad \lim_{\tau \to \infty} \dot{\varphi}(\tau) = 0$$

Постоянная $C_0 > O$ характеризует меру ползучести материала стержня в его старом возрасте. Функция $\rho(x)$ называется функцией неоднородного старения. Она определяет закон изменения возраста материала по длине стержня. В этом параграфе считается, что функция $\rho(x)$ ограничена, кусочно непрерывно дифференцируема и имеет конечное число точек разрыва. Постоянная $\gamma > 0$ задана, E — модуль упруго-мгновенной деформации, J — момент инерции стержня относительно продольной оси. Поперечные сечения стержня одинаковы и одинаково ориентированы. Граничные условия имеют вид

$$y(t, 0) = 0, \qquad \frac{\partial^2 y(t, 0)}{\partial x^2} = 0$$
$$\frac{\partial y(t, l)}{\partial x} = 0 \tag{1.3}$$



Фиг. 1.

Пусть g — постоянная продольная нагрузка (в частности, собственный вес стержня на единицу его длины). Тогда изгибающий момент $M(t, x)$ в сечении x равен

$$M(t, x) = g \int_0^x (y(t, x) - y(t, z)) \, dz \tag{1.4}$$

Из (1.2) с помощью двукратного дифференцирования по t получим

$$L_2(y, M) = \frac{\partial^4 y(t, x)}{\partial x^2 \partial t^2} + \gamma \frac{\partial^3 y(t, x)}{\partial x^2 \partial t} + \frac{1}{EJ} \frac{\partial^2 M(t, x)}{\partial t^2} +$$
$$+ \frac{\gamma}{EJ} \frac{\partial M(t, x)}{\partial t} [1 + E\varphi(t + \rho(x))] = 0 \tag{1.5}$$

Начальные условия (то есть прогиб $y(t_0, x)$ и производная $\partial y(t, x)/\partial t$

при $t=t_0$) для уравнения (1.5) вытекают из (1.3), (1.4) и соотношений

$$\frac{\partial^2 y(t_0, x)}{\partial x^2}+\frac{1}{EJ}M(t_0, x)=\frac{d^2 y_0(x)}{dx^2} \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial^3 y(t_0, x)}{dx^2\partial t}+\frac{1}{EJ}\frac{\partial M(t_0, x)}{\partial t}=-\frac{\gamma}{J}\varphi(t_0+\rho(x))\,M(t_0, x) \tag{1.7}$$

Обозначим через $\psi_n(x)$ последовательность собственных функций, а через λ_n— соответствующую последовательность собственных значений краевой задачи

$$\begin{gathered}\frac{d^2\psi_n(x)}{dx^2}+\lambda_n x\psi_n(x)=0\\ \psi_n(l)=0, \qquad \frac{d\psi_n(0)}{dx}=0\end{gathered} \tag{1.8}$$

Разложим производную $\dfrac{\partial y(t, x)}{\partial x}$ в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по ортонормированным в обобщенном смысле [9] функциям $\psi_n(x)$*

$$\frac{\partial y(t, x)}{\partial x}=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(t)\psi_n(x) \tag{1.9}$$

$$A_n(t)=\int_0^l\frac{\partial y(t, x)}{\partial x}\psi_n(x)\,x\,dx \tag{1.10}$$

$$\int_0^l\psi_n(x)\psi_m(x)\,x\,dx=\delta_{mn} \tag{1.11}$$

где δ_{mn} — символ Кронекера.

Подставим (1.9) в (1.5), продифференцируем обе части полученного по x, далее умножим на $\psi_m(x)$ и проинтегрируем по x в пределах от нуля до l.

В результате получим следующую систему дифференциальных уравнений для определения коэффициентов $A_n(t)$ в разложении (1.9)

$$\begin{gathered}(\ddot{A}_n+\gamma\dot{A}_n)\mu_n+E\gamma C_0\dot{A}_n+\gamma E\sum_{m=0}^{\infty}\dot{A}_m(t)\beta_{mn}(t)=0\\ \mu_n=1-\frac{EJ}{g}\lambda_n\end{gathered} \tag{1.12}$$

Здесь положено

* Возможность разложения (1.9) и правомерность почленного дифференцирования этого рода нетрудно установить подобно [3].

$$\overline{\beta}_{mn} = \int_0^l x\psi_m(x)\,\psi_n(x)\,\varphi(t+\rho(x))\,dx +$$

$$+\int_0^l \psi_n(x)\left[\int_0^x dz \int_z^x \psi_m(\xi)\,d\xi\right] d_x\varphi(t+\rho(x)) \tag{1.13}$$

$$\beta_{mn} = \overline{\beta}_{mn} - C_0\delta_{mn}$$

Последний интеграл в (1.13) понимается в смысле Стильтьеса.

Запишем начальные условия для системы (1.12). Для этого продифференцируем (1.6) и (1.7) по x, подставим в полученное (1.9) и проинтегрируем в пределах от нуля до l. С учетом (1.10) получаем

$$A_n(t_0) = -A_n^0\lambda_n \frac{EJ}{g}\mu_n^{-1}$$

$$A_n^0 = \int_0^l \frac{dy_0(x)}{dx}\psi_n(x)\,x\,dx \tag{1.14}$$

$$\dot{A}_n(t_0) = -E\gamma\mu_n^{-1}\sum_{m=0}^{\infty} A_m(t_0)\,\overline{\beta}_{mn}(t_0) \tag{1.15}$$

Потребуем, чтобы было справедливо неравенство

$$g(1+EC_0) < EJ\lambda_0 \tag{1.16}$$

Здесь через λ_0 обозначено минимальное собственное значение краевой задачи (1.8), равное $7.8373\ l^{-3}$. Собственное значение λ_n краевой задачи (1.8) определяется уравнением

$$J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\lambda_n l^3}\right) = 0$$

где $J_{-1/3}$ — функция Бесселя первого ряда порядка $-1/3$ (см., например, [10] § 64).

Используя представление функции Бесселя для больших значений аргумента, заключаем, что имеет место асимптотическая формула

$$\lambda_n = C_1 n^2, \quad n \to \infty \tag{1.17}$$

где C_1 — некоторая положительная постоянная.

Неравенство (1.16) будет выполнено, если длина вязко-упругого стержня l удовлетворяет условию

$$l < 1.9863\sqrt[3]{\frac{EJ}{g(1+EC_0)}} \tag{1.18}$$

Назовем длину l, равную правой части (1.18), критической длиной вязко-упругого стержня при длительном действии собственного веса

$$l_{\text{кр.}} = 1.9863 \sqrt[3]{\frac{EJ}{g(1+EC_0)}} \tag{1.19}$$

Методом, развитым в [3], можно показать, что из (1.16) или (1.18) следует (1.1), то есть устойчивость неоднородно вязко-упругого стержня под действием собственного веса на бесконечном интервале времени.

При этом неравенства (1.16) или (1.18) являются не только достаточными, но и необходимыми условиями устойчивости для таких стержней, то есть, если

$$1.9863 \sqrt[3]{\frac{EJ}{g(1+EC_0)}} < l < 1.9863 \sqrt[3]{\frac{EJ}{g}} \tag{1.20}$$

то стержень неустойчив, так как неравенство (1.1) в этом случае нарушается.

Таким образом, для рассматриваемой здесь задачи критическая длина вязко-упругого стержня $l_{\text{кр}}$, определяемая формулой (1.19), оказывается независящей от функции $\rho(x)$, характеризующей неоднородность старения материала в вязко-упругом стержне. Отметим, что это не имеет места при рассмотрении устойчивости на конечном интервале. В этом случае условия устойчивости для вязко-упругого стержня существенно зависят от функции $\rho(x)$.

§ 2. *Устойчивость под действием собственного веса на конечном интервале времени.*

1°. Возможны различные постановки задачи устойчивости на конечном интервале времени.

Одна из них состоит в определении ограничений на начальную погибь, при выполнении которых на заданном фиксированном интервале времени $[t_0, T]$ прогиб не превосходит предельно допустимого значения y^*, то есть справедливо неравенство

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant l} \max_{t_0 \leqslant t \leqslant T} |y(t, x)| \leqslant y^* \tag{2.1}$$

Приведем некоторые оценки, представляющие собой достаточные условия справедливости неравенства (2.1). Ясно, что для справедливости (2.1) достаточно наложить такие ограничения, при выполнении которых будет

$$\left| \int_x^l \frac{\partial y(t, s)}{\partial s} ds \right| \leqslant y^*$$
$$t_0 \leqslant t \leqslant T, \quad 0 \leqslant x \leqslant l \tag{2.2}$$

Оценим подынтегральное выражение в (2.2) через исходные данные задачи, то есть начальную погибь, параметры T, l, упругие и реологические характеристики материала стержня.

Обозначим через $G(x, \xi)$ функцию Грина задачи (1.8) при $\lambda_n = g(EJ)^{-1}$, существующую ввиду предположения (1.16). Продифференцируем далее обе части (1.2) по x. С учетом (1.4) убеждаемся в справедливости следующего представления для производной $\partial y(t, x)/\partial x$

$$\frac{\partial y(t, x)}{\partial x} = \int_0^l G(x, \xi) \frac{d^3 y_0(\xi)}{d\xi^3} d\xi +$$

$$+ \frac{1}{J} \int_0^l G(x, \xi)\, d\xi \int_{t_0}^{t} M(\tau, \xi) \frac{\partial}{\partial \tau} [\varphi(\tau + \rho(\xi)) (1 - e^{-\gamma(t-\tau)})]\, d\tau =$$

$$= Q_0(x) + \frac{1}{J} Q_1(x, t) \qquad (2.3)$$

Исследуем далее подробно функцию $Q_1(x, t)$ в формуле (2.3). Заметим, что $M(\tau, 0) = 0$ в силу (1.4). Кроме того, ввиду самосопряженности краевой задачи (1.8) функция Грина G симметрична, то есть $G(x, \xi) = G(\xi, x)$. Значит, $G(x, l) = 0$. Поэтому, интегрируя по частям по ξ и τ, имеем

$$Q_1(x, t) = \int_0^l G(x, \xi)\, d\xi \int_{t_0}^{t} M(\tau, \xi) \frac{\partial}{\partial \tau} [\varphi(\tau + \rho(\xi)) (1 - e^{-\gamma(t-\tau)})]\, d\tau =$$

$$= -\int_0^l (d_\xi G(x, \xi)) \int_{t_0}^{t} M(\tau, \xi) \frac{\partial}{\partial \tau} [\varphi(\tau + \rho(\xi)) (1 - e^{-\gamma(t-\tau)})]\, d\tau =$$

$$= \int_0^l M(t_0, \xi)\, \varphi(t_0 + \rho(\xi)) (1 - e^{-\gamma(t-t_0)})\, d_\xi G(x, \xi) +$$

$$+ \int_0^l (d_\xi G(x, \xi)) \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau + \rho(\xi)) (1 - e^{-\gamma(t-\tau)}) \frac{\partial M(\tau, \xi)}{\partial \tau}\, d\tau \qquad (2.4)$$

Для оценки $M(t_0, x)$ положим $t = t_0$ в (2.3). На основании (1.3) имеем

$$y(t_0, x) = \int_0^x \frac{\partial y(t_0, \xi)}{\partial \xi} d\xi = \int_0^x d\xi_1 \int_0^l G(\xi_1, \xi) \frac{d^3 y_0(\xi)}{d\xi^3} d\xi \qquad (2.5)$$

Подставляя (2.5) в (1.4), получаем интересующее нас выражение для $M(t_0, x)$. Для оценки второго слагаемого в (2.4) введем в рассмотрение скалярную функцию $V(t)$, равную

$$V(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \dot{A}_n^2(t)$$

Заметим, что

$$\frac{\partial M(\tau, \xi)}{\partial \tau} = \int_0^{\xi} \frac{\partial^2 M(\tau, z)}{\partial \tau \partial z}\, dz = g \int_0^{\xi} z \frac{\partial^2 y(\tau, z)}{\partial \tau \partial z}\, dz$$

Поэтому, используя неравенство Коши—Буняковского и равенство Парсеваля, получаем

$$\left| \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau + \rho(\xi))\left(1 - e^{-\gamma(t-\tau)}\right) \frac{\partial M(\tau, \xi)}{\partial \tau}\, d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \int_{t_0}^{t} d\tau \int_0^{l} z \left| \frac{\partial^2 y(\tau, z)}{\partial \tau \partial z} \right| dz \leqslant C_3 \int_{t_0}^{t} d\tau \left[\int_0^{l} z \left| \frac{\partial^2 y(\tau, z)}{\partial \tau \partial z} \right|^2 dz \right]^{1/2} =$$

$$= C_3 \int_{t_0}^{t} V(\tau)\, d\tau \qquad (2.6)$$

В (2.6) положено

$$C_2 = g \max_{t,\, x} \varphi(t + \rho(x)), \quad C_3 = \frac{1}{2} C_2 l^2$$

Далее, с учетом (1.12) имеем

$$\dot V(t) + 2\gamma(1 + EC_0) V(t) = -2\gamma E \sum_{n=0}^{\infty} \dot A_n(t) \mu_n^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} \dot A_m(t) \beta_{mn}(t) = Q(t) \qquad (2.7)$$

Подобно выводу соотношения (1.19) из [3] можно показать, что

$$|Q(t)| \leqslant V(t) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \mu_n^{-2} \beta_{mn}^2(t) \right]^{1/2} \qquad (2.8)$$

Интегрируя по частям в (1.13), с учетом граничных условий (1.8), получаем, что

$$\overline{\beta}_{mn}(t) = -\int_0^{l} \varphi(t + \rho(x))\,(d\psi_n(x)) \int_0^{x} x_1 \psi_m(x_1)\, dx_1 =$$

$$= -\int_0^{l} x \psi_m(x)\, dx \int_x^{l} \varphi(t + \rho(x_1))\, d\psi_n(x_1)$$

Отсюда и из равенства Парсеваля вытекает неравенство

$$\sum_{m=0}^{\infty} \beta_{mn}^2(t) = \int_0^{l} x\, dx \left(\int_x^{l} (\varphi(t + \rho(x_1)) - C_0)\, d\psi_n(x_1) \right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant C_4 \int_0^{l} \left| \frac{d\psi_n(x)}{dx} \right|^2 dx \qquad (2.9)$$

$$\varphi_2(t) = \max_{0<x<l} |\varphi(t+\rho(x)) - C_0|^2, \qquad \frac{l^2}{2} = C_4$$

Для оценки интеграла в правой части (2.9) умножим обе части (1.8) на $\psi_n(x)$ и проинтегрируем по x в пределах от нуля до l. Имеем

$$\int_0^l \psi_n(x) \frac{d^2\psi_n(x)}{dx^2} dx = \psi_n(x) \frac{d\psi_n(x)}{dx}\Big|_0^l - \int_0^l \left| \frac{d\psi_n(x)}{dx} \right|^2 dx = \lambda_n$$

Следовательно,

$$\int_0^l \left| \frac{d\psi_n(x)}{dx} \right|^2 dx = \lambda_n \tag{2.10}$$

Подставляя (2.9), (2.10) в (2.8), получаем

$$Q \leqslant V(t)\zeta(t), \qquad \zeta(t) = \left| C_2\varphi_1(t) \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \mu_n^{-2} \right|^{1/2} \tag{2.11}$$

Отметим, что ряд в (2.11) сходится на основании асимптотической формулы (1.17) и требования (1.16).

Из (2.7), (2.11) вытекает, что

$$\dot V(t) \leqslant (-2\gamma(1 + EC_0) + \zeta(t)) V(t) = \zeta_1(t) V(t)$$

Значит,

$$V(t) \leqslant V(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \zeta_1(s) ds \right) \tag{2.12}$$

Оценим, накоонец, $V(t_0)$. Ввиду (1.14) и равенства Парсеваля имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^2(t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n^0)^2 \left(\lambda_n \frac{EJ}{g} \mu_n^{-1} \right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \max_m \left(\lambda_m \frac{EJ}{g} \mu_m^{-1} \right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (A_n^0)^2 = C \int_0^l x \left(\frac{dy_0(x)}{dx} \right)^2 dx$$

Кроме того, на основании (2.9), (2.10) будет

$$\sum_{m=0}^{\infty} \overline{\varphi}_{mn}^2(t_0) \leqslant C_2\lambda_n \max_{0<x<l} |\varphi(t_0 + \rho(x))|^2 = \lambda_n \zeta_2(t_0)$$

Следовательно,

$$V(t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \dot A_n(t_0)^2 \leqslant E^2\gamma^2 \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} A_k^2(t_0) \sum_{m=0}^{\infty} \overline{\varphi}_{mn}^2(t_0) \leqslant$$

$$\leqslant E^2\gamma^2\lambda_n\zeta_2(t_0) \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n^{-2} C_2 \int_0^l x \left(\frac{dy_0(x)}{dx} \right)^2 dx \tag{2.13}$$

Оценка функции $Q_1(x, t)$ через исходные данные задачи установлена. Эта оценка дается выражением (2.4), в котором $M(t_0, x)$ определяется соотношениями (1.4), (2.5), а функция V оценена с помощью (2.12), (2.13). Таким образом, ввиду (2.3) оценена через исходные данные задачи и производная $\partial y(t, x)/\partial x$. С учетом (2.2) окончательно заключаем, что если параметры задачи таковы, что

$$\int_{s}^{t} \left| Q_0(s) + \frac{1}{J} Q_1(s, t) \right| ds \leqslant y^*, \qquad \begin{matrix} t_0 \leqslant t \leqslant T \\ 0 \leqslant x \leqslant l \end{matrix}$$

то имеет место устойчивость вязко-упругого стержня на конечном интервале времени.

2°. Другая постановка задачи устойчивости на конечном интервале состоит в определении первого момента времени t_1 (именуемого критическим), в который максимальное значение прогиба достигнет предельно допустимой величины y^*, то есть

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant l} |y(t_1, x)| = y^*$$

Приведем одну оценку снизу величины t_1. Обозначим через $\varkappa_1(t)$ функцию

$$\varkappa_1(t) = \int_0^l \left[\left| \int_0^l G(x, \xi) \frac{d^3 y_0(\xi)}{d\xi} d\xi \right| + \frac{1}{J} \int_0^l \left| M(t_0, \xi) \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \varphi(t_0 + \rho(\xi))(1 - e^{-\gamma(t-t_0)}) d_\xi G(x, \xi) \right| \right] dx$$

Здесь $M(t_0, x)$ дается выражениями (2.5), (1.4). Обозначим далее через $\varkappa_2(t)$ функцию

$$\varkappa_2(t) = C_{\frac{3}{J}} \int_0^l dx \int_0^l |d_\xi G(x, \xi)| V(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t \psi_1(s) ds \right)$$

где $V(t_0)$ оценена в (2.13). Функции $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ монотонно не убывают. Кроме того,

$$|y(t, x)| \leqslant \varkappa_1(t) + \varkappa_2(t)$$

Поэтому, если существует при $t \geqslant t_0$ корень $\overline{t_1}$ уравнения

$$\varkappa_1(t) + \varkappa_2(t) = y^*, \quad t \geqslant t_0$$

то критическое время t_1 удовлетворяет оценке $t_1 \geqslant \overline{t_1}$. При этом на интервале времени $[t_0, \overline{t_1}]$ прогиб не превосходит предельно допустимого значения y^*.

§ 3. Сформулируем в этом параграфе условия устойчивости вязко-упругих стержней для иных ситуаций. Обоснование этих условий получается с помощью модификации рассуждений настоящей работы. По этой причине доказательства не приводятся, а дается лишь постановка задачи и результат. Устойчивость всюду понимается в смысле справедливости неравенства (1.1). Уравнение для прогибов имеет вид (1.2). В каждом конкретном случае меняются лишь граничные условия (в зависимости от вида закрепления концов стержня) и уравнения для изгибающего момента.

1) Рассмотрим подобно § 1 вязко-упругий стержень с защемленным нижним концом при подвижной заделке верхнего конца (см. [10] стр. 282). Граничные условия для прогиба имеют вид

$$\frac{\partial y(t,0)}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial^2 y(t,0)}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial y(t,l)}{\partial x}=0$$

Стержень находится под действием собственного веса с постоянной продольной нагрузкой g. Условие устойчивости имеет вид (1.16) при $\lambda_0=18.99\, l^{-3}$.

2) Вновь рассмотрим стержень под действием собственного веса при подвижной заделке верхнего конца и шарнирном опирании нижнего. Граничные условия даются соотношениями

$$\frac{\partial y(t,0)}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial^2 y(t,0)}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial^2 y(t,l)}{\partial x^2}=0$$

Условие устойчивости дается формулой (1.16) при $\lambda_0=3.524\, l^{-3}$.

3) В рассмотренных выше ситуациях возмущение положения равновесия было вызвано начальной погибью стержня. Другим источником возмущений может служить боковая нагрузка. Однако, если боковая нагрузка стационарна (то есть не зависит от времени, а может зависеть лишь от x), то условия устойчивости нетрудно получить из установленных ранее. Разъясним сказанное на примере стержня, изученного в § 1. Наряду с предположениями из § 1 считается, что на стержень действует поперечная нагрузка $q(x)$, где $q(x)$ — ограниченная кусочно-непрерывная функция. Устойчивость, по-прежнему, понимается в смысле выполнения неравенства (1.1). Уравнение для прогиба имеет вид (1.2), в котором вместо M надлежит написать сумму $M+M_1$. Здесь M дается формулой (1.4), а M_1 определяется соотношениями

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 M_1(x)}{\partial x^2}=-q(x)\\ M_1(l)=-\int_0^l xq(x)\,dx,\quad \frac{\partial M_1(l)}{\partial x}=\int_0^l q(x)\,dx\end{gathered}\tag{3.1}$$

Из формул (3.1), интегрируя по частям в (1.2), заключаем, что

$$L_1(y,\ M) = \frac{d^2 y_0(x)}{dx^2} - \frac{1}{JE} M_1(x) -$$
$$- \frac{1}{J} M_1(x)\, \varphi(t_0 + \rho(x))\,(1 - e^{-\gamma(t-t_0)}) \tag{3.2}$$

Здесь $L_1(y,\ M)$ определено уравнением (1.2). В результате двукратного дифференцирования по t обеих частей соотношения (3.2), подобно выводу (1.5), получим

$$L_2(y,\ M) = \frac{\gamma^2}{J} M_1(x)\, \varphi(t_0 + \rho(x))\, e^{-\gamma(t-t_0)} \tag{3.3}$$

Уравнение (3.3) отличается от (1.5) наличием правой части, стремящейся к нулю при $t \to \infty$. Используя этот факт, можно показать, что решение задачи (3.3), (1.6), (1.7) удовлетворяет оценке (1.1) при выполнении условия (1.16). Таким образом, и при наличии поперечной нагрузки требование (1.1) является достаточным условием устойчивости.

Институт механики АН Армянской ССР
Институт проблем механики АН СССР

Поступила 22 XII 1979

Ն. Խ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, Վ. Բ. ԿՈԼՄԱՆՈՎՍԿԻ

ՈՉ ՀԱՄԱՍԵՌ ՄԱԾՈՒՑԻԿԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՁՈՂԵՐԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Ժամանակի վերջավոր և անվերջ միջակայքերի վրա ուսումնասիրվում է այնպիսի ձողերի կայունությունը, որոնց հատկությունները նկարագրվում են անհամասեռ ծերացող միջավայրերի մածուցիկառաձգականության տեսության հավասարումներով։

Երկայնական բաշխված բեռի ազդեցության տակ գտնվող ձողերի համար որոշվում են կայունության պայմանները։ Այդպիսի բեռի օրինակ է հանդիսանում ձողի սեփական կշիռը։

ON STABILITY OF HETEROGENEOUSLY VISCO-ELASTIC BARS

N. Ch. HARUTUNIAN, V. B. KOLMANOVSKY

Summary

The stability of bars, whose properties are described by equations in the theory of visco-elasticity of heterogeneously ageing media, is investigated over finite and infinite time intervals.

The conditions of stability are defined for the bars subjected to the action of a distributed longitudinal load. The bar's intrinsic weight is an example of a load of this kind.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые задачи теории ползучести для неоднородно стареющих тел. Изв. АН СССР, МТТ, 1976, № 2.
2. *Арутюнян Н. Х.* О теории ползучести для неоднородно наследственно стареющих сред. ДАН СССР, 1976, т. 229, № 3.
3. *Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б.* Об устойчивости неоднородно стареющих вязкоупругих стержней. ПММ, 1979, т. 43, вып. 4.
4. *Четаев Н. Г.* Об одной мысли Пуанкаре. Сб. науч. тр. Казанского авиационного института, 1935, № 3.
5. *Работнов Ю. Н.* Теория ползучести. В сб. «Механика в СССР за 50 лет». М., «Наука», 1972, т. 3.
6. *Шестериков С. А.* О критерии устойчивости при ползучести. ПММ, 1961, т. 25, вып. 4.
7. *Куршин Л. М.* Устойчивость при ползучести. Изв. АН СССР, МТТ, 1978, № 3.
8. *Ржаницын А. Р.* Теория ползучести. М., «Стройиздат», 1968.
9. *Коллатц А.* Задачи на собственные значения. М., «Наука», 1968.
10. *Ржаницын А. Р.* Устойчивость равновесия упругих систем. М., «Гостехиздат», 1955.
11. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М., «Наука», 1977.