ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXIII, № 4, 1980 Механика

М. Л. БУРЫШКИН

ОБ ИЗГИБЕ СИММЕТРИЧНОЙ ГУСТОПЕРФОРИРОВАННОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ

1. В данной работе изучается рациональный подход к расчету несимметричного напряженно-деформированного состояния изогнутой густоперфорированной ортотропной пластинки, занимающей область Ω плоскости $x0y$ и обладающей группой G симметрии [1]. Для компактности формул предполагается, что в элементарной ячейке пластинки расположено лишь одно (основное) отверстие или ядро с контуром Γ ($t \in \Gamma$ — точка этого контура). Приняты такие обозначения: $g \in G$ — элемент симметрии, C_m ($m=0,\ 1$) — поворот вокруг начала координат на угол $m\pi$, θ — отражение относительно оси x, $T_{m_1m_2}$ ($m_1,\ m_2 = 0,\ \pm 1,\ldots$) — трансляция (сдвиг) на вектор $m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2$, $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ — основные векторы ($a_1 = a_{11} + ia_{12}$, $a_2 = a_{21} + ia_{22}$ — соответствующие комплексные числа), μ_j ($j = 1,\ 2$) — комплексные параметры С. Г. Лехницкого, $\mu_2 = -\bar{\mu}_1$,

$$z = x + iy, \quad z_j = x + \mu_j y \tag{1.1}$$

Ω_j и Γ_j ($j=1,\ 2$) — область и контур, получающиеся из Ω и Γ j-м аффинным преобразованием координат, которое отвечает переходу (1.1) от точки z к точка z_j, $t_j \in \Gamma_j$ — точка контура Γ_j.

Известно, что напряженно-деформированное состояние изогнутой пластинки описывается комплексными потенциалами С. Г. Лехницкого, то есть функциями $w_j(z_j)$ ($j=1,\ 2$), аналитическими в Ω_j [2, 3]. В частности, прогиб ортотропной пластинки в точке z вычисляется по формуле

$$w(z) = 2\,\mathrm{Re}\,[w_1(z_1) + w_2(z_2)] \quad z \in \Omega \tag{1.2}$$

Комплексные потенциалы $w_j(z_j)$ определяются из системы уравнений, состоящей из граничных условий на всех n контурах пластинки (вообще говоря, число n может быть и бесконечно большим). Если $\Gamma^{(s)}$ ($s=1,\ 2,\ldots,\ n$) — контур с номером s, а $t^{(s)}$ — его точка, то такая система имеет вид

$$\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{2} r_{jp}^{(s)} w_j'(t_j^{(s)}) = f_p^{(s)}(t^{(s)}) \quad (p=1,\ 2;\ s=1,\ 2,\ldots,\ n) \tag{1.3}$$

где $r_{jp}^{(s)}$ — некоторые коэффициенты, зависящие от типа граничных условий на контуре $\Gamma^{(s)}$ и от параметров μ_j, $f_p^{(s)}(t^{(s)})$ — функции, которые определены на этом контуре и с заранее известным произволом вычисляются по заданной нагрузке.

Так как порядок разрешающей системы (1.3) и сложность структуры искомых функций увеличиваются с ростом числа n, то для достаточно большого n решение поставленной задачи оказывается весьма затруднительным. Исключением из этого являются симметричные задачи, в которых нагрузка пластинки обладает теми же симметричными свойствами, что и упруго-геометрические характеристики.

Подход, предлагаемый в данной работе и опирающийся на результаты прикладной теории представлений групп [4—6], позволяет после определенного обобщения обычных симметричных задач применять эффективные методы их решения [2] и для нагрузок достаточно общего вида, которые не обладают указанными симметрическими свойствами.

2. Пусть $\tau_{k\nu}$ — вещественное неприводимое $m_{k\nu}$ — мерное представление группы G (k — индекс звезды представления, ν — номер представления со звездой $\{k\}$) [1]; $\tau_{k\nu}(g)$ — матрица этого представления, отвечающая элементу g (ее порядок равен $m_{k\nu}$), $\tau_{k\nu\mu\rho}(g)$ ($\mu, \rho = 1, 2, \ldots, m_{k\nu}$) — $\mu\rho$-ый элемент матрицы $\tau_{k\nu}(g)$. Тогда будем говорить, что набор, который состоит из $m_{k\nu}$ функций $F_{k\nu\rho}$ ($\rho = 1, 2, \ldots, m_{k\nu}$), определенных на Ω и записанных в инвариантной системе отсчета [6], преобразуется по неприводимому представлению $\tau_{k\nu}$, если

$$F_{k\nu\mu}(gz) = \sum_{\rho=1}^{m_{k\nu}} \tau_{k\nu\mu\rho}(g) F_{k\nu\rho}(z) \quad \forall g \in G, \quad \forall z \in \Omega \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m_{k\nu}) \tag{2.1}$$

Задачу расчета напряженно-деформированного состояния симметричной пластинки при нагрузке $Q_{k\nu\mu}$ назовем обобщенной симметричной задачей изгиба. Ее важной особенностью является то, что набор, составленный из одноименных компонент тех состояний, которые отвечают нагрузкам $Q_{k\nu\rho}$ ($\rho = 1, 2, \ldots, m_{k\nu}$), также преобразуется по неприводимому представлению $\tau_{k\nu}$ [6]. В частности, прогибы $w_{k\nu\rho}$ ($\rho = 1, 2, \ldots, m_{k\nu}$), возникающие при нагрузках $Q_{k\nu\rho}$, обладают свойствами (2.1), то есть

$$w_{k\nu\mu}(gz) = \sum_{\rho=1}^{m_{k\nu}} \tau_{k\nu\mu\rho}(g)\, w_{k\nu\rho}(z) \tag{2.2}$$

Указанное обстоятельство накладывает на соответствующие комплексные потенциалы $w_{jk\nu\mu}(z_j)$ ($j = 1, 2$) серьезные ограничения. Действительно, для любого элемента g симметрии пластинки в любой точке $z \in \Omega$ потенциалы $w_{jk\nu\mu}(z_j)$ ($\mu = 1, 2, \ldots, m_{k\nu}$) должны удовлетворять равенствам, получающимся из (2.2) и (1.2)

$$\operatorname{Re}\left[w_{1k\nu\mu}[(gz)_1] + w_{2k\nu\mu}[(gz)_2]\right] =$$

$$= \sum_{\rho=1}^{m_{k\nu}} \tau_{k\nu\mu\rho}(g) \operatorname{Re}\left[w_{1k\nu\rho}(z_1) + w_{2k\nu\rho}(z_2)\right] \tag{2.3}$$

Найдем необходимые для этого свойства функций $w_{jk\nu\mu}(z_j)$ ($j=1, 2$).

Предположим, что $z^{(0)}$ — некоторая внутренняя точка области Ω, δ — круг радиуса R с центром в точке $z^{(0)}$, δ_j ($j=1, 2$) — эллипс, в который j-е аффинное преобразование переводит круг δ. За счет выбора достаточно малого R добьемся, чтобы окружность, описанная вокруг эллипса δ_j, целиком лежала в области Ω_j. Тогда для функции $w_{jk\nu\mu}(z_j)$ имеет место разложение:

$$w_{jk\nu\mu}(z_j) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{jn}^{(\mu)} [z_j - (z^{(0)})_j]^n \qquad z \in \delta \tag{2.4}$$

В силу симметрии пластинки очевидно, что аналогичные рассуждения можно провести и для точки $gz^{(0)}$ ($g \in G$), то есть

$$w_{jk\nu\mu}[(gz)_j] = \sum_{n=0}^{\infty} b_{jn}^{(\mu)} [(gz)_j - (gz^{(0)})_j]^n \quad z \in \delta \tag{2.5}$$

В формулах (2.4) и (2.5) под $a_{jn}^{(\mu)}$ и $b_{jn}^{(\mu)}$ понимаются скалярные коэффициенты, которые связываются между собой условиями (2.3). В самом деле, подставляя разложения (2.4) и (2.5) в (2.3), получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{2} \{b_{jn}^{(\mu)} [(gz)_j - (gz^{(0)})_j]^n + \overline{b_{jn}^{(\mu)}} \overline{[(gz)_j - (gz^{(0)})_j]^n}\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{2} \sum_{\rho=1}^{m_{k\nu}} \tau_{k\nu\mu\rho}(g) \{a_{jn}^{(\rho)} [z_j - (z^{(0)})_j]^n + \overline{a_{jn}^{(\rho)} [z_j - (z^{(0)})_j]^n}\} \tag{2.6}$$

Перебирая всевозможные элементы симметрии и устанавливая взаимосвязь между коэффициентами $a_{jn}^{(\mu)}$ и $b_{jn}^{(\mu)}$, нетрудно выяснить специальные свойства комплексных потенциалов обобщенных симметричных задач. Подробно разберем соответствующую процедуру на примере $g = \theta$. Из равенств (1.1) вытекает, что

$$(\theta z)_j = (\bar{z})_j = \overline{z_{3-j}} \tag{2.7}$$

и, следовательно, выражение (2.6) имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{2} \{b_{jn}^{(\mu)} [\overline{z_{3-j}} - \overline{(z^{(0)})_{3-j}}]^n + \overline{b_{jn}^{(\mu)}} [z_{3-j} - (z^{(0)})_{3-j}]^n\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{2} \sum_{\rho=1}^{m_{k\nu}} \tau_{k\nu\mu\rho}(\theta) \{a_{jn}^{(\rho)} [z_j - (z^{(0)})_j]^n + \overline{a_{jn}^{(\rho)}} [\bar{z}_j - \overline{(z^{(0)})_j}]^n\}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях двучлена $z_j - (z^{(0)})_j$ или $\bar{z}_j - \overline{(z^{(0)})_j}$ из разных частей равенства, найдем, что

$$b_{jn}^{(\mu)} = \sum_{\rho=1}^{m_{k\nu}} \tau_{k\nu\mu\rho}(\theta)\, \overline{a_{3-j,\,n}^{(\rho)}} \quad (j=1,\,2;\ \mu=1,\,2,\,\ldots,\,m_{k\nu};\ n=0,\,1,\,2,\ldots) \tag{2.8}$$

Используя соотношения (2.7) и (2.8), преобразуем формулу (2.5)

$$w_{jk\nu\mu}[(\theta z)_j] = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\rho=1}^{m_{k\nu}} \tau_{k\nu\mu\rho}(\theta)\, \overline{a_{3-j,\,n}^{(\rho)}} \left[\overline{z_{3-j}} - \overline{(z^{(0)})_{3-j}}\right]^n =$$

$$= \sum_{\rho=1}^{m_{k\nu}} \tau_{k\nu\mu\rho}(\theta) \overline{\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_{3-j,\,n}^{(\rho)} \left[z_{3-j} - (z^{(0)})_{3-j}\right]^n \right\}}$$

Выражение, заключенное в фигурные скобки, и правая часть равенства (2.4), записанного для $\mu = \rho$, равны. Поэтому

$$w_{jk\nu\mu}[(\theta z)_j] = \sum_{\rho=1}^{m_{k\nu}} \tau_{k\nu\mu\rho}(\theta)\, \overline{w_{3-j,\,k\nu\rho}(z_{3-j})}$$

Аналогичным образом находятся свойства комплексных потенциалов $w_{jk\nu\mu}$ для элементов симметрии более общего вида, а именно

$$w_{jk\nu\mu}[(T_{m_1 m_2} C_m z)_j] = \sum_{\rho=1}^{m_{k\nu}} \tau_{k\nu\mu\rho}(T_{m_1 m_2} C_m)\, w_{jk\nu\rho}(z_j)$$

$$w_{jk\nu\mu}[(T_{m_1 m_2} C_m \theta z)_j] = \sum_{\rho=1}^{m_{k\nu}} \tau_{k\nu\mu\rho}(T_{m_1 m_2} C_m \theta)\, \overline{w_{3-j,\,k\nu\rho}(z_{3-j})} \tag{2.9}$$

$$\forall z \in \Omega \quad (m = 0,\,1;\ m_1,\, m_2 = 0,\, \pm 1,\, \pm 2, \ldots;\ \mu = 1,\, 2, \ldots,\, m_{k\nu})$$

Остановимся теперь на частном, но весьма важном случае, при котором комплексные потенциалы голоморфны в Ω_j. Тогда для их записи удобно использовать интегралы Коши. Так как границы областей Ω и Ω_j представляют собой соответственно множества контуров $T_{m_1 m_2} h\Gamma$ и $\Gamma_{m_1 m_2 j}^{(h)} = (T_{m_1 m_2} h\Gamma)_j$, где h — один из элементов подгруппы $H = \{C_0,\, C_1,\, \theta,\, C_1\theta\}$, то

$$w_{jk\nu\mu}(z_j) = \lim_{N\to\infty} \sum_{m_1=-N}^{N} \sum_{m_2=-N}^{N} \sum_{m=0}^{1} \left[I_{j\mu m_1 m_2}^{(C_m)}(z_j) + I_{j\mu m_1 m_2}^{(C_m\theta)}(z_j) \right] \tag{2.10}$$

$$I_{j\mu m_1 m_2}^{(h)}(z_j) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{m_1 m_2 j}^{(h)}} \frac{w_{jk\nu\mu}(t_{m_1 m_2 j}^{(h)})\, dt_{m_1 m_2 j}^{(h)}}{t_{m_1 m_2 j}^{(h)} - z_j} \tag{2.11}$$

Заметим, что $t_{m_1 m_2 j}^{(h)} = (T_{m_1 m_2} ht)_j$ — точка контура $\Gamma_{m_1 m_2 j}^{(h)}$ и что выражения (2.10) могут быть записаны в более строгой, но громоздкой форме, которая использовалась в работе [7], посвященной изучению обобщенных симметричных задач для изотропных пластинок. Опираясь на свойства (2.9) и очевидные соотношения типа

$$\overset{(C_m)}{t_{m_1m_2j}} = (-1)^m t_j + A_{m_1m_2j}, \qquad \overset{(C_m\theta)}{t_{m_1m_2j}} = (-1)^m \overline{t_{3-j}} + A_{m_1m_2j} \quad (2.12)$$

$$A_{m_1m_2j} = m_1a_{11} + m_2a_{21} + \mu_j(m_1a_{12} + m_2a_{22})$$

преобразуем интегралы (2.11) следующим образом:

$$\overset{(C_m)}{I_{j\rho m_1m_2}}(z_j) = \sum_{\rho=1}^{m_{k\nu}} \tau_{k\nu\mu\rho}(T_{m_1m_2}C_m)\, W_j^{(\rho)}[(-1)^m(z_j - A_{m_1m_2j})]$$

$$\overset{(C_m\theta)}{I_{j\mu m_1m_2}}(z_j) = \sum_{\rho=1}^{m_{k\nu}} \tau_{k\nu\mu\rho}(T_{m_1m_2}C_m\theta)\, \overline{W_{3-j}^{(\rho)}}[(-1)^m(z_j - A_{m_1m_2j})] \quad (2.13)$$

где $W_j^{(\rho)}(z_j)$ $(\rho = 1, 2, \ldots, m_{k\nu})$ — функции, голоморфные на внешности контура Γ_j $(j = 1, 2)$, а $\overline{W_j^{(\rho)}}(z_j)$ — функции, комплексно-сопряженные им.

Поскольку многозначные составляющие комплексных потенциалов известны заранее, то с помощью непосредственной проверки можно убедиться в том, что и они представимы в виде (2.10), (2.13), если под $W_j^{(\rho)}(z_j)$ понимать некоторые функции, аналитические на внешности контура Γ_j $(j = 1, 2)$.

Условимся, что для каждого контура $\Gamma^{(s)}$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$ будет единственным образом зафиксирован элемент $g_s \in G$, который переводит контур Γ в $\Gamma^{(s)}$. Тогда при записи комплексных потенциалов $w_{jk\nu\mu}(z_j)$ в конкретной задаче следует сохранить только те слагаемые из выражения (2.10), которые отвечают элементам g_s $(s = 1, 2, \ldots, n)$. Данное замечание позволяет использовать выражение (2.10) для любой дискретной группы симметрии и для произвольного расположения основного контура.

3. Итак, пространство решений системы (1.3) в обобщенной симметричной задаче существенно ўже, чем в общем случае. Построение искомых комплексных потенциалов сводится к нахождению функций $W_j^{(\rho)}(z_j)$ $(\rho = 1, 2, \ldots, m_{k\nu})$, аналитических на внешности контура Γ_j $(j = 1, 2)$. Для этого достаточно воспользоваться системой, состоящей только из тех граничных условий, которые возникают на основном контуре при действии каждой из нагрузок $Q_{k\nu\mu}$

$$\mathrm{Re} \sum_{j=1}^{2} r_{jp} w'_{jk\nu\mu}(t_j) = f_{p\mu}(t) \quad (p = 1, 2;\ \mu = 1, 2, \ldots, m_{k\nu}) \qquad (3.1)$$

Граничные условия на остальных контурах удовлетворяются автоматически.

С математической точки зрения формулы (2.10) и (2.13) дают описание подпространства функций, инвариантного относительно оператора разрешающей системы (1.3), а выражения (3.1) являются записью сужения этого оператора в указанном инвариантном подпространстве.

Отметим два обстоятельства, характеризующие относительную простоту обобщенной симметричной задачи. Во-первых, порядок разрешающей системы (3.1), равный $2m_{k\nu}$, весьма мал. Во-вторых, ее решение можно осуществить любым методом, пригодным для обычной симметричной задачи.

Сказанное позволяет рекомендовать следующий подход к исследованию несимметричного напряженно-деформированного состояния ортотропной пластинки с группой G симметрии. С помощью результатов прикладной теории представлений [4, 5] заданную несимметричную нагрузку следует разложить на составляющие, преобразующиеся по неприводимым представлениям группы G, и, пользуясь принципом суперпозиции, перейти от исходного исследования к конечному числу обобщенных симметричных задач. Для каждой из них нужно записать комплексные потенциалы в форме (2.10) и найти искомые функции $W^{(p)}(z_j)$ из системы (3.1). Эффективность предлагаемого подхода обусловлена высокой алгоритмичностью и простотой решения обобщенных симметричных задач.

Одесский инженерно-
строительный институт

Поступила 28 XI 1979

Մ. Լ. ԲՈՒՐԻՇԿԻՆ

ՍԻՄԵՏՐԻԿ ԽԻՏ ՊԵՐՖՈՐԱՑՎԱԾ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ՍԱԼԻ ԾՌՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում առաջարկվում է G սիմետրիայի դիսկրետ խմբով սալի լարվածային-դեֆորմացիոն վիճակի հետազոտման էֆեկտիվ մոտեցում։ Ոչ սիմետրիկ բեռը բաշխվում է բաղադրիչների, որոնք ձևափոխվում են խմբի չբերվող ներկայացումներով։ Դա թույլ է տալիս վերադրման հիման վրա անցնել անկախ ընդհանրացված սիմետրիկ խնդիրների լուծմանը։

Նրանցից յուրաքանչյուրի համար Ս. Գ. Լեխնիցկու ֆունկցիան գրվում է (2.10) տեսքով և (2.13) հավասարման օգնությամբ արտահայտվում են $W_j^{(p)}(z_j)$ *ֆունկցիայի միջոցով, որոնք անալիտիկ են հիմնական կոնտուրի արտաքին մասում, և որոշվում են (3.1) սիստեմով։*

ON FLEXURE OF THE SYMMETRICAL DENSELY PERFORATED ORTHOTROPIC PLATE

M. L. BURISHKIN

Summary

A rational method for investigation of non-symmetrical stress-strained state of the orthotropic plate with the group G symmetry is proposed.

This method consists of using the applied representation theory and the principle of superposition for transition to solution of independent generalized symmetrical problems.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Любарский Г. Я.* Теория групп и ее применение в физике. М., ГИФМА, 1958.
2. *Космодамианский А. С.* Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями. К., Изд. «Вища школа», 1976.
3. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. М., Гостехиздат, 1957.
4. *Бурышкин М. Л.* Разложения вектор-функций, определенных на области с конечной группой симметрии, в усеченном случае. Докл. АН Арм. ССР, 1976, т. 63, № 4.
5. *Бурышкин М. Л.* Розклад вектор-функції, визначеної в області з просторовою групою симетрії, в трансляційно-усіченому випадку. ДАН УССР, 1975, № 7.
6. *Бурышкин М. Л.* О применении теории представлений дискретных групп в задачах равновесия и малых колебаний упруго-линейных систем. Депонированная рукопись, ВИНИТИ, № 208-75 от 21.01.1975 г.
7. *Бурышкин М. Л.* О функциях Колосова—Мусхелишвили в обобщенных симметричных задачах теории упругости. ДАН УССР, серия А, 1979, № 5.