ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIII, № 4, 1980 Механика

В. Н. АКОПЯН

О КОНТАКТЕ КРУГОВОГО ДИСКА С ДВУМЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКАМИ ПРИ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ*

Исследуется контактная задача о сжатии упругого кругового диска двумя неодинаковыми упругими же прямоугольниками с учетом температурных воздействий. Эти воздействия обусловлены наличием стационарного температурного поля, когда имеют место обычные условия теплового контакта.

Указанная задача при отсутствии температурного поля, когда сжимающие прямоугольники абсолютно жесткие, притом в зонах контакта действуют только нормальные напряжения, рассмотрена в [5].

В настоящей работе эта задача в общей постановке, когда прямоугольники имеют различные геометрические и упругие параметры, а в несимметрических зонах контакта наряду с нормальными действуют также тангенциальные контактные напряжения, обсуждается, по-видимому, впервые. Решение задачи сведено к совместному решению бесконечных систем линейных уравнений и сингулярных интегральных уравнений с ядрами, представимыми суммой своей сингулярной части в виде ядра Коши и некоторых регулярных ядер. На основе аппарата многочленов Якоби и Чебышева последние уравнения сведены к эквивалентным регулярным бесконечным системам.

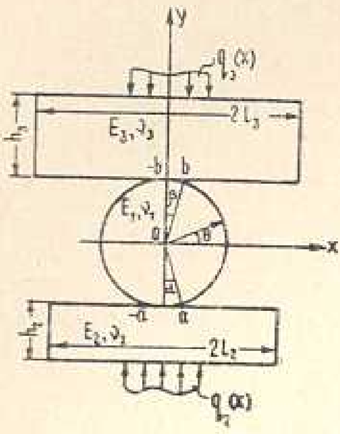
Проведено достаточно полное исследование задачи и при помощи численного анализа выяснены закономерности изменения важных механических характеристик: длины зоны контакта, меры сближения прямоугольников, а также контактных напряжений.

1. Пусть упругий круглый диск единичного радиуса сжимается двумя упругими неодинаковыми прямоугольниками, изготовленными из различных материалов и находящимися под действием симметричных относительно оси oy нормальных нагрузок соответственно интенсивностей $q_2(x)$ и $q_3(x)$ (фиг. 1). Кроме того, система диск-прямоугольники подвержена также температурным воздействиям, находясь в стационарном температурном поле. При этом полагается, как в [3], что температурные режимы в диске и в прямоугольниках в зонах контакта удовлетворяют условиям обычного теплового контакта, на неконтактирующих частях границы диска и внутренних сторонах прямоугольников имеет место теплообмен с внеш-

* Работа доложена на Всесоюзной конференции по теории упругости в г. Ереване в 1979 г.

ней средой по закону Ньютона, а на наружных частях границы прямоугольников поддерживается нулевая температура.

Предположим, что диск входит в контакт с прямоугольниками по дугам единичной окружности $a_1 b_1$ ($a_1 = -ie^{-i\alpha}$, $b_1 = -ie^{i\alpha}$) и $a_2 b_2$ ($a_2 = ie^{-i\beta}$, $b_2 = ie^{i\beta}$), которым на сторонах прямоугольников соответствуют интервалы $(-a, a)$ и $(-b, b)$. Далее предположим, что в зонах контакта действуют как нормальные, так и тангенциальные напряжения.



Фиг. 1.

Нужно определить контактные напряжения, меру сближения прямоугольников относительно диска δ_1 и δ_2, то есть жесткость системы диск-прямоугольники, а также полудлину зон контакта a и b.

Предварительно приведем решения вспомогательных задач об определении компонентов смещений граничных точек диска и прямоугольников, находящихся под действием произвольных внешних сил.

В первой задаче пусть круговой диск на участках своей границы $-\frac{\pi}{2} - \alpha \leqslant \theta \leqslant -\frac{\pi}{2} + \alpha$; $\frac{\pi}{2} - \beta \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} + \beta$, соответствующих контактным зонам, загружен силами $[\tau_1(\theta), p_1(\theta)]$ и $[\tau_2(\theta), -p_2(\theta)]$ соответственно, где $\tau_i(\theta)$ $(i = 1, 2)$ — действуют вдоль оси ox, а $p_i(\theta)$ $(i = 1, 2)$ — вдоль оси oy.

Тогда, пользуясь известными результатами [2], непосредственно можем записать

$$
\begin{aligned}
2\mu_1 u^{(1)}(\theta) = {} & \frac{\varkappa_1 + 1}{2\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}-\alpha}^{-\frac{\pi}{2}+\alpha} \ln \frac{1}{\left|2 \sin \frac{\theta - \xi}{2}\right|} \tau_1(\xi)\, d\xi + \\
& + \frac{\varkappa_1 + 1}{2\pi} \int\limits_{\frac{\pi}{2}-\beta}^{\frac{\pi}{2}+\beta} \ln \frac{1}{\left|2 \sin \frac{\theta - \xi}{2}\right|} \tau_2(\xi)\, d\xi + \\
& + \frac{\varkappa_1 - 1}{2\pi} \int\limits_{\frac{\pi}{2}-\beta}^{\frac{\pi}{2}+\beta} \frac{\pi - |\theta - \xi|}{2} \operatorname{sign}(\theta - \xi)\, p_2(\xi)\, d\xi - \\
& - \frac{\varkappa_1 - 1}{2\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}-\alpha}^{-\frac{\pi}{2}+\alpha} \frac{\pi - |\theta - \xi|}{2} \operatorname{sign}(\theta - \xi)\, p_1(\xi)\, d\xi - (\varkappa_1 + 1)\, a_1 \cos\theta \quad (1.1)
\end{aligned}
$$

$$2\mu_1 v^{(1)}(\theta)=\frac{\varkappa_1+1}{2\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}-\alpha}^{-\frac{\pi}{2}+\alpha}\ln\frac{1}{\left|2\sin\frac{\theta-\xi}{2}\right|}p_1(\xi)\,d\xi-$$

$$-\frac{\varkappa_1+1}{2\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{2}-\beta}^{\frac{\pi}{2}+\beta}\ln\frac{1}{\left|2\sin\frac{\theta-\xi}{2}\right|}p_2(\xi)\,d\xi+$$

$$+\frac{\varkappa_1-1}{2\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{2}-\beta}^{\frac{\pi}{2}+\beta}\frac{\pi-|\theta-\xi|}{2}\operatorname{sign}(\theta-\xi)\,\tau_2(\xi)\,d\xi+$$

$$+\frac{\varkappa_1-1}{2\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}-\alpha}^{-\frac{\pi}{2}+\alpha}\frac{\pi-|\theta-\xi|}{2}\operatorname{sign}(\theta-\xi)\,\tau_1(\xi)\,d\xi-(\varkappa_1+1)\,a_1\sin\theta$$

где $\varkappa_1=\dfrac{\lambda_1+3\mu_1}{\lambda_1+\mu_1}$ — постоянная Мусхелишвили, $u^{(1)}(\theta)$ и $v^{(1)}(\theta)$ — соответственно горизонтальные и вертикальные смещения граничных точек диска, а

$$a_1=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{2}-\beta}^{\frac{\pi}{2}+\beta}[-p_2(\xi)\sin\xi+\tau_2(\xi)\cos\xi]\,d\xi+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}-\alpha}^{-\frac{\pi}{2}+\alpha}[p_1(\xi)\sin\xi+\tau_1(\xi)\cos\xi]\,d\xi \tag{1.2}$$

Во второй вспомогательной задаче определим смещение граничных точек прямоугольника $\{0\leqslant y\leqslant h;\ -l\leqslant x\leqslant l\}$, на границе которого действуют нагрузки следующего типа:

$$\begin{aligned}
&\sigma_x^{(2)}(-l,\ y)=0; \quad \sigma_x^{(2)}(l,\ y)=0; && \\
&\tau_{xy}^{(2)}(-l,\ y)=0; \quad \tau_{xy}^{(2)}(l,\ y)=0; && (0<y<h)\\
&\sigma_y^{(2)}(x,\ h)=-q(x); \quad \sigma_y^{(2)}(x,\ 0)=-p(x); && \\
&\tau_{xy}^{(2)}(x,\ h)=0; \quad \tau_{xy}^{(2)}(x,\ 0)=-\tau(x); && (-l<x<l)
\end{aligned} \tag{1.3}$$

где $q(x)$, $p(x)$ и $\tau(x)$ — наперед заданные функции, выражающие интенсивность приложенных к прямоугольнику нормальных и тангенциальных сил.

Решение этой задачи построим при помощи функции напряжения Эри $F(x, y)$, связанной с напряжениями и перемещениями при помощи известных формул и представляемой формулой [1]

$$F(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \cos \alpha_k x \left[A_k \operatorname{ch} \alpha_k y + B_k \operatorname{sh} \alpha_k y + \alpha_k y \left(C_k \operatorname{ch} \alpha_k y + D_k \operatorname{sh} \alpha_k y\right)\right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} E_k \sin \beta_k y \left[\beta_k x \operatorname{sh} \beta_k x - \beta_k l \operatorname{th} \beta_k l \operatorname{ch} \beta_k x\right]$$

$$\left(\alpha_k = \frac{\pi (2k-1)}{2l}, \quad \beta_k = \frac{\pi k}{h}\right) \tag{1.4}$$

Здесь коэффициенты A_k, B_k, C_k, D_k и E_k ($k = 1, 2, \ldots$) — неизвестны и подлежат определению. Удовлетворяя граничным условиям (1.3), для определения неизвестных коэффициентов E_k ($k = 1, 2, \ldots$) получим бесконечную систему алгебраических уравнений

$$Y_p = \sum_{k=1}^{\infty} A_{p,k} Y_k + N_p \quad (p = 1, 2, \ldots) \tag{1.5}$$

где введены следующие обозначения:

$$Y_p = \beta_p^2 \operatorname{ch} \mu_p E_p; \quad \mu_p = l\beta_p; \quad \nu_p = h\alpha_p$$

$$A_{p,k} = \frac{16 \beta_p^2}{h \varphi_p^{(1)}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_k \alpha_n^3 \left[\varphi_n^{(2)} \left(1 + (-1)^{k+p+1} \operatorname{th} \nu_n\right) - \varphi_n^{(3)} \left((-1)^k + (-1)^{p+1}\right)\right]}{(\alpha_n^2 + \beta_k^2)^2 (\alpha_n^2 + \beta_p^2)^2}$$

$$N_p = \frac{4\beta_p}{h \varphi_p^{(1)}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \alpha_n}{(\alpha_n^2 + \beta_p^2)} \left[\left((-1)^{p+1} \varphi_n^{(4)} + \varphi_n^{(5)} - \frac{1}{2\beta_p}\right) a_n + \right.$$

$$\left. + \left(\varphi_n^{(4)} - (-1)^{p+1} \varphi_n^{(5)} - \frac{(-1)^p}{2\beta_p}\right) b_n + \left((-1)^{p+1} \varphi_n^{(3)} - \varphi_n^{(2)}\right) d_n \right]$$

$$(k, \ p = 1, 2, \ldots)$$

$$\varphi_p^{(1)} = (1 - \nu_p \operatorname{th} \mu_p) \operatorname{th} \mu_p + \mu_p; \qquad \varphi_p^{(2)} = \frac{\operatorname{sh} \nu_p \operatorname{ch} \nu_p - \nu_p}{\operatorname{sh}^2 \nu_p - \nu_p^2}$$

$$\varphi_p^{(3)} = \frac{\operatorname{sh} \nu_p - \nu_p \operatorname{ch} \nu_p}{\operatorname{sh}^2 \nu_p - \nu_p^2}; \qquad \varphi_p^{(4)} = \frac{\nu_p \operatorname{sh} \nu_p}{\operatorname{sh}^2 \nu_p - \nu_p^2}; \qquad \varphi_p^{(5)} = \frac{\operatorname{sh}^2 \nu_p}{\operatorname{sh}^2 \nu_p - \nu_p^2}$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} p(\xi) \cos \alpha_n \xi \, d\xi; \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} q(\xi) \cos \alpha_n \xi \, d\xi$$

$$d_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} \tau(\xi) \sin \alpha_n \xi \, d\xi$$

Остальные коэффициенты, входящие в разложение $F(x, y)$, выражаются через Y_k, a_k, b_k и d_k при помощи простых формул.

Положив

$$p(x) = \begin{cases} p_1(x) & \text{при } -a \leqslant x \leqslant a \\ 0 & \text{при } l > |x| > a \end{cases}; \qquad \tau(x) = \begin{cases} \tau_1(x) & \text{при } -a \leqslant x \leqslant a \\ 0 & \text{при } l > |x| > a \end{cases}$$

для смещений граничных точек прямоугольника получим

$$u^{(2)}(x, 0) = -\frac{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)}{E_2}\int_{-a}^{a} R_{11}(x, \xi)\, p_1(\xi)\, d\xi +$$

$$+\frac{2(1-\nu_2^2)}{E_2}\int_{-a}^{a} R_{12}(x, \xi)\, \tau_1(\xi)\, d\xi + r_1(x) \tag{1.6}$$

$$v^{(2)}(x, 0) = \frac{2(1-\nu_2^2)}{E_2}\int_{-a}^{a} R_{21}(x, \xi)\, p_1(\xi)\, d\xi -$$

$$-\frac{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)}{E_2}\int_{-a}^{a} R_{22}(x, \xi)\, \tau_1(\xi)\, d\xi + r_2(x)$$

Здесь

$$R_{11}(x, \xi) = \frac{1}{2}\operatorname{sign}(x-\xi) + \frac{2(1-\nu_2)}{l(1-2\nu_2)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\nu_k^2}{\operatorname{sh}^2\nu_k - \nu_k^2}\,\frac{\sin\alpha_k x\cos\alpha_k\xi}{\alpha_k}$$

$$R_{12}(x, \xi) = \frac{1}{\pi}\ln\left|\operatorname{ctg}\frac{\pi(x-\xi)}{4l}\right| + \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\varphi_k^{(2)} - 1\right]\frac{\sin\alpha_k x\sin\alpha_k\xi}{\alpha_k}$$

$$R_{21}(x, \xi) = \frac{1}{\pi}\ln\left|\operatorname{ctg}\frac{\pi(x-\xi)}{4l}\right| + \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\psi_k^{(1)} - 1\right]\frac{\cos\alpha_k x\cos\alpha_k\xi}{\alpha_k}$$

$$R_{22}(x, \xi) = -\frac{1}{2}\operatorname{sign}(x-\xi) + \frac{2(1-\nu_2)}{l(1-2\nu_2)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\nu_k^2}{\operatorname{sh}^2\nu_k - \nu_k^2}\times$$

$$\times\frac{\cos\alpha_k x\sin\alpha_k\xi}{\alpha_k}$$

$$r_1(x) = \frac{8(1-\nu_2^2)}{E_2}\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n Y_n\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k^{(2)} - (-1)^n\varphi_k^{(3)}}{(\alpha_k^2+\beta_n^2)^2}(-1)^k\alpha_k\sin\alpha_k x +$$

$$+\frac{2(1-\nu_2^2)}{E_2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k^{(4)} b_k\sin\alpha_k x}{\alpha_k}$$

$$r_2(x) = \frac{8(1-\nu_2^2)}{E_2}\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n Y_n\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k^{(5)} + (-1)^n\varphi_k^{(4)}}{(\alpha_k^2+\beta_n^2)^2}(-1)^{k+1}\alpha_k\cos\alpha_k x -$$

$$-\frac{2(1-\nu_2^2)}{E_2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\psi_k^{(2)} b_k \cos\alpha_k x}{\alpha_k}-$$

$$-\frac{(1+\nu_2)}{E_2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Y_k[\beta_k x \operatorname{sh}\beta_k x-\mu_k \operatorname{th}\mu_k \operatorname{ch}\beta_k x]}{\beta_k \operatorname{ch}\mu_k}-$$

$$-\frac{2(1-\nu_2^2)}{E_2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{ch}\beta_k x}{\beta_k\operatorname{ch}\mu_k}Y_k$$

$$\psi_k^{(1)}=\frac{\operatorname{sh}\nu_k\operatorname{ch}\nu_k+\nu_k}{\operatorname{sh}^2\nu_k-\nu_k^2};\qquad \psi_k^{(2)}=\frac{\operatorname{sh}\nu_k+\nu_k\operatorname{ch}\nu_k}{\operatorname{sh}^2\nu_k-\nu_k^2}$$

Следует отметить, что в выражениях ядер R_{ij} $(i, j = 1, 2)$ выделены их главные и регулярные части, притом последние представляются в виде довольно быстро сходящихся рядов.

2. Перейдем к решению основной задачи. Заменяя действие верхнего прямоугольника на диск неизвестными контактными напряжениями, придем к контактной задаче для диска и прямоугольника, условия контакта которой имеют вид [9]

$$v_1+v_2=\delta_1-f_1(\theta);\quad u_1+u_2=0 \tag{2.1}$$

где (v_1, u_1) и (v_2, u_2) — пары вертикальных и горизонтальных перемещений граничных точек соответственно диска и прямоугольника в зонах контакта, δ_1 — мера сближения этих тел, а $f_1(\theta) = 1+\sin\theta$ — функция, описывающая форму границы диска.

Для определения перемещений будем пользоваться аддитивными уравнениями термоупругости

$$v_i=v_i^{(T)}+v_i^{(У)},\quad u_i=u_i^{(T)}+u_i^{(У)}\quad (i=1,\ 2) \tag{2.2}$$

Здесь верхними индексами «T» и «$У$» обозначены соответственно тепловые и упругие перемещения контактирующих тел. Выше мы получили формулы (1.1) и (1.6) для упругих перемещений диска и прямоугольника, выраженных через неизвестные контактные напряжения, то есть

$$v_i^{(У)}=v^{(i)};\quad u_i^{(У)}=u^{(i)}\quad (i=1,\ 2)$$

После того, как известна температура в диске $T_1(r, \theta)$ и в прямоугольнике — $T_2(x, y)$, легко можно записать выражения тепловых перемещений [3]

$$u_1^{(T)}=k_1\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{\cos(n+1)\theta}{n+1};\qquad v_1^{(T)}=k_1\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{\sin(n+1)\theta}{n+1}$$

$$u_2^{(T)}=k_2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{\alpha_n}(1+\operatorname{th}\alpha_n(1+h))\sin\alpha_n x$$

$$v_2^{(T)}=k_2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{\alpha_n}(1+\operatorname{th}\alpha_n(1+h))\cos\alpha_n x$$

где $k_i = \frac{2\alpha_i (1 - \nu_i^2)}{E_i}$, $\alpha_i (i = 1, 2)$ — коэффициенты теплового расширения диска и прямоугольника соответственно, а a_n и B_n $(n = 1, 2, ...)$ определяются из бесконечной системы (2.2).

Далее, ввиду малости размеров контактных зон по сравнению с характерными размерами тел и того, что при их сжатии дуговые и прямолинейные отрезки сливаются в единый контактный интервал, в зонах контакта примем $x = 1 \cdot \theta$. На основе последнего дуговые отрезки зоны контакта диска $a_1 b_1$ и $a_2 b_2$ отождествляем с прямолинейными зонами контакта $(-a, a)$ и $(-b, b)$.

Подставляя значения упругих перемещений из (1.1) и (1.6) в условие контакта (2.1) и учитывая только что сказанное, получим следующую систему уравнений:

$$\int_{-a}^{a} Q_{11}(x, \xi)\, p_1(\xi)\, d\xi + \int_{-a}^{a} Q_{12}(x, \xi)\, \tau_1(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \int_{-b}^{b} Q_{13}(x, \xi)\, p_2^*(\xi)\, d\xi + \int_{-b}^{b} Q_{14}(x, \xi)\, \tau_2^*(\xi)\, d\xi = F_1(x)$$

$$\int_{-a}^{a} Q_{21}(x, \xi)\, p_1(\xi)\, d\xi + \int_{-a}^{a} Q_{22}(x, \xi)\, \tau_1(\xi)\, d\xi + \tag{2.3}$$

$$+ \int_{-b}^{b} Q_{23}(x, \xi)\, p_2^*(\xi)\, d\xi + \int_{-b}^{b} Q_{24}(x, \xi)\, \tau_2^*(\xi)\, d\xi = F_2(x)$$

$$(-a < x < a)$$

Аналогично, из условия контакта диска с верхним прямоугольником получим еще одну бесконечную систему алгебраических уравнений и систему функциональных уравнений, подобных системам (1.5) и (2.3). В случае, когда прямоугольники одинаковые, последние системы полностью совпадают с (1.5) и (2.3).

Для простоты далее рассмотрим именно этот случай, то есть в (2.3) примем $p_1(x) = p_2^*(x) = p_2(x - \pi)$; $\tau_1(x) = -\tau_2^*(x) = -\tau_2(x - \pi)$; $q_2(x) = q_3(x) = q(x)$; $\delta_1 = \delta$ и $a = b$. Тогда система функциональных уравнений (2.3) вырождается в следующую систему интегральных уравнений:

$$-\lambda_1 \int_{-a}^{a} [\operatorname{sign}(x - \xi) + L_{11}(x, \xi)]\, p_1(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \lambda_2 \int_{-a}^{a} \left[\ln \frac{1}{|x - \xi|} + L_{12}(x, \xi) \right] \tau_1(\xi)\, d\xi = F_1(x) \tag{2.4}$$

$$\lambda_2 \int_{-a}^{a} \left[\ln \frac{1}{|x-\xi|} + L_{21}(x, \xi) \right] p_1(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \lambda_1 \int_{-a}^{a} [\operatorname{sign}(x-\xi) + L_{22}(x, \xi)] \tau_1(\xi)\, d\xi = F_2(x) \quad (-a < x < a)$$

где

$$\lambda_i = \theta_1^{(i)} + \theta_2^{(i)}; \quad \theta_i^{(1)} = \frac{2(1-\nu_i^2)}{\pi E_i}; \quad \theta_i^{(2)} = \frac{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)}{2E_i} \quad (i = 1, 2)$$

$$L_{11}(x, \xi) = \frac{\pi\theta_2^{(1)}}{D_1} \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k^{(5)} - 1) \frac{\sin \alpha_k x \cos \alpha_k \xi}{\alpha_k} + f_2(x, \xi)$$

$$L_{12}(x, \xi) = \frac{\pi\theta_2^{(1)}}{D_2} \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k^{(2)} - 1) \frac{\sin \alpha_k x \sin \alpha_k \xi}{\alpha_k} + f_3(x, \xi)$$

$$L_{21}(x, \xi) = \frac{\pi\theta_2^{(1)}}{D_2} \sum_{k=1}^{\infty} (\psi_k^{(1)} - 1) \frac{\cos \alpha_k x \cos \alpha_k \xi}{\alpha_k} + f_3(x, \xi)$$

$$L_{22}(x, \xi) = \frac{\pi\theta_2^{(1)}}{D_1} \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k^{(5)} - 1) \frac{\cos \alpha_k x \sin \alpha_k \xi}{\alpha_k} + f_2(x, \xi)$$

$$f_2(x, \xi) = \frac{\theta_1^{(2)}}{\pi\lambda_1} [x - \xi - (\pi - |x - \xi - \pi|) \operatorname{sign}(x - \xi - \pi)]$$

$$f_3(x, \xi) = \frac{\theta_2^{(1)}}{\pi\lambda_2} \ln \left| (x-\xi) \operatorname{ctg} \frac{\pi(x-\xi)}{4l} \right| + \frac{\theta_1^{(1)}}{\lambda_2} \ln \left| (x-\xi) \operatorname{ctg} \frac{x-\xi}{2} \right|$$

$$F_1(x) = -u_1^{(T)} - u_2^{(T)} - 2\pi\theta_1^{(1)} a_1 \sin x - r_1(x)$$

$$F_2(x) = \delta - v_1^{(T)} - v_2^{(T)} + 2\pi\theta_1^{(1)} a_1 \cos x - r_2(x) - f_1\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Таким образом, для определения неизвестных контактных напряжений $p_1(x)$ и $\tau_1(x)$ нужно решить систему интегральных уравнений (2.4) совместно с бесконечной системой алгебраических уравнений (1.5).

Перейдем к решению этих уравнений. Умножая первое из уравнений (2.4) на мнимую единицу i и складывая со вторым, относительно $p(x) = p_1(x) + i\tau_1(x)$ получим интегральное уравнение. Далее, дифференцируя это уравнение по x, получим следующее сингулярное интегральное уравнение:

$$-i\pi \operatorname{th} \mu\pi p(x) + \int_{-a}^{a} \left[\frac{1}{\xi - x} + A(x, \xi) \right] p(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \int_{-a}^{a} B(x, \xi) \overline{p(\xi)}\, d\xi = h(x) \quad (-a < x < a) \tag{2.5}$$

Здесь

$$A(x,\xi)=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial L_{21}(x,\xi)}{\partial x}-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{\partial L_{22}(x,\xi)}{\partial x}+\right.$$

$$\left.+i\left(\frac{\partial L_{12}(x,\xi)}{\partial x}-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{\partial L_{11}(x,\xi)}{\partial x}\right)\right]$$

$$B(x,\xi)=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial L_{21}(x,\xi)}{\partial x}+\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{\partial L_{22}(x,\xi)}{\partial x}-\right.$$

$$\left.-i\left(\frac{\partial L_{12}(x,\xi)}{\partial x}+\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{\partial L_{11}(x,\xi)}{\partial x}\right)\right]$$

$$h(x)=\frac{1}{\lambda_2}[F_2'(x)+iF_1'(x)]$$

а μ определяется из трансцендентного уравнения

$$\pi\,\mathrm{th}\,\mu\pi=(\theta_1^{(2)}+\theta_2^{(2)})/(\theta_1^{(1)}+\theta_2^{(1)})$$

Функция $p(x)$ должна удовлетворять условию равновесия

$$\int\limits_{-a}^{a}p(x)\,dx=p_0 \tag{2.6}$$

где p_0 — равнодействующая внешних сил.

Введем безразмерные переменные

$$t=\frac{x}{a};\quad s=\frac{\xi}{a};\quad \frac{ap(at)}{p_0}=\chi(t)$$

После элементарных выкладок уравнение (2.5) перепишем в форме

$$-i\pi\,\mathrm{th}\,\mu\pi\chi(t)+\int\limits_{-1}^{1}\left[\frac{1}{s-t}+A^*(t,s)\right]\chi(s)\,ds+$$

$$+\int\limits_{-1}^{1}B^*(t,s)\overline{\chi(s)}\,\mathrm{ds}=h^*(t) \tag{2.7}$$

где

$$A^*(t,s)=aA(at,as);\; B^*(t,s)=aB(at,as);\; h^*(t)=\frac{ah(at)}{p_0}$$

При этом уравнение равновесия примет вид

$$\int\limits_{-1}^{1}\chi(s)\,ds=1 \tag{2.8}$$

Далее, исходя из результатов работ [4—7], решение уравнения (2.7) представим в виде

$$\chi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z_n p_n^{(\alpha,\beta)}(t)}{\omega(t)}; \quad \begin{array}{l} \alpha = -\dfrac{1}{2} - i\mu \\ \beta = -\dfrac{1}{2} + i\mu \end{array}; \quad \omega(t) = (1-t)^{-\alpha}(1+t)^{-\beta} \tag{2.9}$$

Здесь $p_n^{(\alpha,\beta)}(t)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ — многочлены Якоби, ортогональные на интервале $(-1, 1)$ с весом $\omega^{-1}(t)$, а Z_n $(n = 0, 1, \ldots)$ — неизвестные комплексные коэффициенты, подлежащие определению.

Для дальнейшего нам понадобится соотношение [8]

$$-i\pi \operatorname{th}\mu\pi \frac{p_n^{(\alpha,\beta)}(t)}{\omega(t)} + \int_{-1}^{1} \frac{p_n^{(\alpha,\beta)}(s)}{(s-t)\,\omega(s)}\, ds = \frac{2}{\pi \operatorname{ch}\mu\pi} p_{n-1}^{(-\alpha,-\beta)}(t) \tag{2.10}$$

Подставляя в выражение N_p из (1.5) и в (2.7) выражение $\chi(t)$ из (2.9), используя соотношение (2.10) и условие ортогональности многочленов Якоби, после элементарных выкладок по известной процедуре относительно коэффициентов Y_m и Z_m $(m = 1, 2 \ldots)$ получим следующую систему бесконечных алгебраических уравнений:

$$Z_m = h_m \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{m,n}^{(1,1)}}{n} Z_n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{m,n}^{(1,2)}}{n} \overline{Z}_n + \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n}^{(1,3)} Y_n + C_m^{(1)} \right]$$

$$Y_m = \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n}^{(2,1)} Z_n + \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n}^{(2,2)} \overline{Z}_n + \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n}^{(2,3)} Y_n + C_m^{(2)} \tag{2.11}$$

Здесь введены обозначения

$$A_{m,n}^{(1,1)} = -\int_{-1}^{1} p_{m-1}^{(-\alpha,-\beta)}(t)\,\omega(t)\,dt \int_{-1}^{1} \frac{\partial A^*(t,s)}{\partial s} \times$$

$$\times (1+s)^{\beta+1}(1-s)^{\alpha+1} p_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(s)\,ds$$

$$A_{m,n}^{(1,2)} = -\int_{-1}^{1} p_{m-1}^{(-\alpha,-\beta)}(t)\,\omega(t)\,dt \int_{-1}^{1} \frac{\partial B^*(t,s)}{\partial s} \times$$

$$\times (1+s)^{\overline{\beta}+1}(1-s)^{\overline{\alpha}+1} p_{n-1}^{(\overline{\alpha}+1,\overline{\beta}+1)}(s)\,ds$$

$$A_{m,n}^{(1,3)} = -\frac{8(1-\nu_2^2)\beta_n}{E_2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[(-1)^{k+1} \frac{(\varphi_k^{(5)} + (-1)^n \varphi_k^{(4)})}{(\alpha_k^2 + \beta_n^2)^2} + \right.$$

$$\left. + i \frac{(\varphi_k^{(2)} - (-1)^n \varphi_k^{(3)})}{(\alpha_k^2 + \beta_n^2)^2} \right] \alpha_k^2 \int_{-1}^{1} \frac{\cos \alpha_k a x\, p_m^{(-\alpha,-\beta)}(x)}{\omega^{-1}(x)}\, dx +$$

$$+\frac{1+\nu_2}{E_2}\int_{-1}^{1}\frac{[(\beta_n xa-\mu_n \operatorname{th}\mu_n)\operatorname{ch}\beta_n xa-(1-2\nu_2)\operatorname{sh}\beta_n xa]}{\operatorname{ch}\mu_n}\frac{p_m^{(-\alpha,\,-\beta)}(x)}{\omega^{-1}(x)}dx$$

$$A_{m,n}^{(2,1)}=\frac{2\beta_m p_0}{lh\varphi_m^{(1)}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\alpha_k}{\alpha_k^2+\beta_m^2}\Bigg[\Bigg(\varphi_k^{(5)}+(-1)^{m+1}\varphi_k^{(4)}-$$

$$-\frac{1}{2\beta_m}\Bigg)\int_{-1}^{1}\frac{\cos\alpha_k axp_n^{(\alpha,\,\beta)}(x)}{\omega(x)}dx-$$

$$-i((-1)^{m+1}\varphi_k^{(3)}-\varphi_k^{(2)})\int_{-1}^{1}\frac{\sin\alpha_k axp_n^{(\alpha,\,\beta)}(x)}{\omega(x)}dx\Bigg]$$

$$A_{m,n}^{(2,2)}=\overline{A_{m,n}^{(2,1)}};\quad A_{m,n}^{(2,3)}=A_{m,n};\qquad h_m=\frac{\Gamma(m+1)\Gamma(m-1)\operatorname{ch}\mu\pi}{2\pi\Gamma(m-\alpha)\Gamma(m-\beta)}$$

$$C_m^{(1)}=Z_0(A_{m,0}^{(1,1)}+A_{m,0}^{(1,2)})-\frac{1}{\lambda_2 p_0}\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\Bigg[v_1^{(T)}+v_2^{(T)}+i(u_1^{(T)}+u_2^{(T)})+$$

$$+2\pi b_1^{(1)}a_1(i\sin\alpha x-\cos\alpha x)+$$

$$+\pi b_2^{(1)}\sum_{k=1}^{\infty}(i\varphi_k^{(4)}-\varphi_k^{(2)})\frac{b_k\sin\alpha_k ax}{\alpha_k}\Bigg]\frac{p_{m-1}^{(-\alpha,\,-\beta)}(x)}{\omega^{-1}(x)}dx$$

$$C_m^{(2)}=\frac{4\beta_m}{h\varphi_m^{(1)}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\alpha_k b_k}{\alpha_k^2+\beta_m^2}\left[\varphi_k^{(4)}-(-1)^{m+1}\varphi_k^{(5)}-\frac{(-1)^m}{2\beta_m}\right]$$

Легко видеть, что подставляя в (2.8) выражение функции $\chi(t)$ из (2.9), из условия ортогональности сразу находим $Z_0=\operatorname{ch}\mu\pi/\pi$.

Теперь, следуя работам [4—7], систему (2.11) исследуем на регулярность. С этой целью обозначим

$$Z_m=X_m^{(1)}m^{(1-\varepsilon)},\quad Y_m=X_m^{(2)}\ (m=1,2,\ldots)$$

где $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$.

Тогда система (2.11) примет вид

$$X_m^{(1)}=\frac{h_m}{m}m^{\varepsilon}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_{m,n}^{(1,1)}}{n^{\varepsilon}}X_n^{(1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_{m,n}^{(1,2)}}{n^{\varepsilon}}\overline{X}_n^{(1)}+\sum_{n=1}^{\infty}A_{m,n}^{(1,3)}X_n^{(2)}+C_m^{(1)}\right]$$

$$X_m^{(2)}=\sum_{n=1}^{\infty}A_{m,n}^{(2,1)}n^{1-\varepsilon}X_n^{(1)}+\sum_{n=1}^{\infty}A_{m,n}^{(2,2)}n^{1-\varepsilon}\overline{X}_n^{(1)}+\sum_{n=1}^{\infty}A_{m,n}^{(2,3)}X_n^{(2)}+C_m^{(2)}\qquad(2.12)$$

Так как $\partial A^*(t,s)/\partial s$; $\partial B^*(t,s)/\partial s\in L_2(-1,1)$, и при больших k

$$\int_{-1}^{1}e^{i\alpha_k x}\frac{P_{m-1}^{(-\alpha,\,-\beta)}}{\omega(x)}dx\sim o(\alpha_k^{-3/2})$$

то используя асимптотические представления h_m и $p_m^{(\alpha,\beta)}(x)$ для больших m, легко доказать, что при больших m имеют место следующие соотношения:

$$\frac{h_m}{m} m^{\varepsilon} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|A_{m,n}^{(1,1)}|}{n^{\varepsilon}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|A_{m,n}^{(1,2)}|}{n^{\varepsilon}} + \sum_{n=1}^{\infty} |A_{m,n}^{(1,3)}| \right] \sim o(m^{-1/2+\varepsilon})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_{m,n}^{(2,1)}| n^{1-\varepsilon} + \sum_{n=1}^{\infty} |A_{m,n}^{(2,2)}| n^{1-\varepsilon} + \sum_{n=1}^{\infty} |A_{m,n}^{(2,3)}| \sim o(m^{-1/2+\varepsilon})$$

то есть система (2.12) квазивполне регулярна.

Для определения размера контактной зоны будем пользоваться условием непрерывности контактных напряжений в концах этой зоны, то есть уравнением

$$\mathrm{Re}[\chi(\pm 1)] = 0$$

3. Рассмотрим некоторые частные случаи обсуждаемой задачи.

а) Сначала бесконечно увеличим длину прямоугольников. Тогда из системы (1.5) будем иметь $Y_n \equiv 0$ ($n = 1,2,...$), а из интегрального уравнения (2.7) получим уравнение, соответствующее термоупругой контактной задаче для кругового диска, сжатого двумя одинаковыми упругими полосами. Далее, устремляя h и l одновременно к бесконечности и считая тангенциальные напряжения отсутствующими в зонах контакта, приходим к следующему интегральному уравнению:

$$\int_{-1}^{1} \ln \frac{1}{|t-s|} \chi(s)\, ds + \int_{-1}^{1} K(t-s) \chi(s)\, ds = h(t) \quad (-1 < t < 1) \tag{3.1}$$

где

$$\chi(t) = a p_1(at); \quad K(t) = \frac{\theta_1^{(1)}}{\lambda_2} a \ln|at \operatorname{ctg}(at/2)|$$

$$h(t) = \frac{a}{\lambda_2}[-v_1^{(T)} - v_2^{(T)} + 2\pi\theta_1^{(1)} a_1 \cos at - f_1(at - \pi/2)]$$

Представляя решение уравнения (3.1) в виде

$$\chi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X_n T_{2n}(t)}{\sqrt{1-t^2}} \quad (-1 < t < 1)$$

где $T_{2n}(t)$ ($n = 0,1,...$) — многочлены Чебышева первого рода, по известной процедуре приходим к вполне регулярной бесконечной системе

$$X_m = \sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n} X_n + M_m \quad (m = 1, 2,...) \tag{3.2}$$

где

$$A_{0,n} = -\frac{1}{\pi^2 \ln 2}\int_{-1}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\int_{-1}^{1}K(t-s)\frac{T_{2n}(s)}{\sqrt{1-s^2}}\,ds$$

$$M_0 = \frac{1}{\pi^2 \ln 2}\int_{-1}^{1}\frac{h(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

$$A_{m,n} = -\frac{4m}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_{2m}(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\int_{-1}^{1}K(t-s)\frac{T_{2n}(s)}{\sqrt{1-s^2}}\,ds$$

$$M_m = \frac{4m}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{h(t)\,T_{2n}(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \qquad (n=0,1,\ldots,\ m=1,2,\ldots)$$

Бесконечная система (3.2) вполне регулярна при условии

$$\frac{\theta_1^{(1)}}{(\theta_1^{(1)}+\theta_2^{(1)})}\left(\frac{a^2\cos 2a}{\sin^2 2a}-\frac{1}{4}\right)<\frac{\pi}{2}$$

в противном случае квазивполне регулярна.

б) Рассмотрим еще один частный случай, когда упругий диск сжимается двумя одинаковыми упругими балками, являющимися предельными случаями прямоугольников, находящихся под действием распределенной нагрузки интенсивности $q(x)$, симметричной относительно оси oy.

Под действием контактного давления $p_1(x)$ и нагрузки $q(x)$ точки нейтральной оси балки получают перемещения

$$v_2(x) = \frac{1}{D}\int_{-a}^{a}G(x,\xi)\,p_1(\xi)\,d\xi - \frac{1}{D}\int_{-l}^{l}G(x,\xi)\,q(\xi)\,d\xi \tag{3.3}$$

где D — жесткость балки на изгиб, $2l$ — длина балки и

$$G(x,\xi) = \frac{|x-\xi|^3}{12} \quad (-a\leqslant x,\ \xi\leqslant a) \tag{3.4}$$

Нужно отметить, что при получении (3.4) было использовано уравнение изгиба балки без учета влияния поперечных сдвигов и нормальных напряжений между волокнами. Интегральное уравнение задачи в обсуждаемом случае примет вид

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\left[\ln\frac{1}{\left|2\sin\frac{\theta-\varphi}{2}\right|}+K(\theta,\varphi)\right]p_1(\varphi)\,d\varphi = f(\theta) \quad (-\alpha\leqslant\theta\leqslant\alpha) \tag{3.5}$$

где

$$K(\theta, \varphi) = \ln \cos \frac{\theta - \varphi}{2} - \sin \theta \cos \varphi + \frac{G(\theta, \varphi)}{\theta_1^{(1)} D}$$

$$f(\theta) = \frac{1}{\theta_1^{(1)}} \left[\delta - 1 + \cos \theta + \frac{1}{D} \int_{-l}^{l} G(\theta, \varphi) q(\varphi) d\varphi \right]$$

Решение (3.5) ищем в виде разложения

$$p_1(\theta) = \frac{\cos \theta/2}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \alpha)}} \sum_{n=0}^{\infty} X_n T_{2n} \left(\frac{\sin \theta/2}{\sin \alpha/2} \right) \quad (-\alpha < \theta < \alpha) \quad (3.6)$$

Учитывая условия равновесия

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} p_1(\varphi) d\varphi = \int_{-l}^{l} q(\varphi) d\varphi = p_0$$

из (3.6) найдем $X_0 = p_0/\pi$

Подставляя выражение $p_1(\theta)$ из (3.6) в (3.5), после элементарных преобразований опять-таки приходим к регулярной бесконечной системе типа

$$X_m = \sum_{n=1}^{\infty} B_{m,n} \frac{X_n}{2n} + C_m \qquad (m = 1, 2, \ldots) \qquad (3.7)$$

Условие полной регулярности системы (3.7) имеет вид

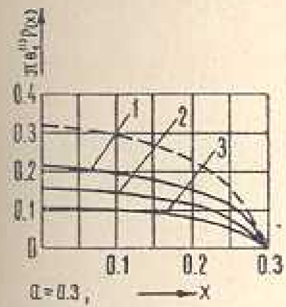
$$\frac{2}{3 \cos^2 \alpha/2} \left(\sin \alpha \cos \alpha + \frac{1}{4 \cos^2 \alpha} + \frac{\alpha}{\theta_1^{(1)} D} \right) < \frac{\pi^2}{4}$$

При остальных значениях параметров система квазивполне регулярна.

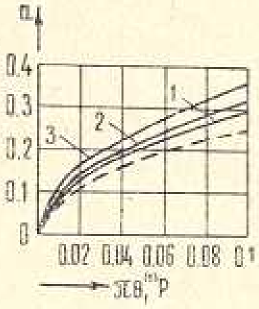
В случае прямоугольников достаточно больших размеров, а именно, когда $h = l = 8\pi$, числовые расчеты приведены для различных значений полудлины контактной зоны, притом прямоугольники нагружены равномерно распеределенными силами интенсивности p. При этом для упругих и тепловых характеристик были приняты следующие значения: $E_1 : E_2 = 0.5; 1; 2;$ $\nu_1 = \nu_2 = 0.3;$ $\alpha_1 = 26 \cdot 10^{-6} 1/oC;$ $\alpha_2 = 17 \cdot 10^{-6} 1/oC.$

Результаты вычислений, проведенных на ЭВМ «Наири-2», приведены в виде графиков (фиг. 2, 3, 4) и табл. 1, где через δ_i и p_i ($i = 0,1$) обозначены взаимное сближение контактирующих тел и приведенные вдавливающие силы соответственно при нулевой температуре и при 100°C внешней среды. Анализ результатов таблицы показывает, что температура, вообще говоря, незначительно влияет на распределение контактных напряжений и на другие характеристики контакта.

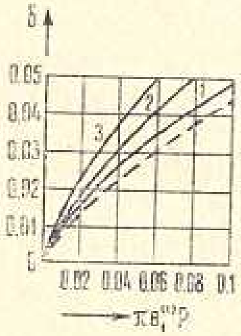
Исследованы также зависимости распределения контактных напряжений (фиг. 2), полудлины контактной зоны a (фиг. 3) и меры взаимного сближения δ (фиг. 4) от приложенных сил p, которые представлены в виде графиков. На этих графиках пунктирные линии соответствуют абсолютно жестким прямоугольникам. Как явствует из графика контактных напряжений (фиг. 2) по мере уменьшения отношения $E_1 : E_2$ в одной и той же точке контактные напряжения увеличиваются. А на остальных двух



Фиг. 2.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

графиках (фиг. 3, 4) наблюдается в некотором смысле обратный эффект, а именно, при увеличении отношения $E_1 : E_2$ при одной и той же силе P величины δ и a также увеличиваются.

Таблица 1

	$E_1:E_2=1;\quad p_i^*=\pi\theta_1^{(1)}p_i\quad (i=0,1)$					
a	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3
p_0^*	0.002616	0.010450	0.032549	0.041866	0.065417	0.094196
p_1^*	0.002614	0.010441	0.023532	0.041831	0.065376	0.094134
δ_0	0.037290	0.011426	0.021213	0.031946	0.042942	0.053657
δ_1	0.037243	0.011417	0.021179	0.031916	0.042911	0.053591

В конце считаю своим приятным долгом выразить благодарность С. М. Мхитаряну за постановку задачи и за ценные советы.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 28 XII 1979

Վ. Ն. ՀԱԿՈԲՅԱՆ

ՋԵՐՄԱՅԻՆ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱՌԿԱՅՈՒԹՅԱՄԲ ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ՍԿԱՎԱՌԱԿԻ ԵՎ ԵՐԿՈՒ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ԿՈՆՏԱԿՏԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Ուսումնասիրված է երկու տարբեր առաձգական ուղղանկյուններով առաձգական շրջանային սկավառակի սեղմման կոնտակտային խնդիրը ջերմային ազդեցությունների հաշվառումով։ Այդ ազդեցությունները պայմանավոր-

ված են ստացիոնար ջերմային դաշտով, երբ տեղի ունեն ջերմային կոնտակտի սովորական պայմանները։

Խնդրի լուծումը Յակոբիի և Չեբիշևի բազմանդամների ապարատի հիման վրա բերված է ռեգուլյար անվերջ համակարգերի։ Թվային անալիզի օգնությամբ ի հայտ են բերված կարևոր մեխանիկական բնութագրիչների փոփոխման օրինաչափությունները։

ON A CONTACT OF A CIRCULAR DISK WITH TWO RECTANGLES UNDER TEMPERATURE EFFECTS

V. A. AKOPIAN

Summary

A contact problem for a compression of a circular disk by two dissimilar elastic rectangles, considering temperature effects, is investigated. These effects result from the presence of a stationary temperature field under ordinary conditions of thermal contact.

The solution to the problem on the basis of the Yakoby and Chebishev polynomials is reduced to regular infinite systems. A numerical analysis is used to find out the regularities of variation in essential mechanical characteristics.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамян Б. Л.* К плоской задаче теории упругости для прямоугольника. ПММ, 1957, т. 21, вып. 1.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., Изд. «Наука», 1973.
3. *Акопян В. Н.* К одной задаче о тепловом контакте кругового диска с прямоугольными пластинами. Докл. АН Арм. ССР, 1978, т. 64, № 5.
4. *Arutunian N. Ch., Mkhitarian S. M.* Trands in elasticity and thermoelasticity. Witold Nowacki Anniversary Volume. Wolters-Noordnoff Publishing, p. 3—20, 1971.
5. *Sternberg E., Tureltaub M. J.* Compression of an Elastic Roller Between Two Rigid Plates. Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М., Изд. „Наука", 1972.
6. *Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М.* Некоторые контактные задачи для полуплоскости с частично скрепленными упругими накладками. Известия АН Арм. ССР, Механика, 1972, т. 25, вып. 2.
7. *Гулян К. Г.* Передача нагрузки от стрингера конечной длины к двум клиновидным пластинам. Докл. АН Арм. ССР, 1974, т. 59, № 4.
8. *Попов Г. Я.* Плоская контактная задача теории упругости с учетом сил сцепления или трения. ПММ, 1966, т. 30, вып. 3.
9. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. М., Гостехтеоретиздат, 1949.