

А. Я. САГОМОНЯН, Я. П. ДВОРКИН

УДАР УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК О ПОВЕРХНОСТЬ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Исследование напряженного состояния упругих оболочек при их проникании в жидкость необходимо при решении различных вопросов современной техники. Задачи погружения оболочек в несжимаемую жидкость рассматривались Э. И. Григолюком и А. Г. Горшковым [1]. При больших скоростях удара важен учет сжимаемости и волнового характера движения жидкости [2]. Имеющиеся решения задач удара оболочек о поверхность сжимаемой жидкости [3, 4] во многих случаях не позволяют находить экстремальные значения напряжений в материале оболочек, что очень важно с точки зрения расчета приводяющихся конструкций на прочность. В настоящей работе предложен численный метод исследования таких задач, дающий возможность находить экстремальные значения напряжений и учитывающий подъем свободной поверхности жидкости. Рассмотрено проникание замкнутых упругих цилиндрических и сферических оболочек, заполненных идеальной сжимаемой жидкостью. Для начального этапа погружения, когда свободная поверхность жидкости не возмущена, получены новые аналитические решения.

Рассмотрим вертикальное падение замкнутых цилиндрических и сферических оболочек на горизонтальную поверхность покоящейся идеальной сжимаемой жидкости. Скорость удара v_0 много меньше скорости звука в жидкости a . Цилиндрическая оболочка считается бесконечной, ее образующие горизонтальны. При проникании сферических оболочек движение среды будет осесимметричным, а при проникании цилиндрических — плоским. Соответственно процесс будем рассматривать в плоскостях меридианного или поперечного сечения оболочек. Введем в этих плоскостях полярную систему координат с началом в центре сечения оболочки и с угловой координатой θ , отсчитываемой от луча, направленного вертикально вниз. Уравнения движения упругих оболочек типа С. П. Тимошенко при малых деформациях могут быть записаны в следующем виде:

$$u_{\theta\theta} - c^2 u_{zz} = R_1, \quad \Phi_{\theta\theta} - c^2 \Phi_{zz} = R_2, \quad w_{\theta\theta} - w_{zz} = R_3 \quad (0.1)$$

В случае цилиндрической оболочки

$$R_1 = -w_0(1+c^2) - \alpha c^2 \Phi, \quad R_2 = D(\Phi + w_0/a) \\ R_3 = (u_0 + w)/c^2 - \alpha \Phi_0 + q$$

а в случае сферической —

$$R_1 = -Gw_0 - u_0 \operatorname{ctg} \theta + u(\mu + \operatorname{ctg}^2 \theta) - \alpha c^2 \Phi$$

$$R_2 = -\Phi_0 \operatorname{ctg} \theta + \Phi (\operatorname{ctg}^2 \theta + \nu + D) + w_0 D/\alpha$$

$$R_3 = -w_0 \operatorname{ctg} \theta - \alpha (\Phi_0 + \Phi \operatorname{ctg} \theta) + 2Lw + Lu_0 + Lu \operatorname{ctg} \theta + q$$

где

$$\tau = t(v/R), \quad u = \bar{u}/l, \quad w = \bar{w}/l, \quad \alpha = R/l$$

$$q = 2\alpha(1 + \nu) RE^{-1} h^{-1} k^{-2} \bar{q}, \quad v = \sqrt{Ek^2 \rho^{-1} (1 + \nu)^{-1} / 2}$$

$$c = \sqrt{k^2(1 - \nu)/2}, \quad D = 6R^2 k^2 (1 - \nu)/h^2, \quad L = (1 + \nu)/c^2, \quad G = 1 + \nu + c^2$$

t — время, отсчитываемое с момента удара; h и R — толщина оболочки и радиус ее срединной поверхности; l — характерный размер; \bar{w} и \bar{u} — радиальный и тангенциальный компоненты вектора смещения срединной поверхности; Φ — угол поворота нормали к срединной поверхности; \bar{q} — разность между радиальными нагрузками на внешнюю и внутреннюю поверхности оболочки; ρ , E и ν — соответственно плотность, модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала оболочки; k^2 — коэффициент сдвига [5]. Нижними индексами обозначены частные производные по соответствующим аргументам. При получении уравнений (0.1) были использованы допущения теории тонких оболочек [5].

1. Рассмотрим начальный период проникания, когда скорость расширения смоченной поверхности оболочки больше скорости звука в жидкости и, следовательно, ее свободная поверхность не возмущена. В этот период времени координату θ_0 внешней смоченной поверхности можно с большой точностью определять по формуле

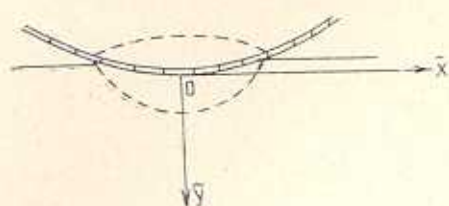
$$\theta_0 = \sqrt{2v_0 t/R} = \sqrt{2Q\tau} \quad (1.1)$$

где $Q = v_0/v$. Из равенства (1.1) следует, что скорость распространения смоченной поверхности оболочки превосходит скорость звука во внешней жидкости при $\tau \leq QM^{-2}/2$, где $M = a/v$.

Пусть оболочка заполнена идеальной сжимаемой жидкостью, имеющей до удара давление \bar{p}_0 . Из этого следует, что начальное значение смещения \bar{w}_0 равно в случае цилиндрической оболочки величине $2\alpha(1 + \nu) \times R c^2 \bar{p}_0 / (E h k^2)$, а в случае сферической — величине $\alpha(1 + \nu) R \bar{p}_0 / (E h k^2 L)$. При исследовании процесса гидроупругого взаимодействия мы будем полагать $\bar{w}_0 = 0$, то есть считать оболочку первоначально недеформированной. Нетрудно видеть, что прибавление к результатам задачи постоянно-го значения \bar{w}_0 позволяет получить решение, учитывающее начальное давление заполнителя.

Введем в плоскости сечения оболочки декартову систему координат $\bar{x}\bar{O}\bar{y}$, движущуюся вертикально вниз со скоростью удара v_0 (фиг. 1). Ось

\tilde{Ox} направлена горизонтально и в момент $t = 0$ лежит на поверхности жидкости. Движение внешней жидкости и заполнителя в линейной постановке описывается в этой системе координат уравнениями



Фиг. 1.

$$\varphi_{zz} - 2\varphi_{zy} = A^2 \varphi_{yy} + M^2 (\varphi_{xx} + \lambda \varphi_x/x) \quad (1.2)$$

$$\psi_{zz} = A_1^2 \psi_{yy} + M_1^2 (\psi_{xx} + \lambda \psi_x/x)$$

где $A^2 = a^2/v_0^2 - 1$, $A_1 = a_1/v_0$,

$$x = \tilde{x}/R, \quad y = \tilde{y}v/Rv_0, \quad M_1 = a_1/v_0,$$

$$\varphi = \tilde{\varphi}/(Rv), \quad \psi = \tilde{\psi}/(Rv); \quad \tilde{\varphi} \text{ и } \tilde{\psi} - \text{потенциалы возмущенных скоростей внешней жидкости и заполнителя;}$$

a_1 — скорость звука в заполнителе; коэффициент λ равен нулю в плоском случае и единице — в осесимметричном. Давление во внешней жидкости \tilde{p} и в заполнителе \tilde{p}_1 определимо по следующим формулам:

$$\tilde{p} = -\rho_0 (\varphi_t - v_0 \varphi_y), \quad \tilde{p}_1 = -\rho_1 \psi_t \quad (1.3)$$

здесь ρ_0 и ρ_1 — плотности внешней жидкости и заполнителя.

Области возмущенного движения жидкостей, ограниченные акустическими волнами (фиг. 1), лежат в рассматриваемый период проникания в малой окрестности точки O . Поэтому при описании движения жидкости можно положить*

$$\tilde{x} \approx R\theta \approx R \sin \theta, \quad x \approx \theta \quad (1.4)$$

Учитывая условие $v_0 \ll a$, сплесем граничные условия равенства нормальных составляющих скоростей оболочки и жидкости на горизонтальные линии $\tilde{y} = 0$ и $\tilde{y} = -h$. В результате получим

$$\varphi_y|_{y=0} = (Q^2 + Qw_\tau) H(\tau - \theta^2/2Q), \quad \psi_y|_{y=-1} = Qw_\tau \quad (1.5)$$

где $\varepsilon = hv/(Rv_0)$, H — функция Хевисайда. Из соотношений (1.3) следует, что

$$q = -B(\varphi_\tau - \varphi_y)|_{y=0} + B_1 \psi_\tau|_{y=-1} \quad (1.6)$$

$$B = R\rho_0/(h\rho), \quad B_1 = K\rho_0/(h\rho_1)$$

Рассмотрим процесс проникания цилиндрической оболочки. Используя соотношения (1.4), заменим в уравнениях (1.2) аргумент x на θ ; подставим равенство (1.6) в уравнения (0.1). Кроме того, положим

$$w_\tau H(\tau - \theta^2/2Q) = w.$$

(подобное приближение допустимо на начальном этапе взаимодействия,

* Этот подход предложен В. Д. Кубенко [6].

когда упругие возмущения в оболочке ограничены малой окрестностью точки удара) и перепишем соотношения (1.5) в таком виде:

$$\begin{aligned} \varphi_y|_{y=0} - Qw &= Q^2 H(\tau - b^2/2Q) \\ \psi_y|_{y=-1} &= Qw. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Применим к равенствам (0.1), (1.2), (1.7) преобразование Лапласа с параметром s по аргументу τ и преобразование Фурье по аргументу θ . Последнее берется в смысле Ф. Фридрихса [7]. Таким образом, равенства (1.2) преобразуются в обыкновенные дифференциальные уравнения. Решая эти уравнения с учетом условий (1.7) и условий стремления потенциалов φ и ψ к нулю при $|y| \rightarrow \infty$, найдем образы $\bar{\varphi}^*$ и $\bar{\psi}^*$ (звездочка соответствует преобразованию Лапласа, а черта — преобразованию Фурье). Подставляя $\bar{\varphi}^*$ и $\bar{\psi}^*$ в преобразованные уравнения (0.1), нетрудно определить образы \bar{w}^* , \bar{u}^* и $\bar{\Phi}^*$. При нахождении оригиналов искомых функций интегралы обратного преобразования Фурье мы оценивали асимптотически методом перевала для больших значений s (это соответствует малым τ). Затем полученные выражения обращались с помощью разложения Хевисайда. Так, для функции w при $\theta = 0$ имеем:

$$w = -BQ^2 \bar{x} \left[\frac{1}{i_1 i_2} + \frac{e^{i_1 \tau}}{i_1 (i_1 - i_2)} + \frac{e^{i_2 \tau}}{i_2 (i_2 - i_1)} \right]$$

$$i_{1,2} = - (BQ\bar{x} \pm \sqrt{B^2 Q^2 \bar{x}^2 - 4c^{-2}}) / 2, \quad \bar{x} = \sqrt{1 + A^2}; \quad (B^2 Q^2 \bar{x}^2 > 4c^{-2})$$

$$w = -2Q [i_3^{-1} - (i_3^{-1} + \gamma) e^{-i_3 \tau}]$$

$$i_3 = BQ\bar{x}/2; \quad (B^2 Q^2 \bar{x}^2 = 4c^{-2})$$

$$w = -BQ^2 \bar{x} c [c + e^{-i_4 \tau} \sin(i_4 \tau + \gamma)] / i_4$$

$$i_4 = \sqrt{c^{-2} - B^2 Q^2 \bar{x}^2 / 4}, \quad \gamma = \arctg(i_4 / i_3)$$

$$(B^2 Q^2 \bar{x}^2 < 4c^{-2})$$

В случае сферической оболочки вместо преобразования Фурье использовалось разложение искомых функций по присоединенным функциям Лежандра $P_n(\cos \theta)$, $P_n^1(\cos \theta)$:

$$w^* = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(s) P_n(\cos \theta), \quad u^* = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(s) P_n^1(\cos \theta)$$

$$\Phi^* = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(s) P_n^1(\cos \theta), \quad \varphi^* = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(y, s) P_n(\cos \theta) \quad (1.8)$$

$$\psi^* = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(y, s) P_n(\cos \theta)$$

в уравнениях (1.2) полагалось $1/x = 1/\theta = 1/tg\theta$.

Опуская промежуточные выкладки, выпишем полученную таким образом систему уравнений для коэффициентов в разложениях (1.8):

$$\begin{aligned}
 [n(n+1) - 1 + \mu + c^2 s^2] U_n - c^2 \Phi_n + G W_n &= 0 \\
 [n(n+1) - 1 + \mu + D + c^2 s^2] \Phi_n - D W_n &= 0 \\
 [n(n+1) + s^2 + 2h] W_n + L n(n+1) U_n - n(n+1) \Phi_n + \\
 + B(\varphi_{n_y} - s \varphi_n) |_{y=1} + B_1 s \psi_n |_{y=-1} &= 0 \\
 A^2 \varphi_{n_{yy}} + 2s \varphi_{n_y} - [s^2 + M^2 n(n+1)] \varphi_n &= 0 \\
 \varphi_{n_y} |_{y=0} = Q s W_n + Q^{5/2} s^{-3/2} \sqrt{2\pi} (n+1/2) e^{-s/Q} J_{n+1/2} \left(\frac{s}{Q} \right) \\
 \psi_{n_{yy}} - [s^2 + n(n+1) M_1^2] A_1^{-2} \psi_n &= 0 \\
 \psi_{n_y} |_{y=-1} = Q s W_n
 \end{aligned}$$

Отсюда нетрудно найти выражения для W_n , U_n , Φ_n , φ_n , ψ_n .

Формула суммирования Пуассона [8] имеет такой вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n+0.5) = 0.5 \int_{C_w} f(v) e^{-tv} (\cos \pi v)^{-1} dv \quad (1.9)$$

где функция f комплексного переменного v аналитична в некоторой окрестности оси $\text{Re} v$; контур C_w , симметричный относительно действительной полуоси, показан на фиг. 2. С помощью соотношения (1.9) бесконечные ряды (1.8) приводятся к интегралам, которые могут быть асимптотически оценены методом перевала при больших значениях параметра s . Обратное преобразование Лапласа осуществимо с помощью разложения Хевисайда. Выражения искомым функций аналогичны полученным в случае цилиндрической оболочки, однако имеют более сложный вид и здесь не приводятся. Математический аппарат, применяемый нами для аналитического исследования осесимметричного движения оболочки и жидкости, достаточно полно освещен в работе [8] на примере задачи о дифракции акустической волны на сферической оболочке.

Отметим, что при $\theta = 0$ верны асимптотические оценки

$$\tilde{p} \sim \rho_0 a (v_0 + \tilde{w}_t), \quad \tilde{p}_1 = -\rho_1 a_1 \tilde{w}_t$$

то есть в начальный период проникания здесь оправдана гипотеза плоского излучения [9].

2. Изложенные выше аналитические решения получены в постановке, верной лишь для начальной стадии проникания, в течение которой не возмущена свободная поверхность жидкости. За это время напряжения в оболочках не достигают, как правило, своих экстремальных значений. Следовательно, необходим метод исследования процесса гидроупругого взаимо-

действия на последующем этапе погружения, когда акустическими возмущениями охвачена часть свободной поверхности жидкости.

Идея предлагаемого здесь метода состоит в численном связанном решении уравнений движения оболочек и жидкости. Уравнения движения оболочек решаются методом характеристик, уравнения движения жидкости — с помощью явной разностной схемы, предложенной в [10]. Связь осуществляется граничными условиями на смоченных поверхностях оболочек.

Ниже последовательно излагаются метод характеристик для решения уравнений (0.1), метод расчета движения заполнителя и внешней жидкости (учтен подъем ее свободной поверхности) и алгоритм, связывающий эти два метода и позволяющий рассчитывать параметры гидроупругого взаимодействия.

На характеристиках системы уравнений (0.1) $d\tau/d\theta = \pm c$ выполняются условия

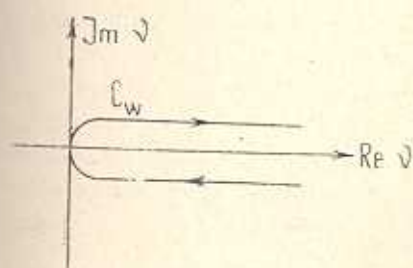
$$du_0 \mp cdu_1 = R_1 d\theta, \quad d\Phi_0 \mp cd\Phi_1 = R_2 d\theta \quad (2.1)$$

а на характеристиках $d\tau/d\theta = \pm 1$ — условия

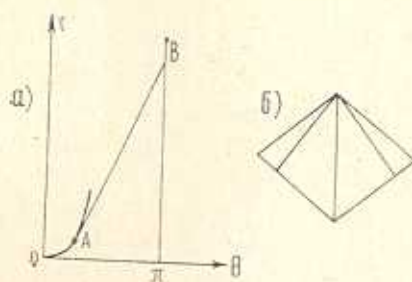
$$dw_0 \mp dw_1 = R_3 d\theta$$

Кроме того, вдоль направления, определяемого дифференциалами $d\tau$ и $d\theta$, выполняются следующие соотношения:

$$dw = w_+ d\tau + w_0 d\theta, \quad du = u_+ d\tau + u_0 d\theta, \quad d\Phi = \Phi_+ d\tau + \Phi_0 d\theta \quad (2.2)$$



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Рассмотрим фазовую плоскость (θ, τ) (фиг. 3, а). В период проникания, когда скорость границы внешней смоченной поверхности оболочки больше скорости распространения упругих возмущений, область возмущенного движения лежит выше кривой OA , соответствующей границе смоченной поверхности. В точке A этой кривой касается характеристика наклона $d\tau/d\theta = c$, в дальнейшем она ограничивает снизу область возмущенного движения. Разобьем область возмущенного движения на расчетную сетку характеристиками $d\tau/d\theta = \pm c$. Из вершины каждой расчетной ячейки (фиг. 3, б) проведем до пересечения с противоположными сторонами характеристики $d\tau/d\theta = \pm 1$ и вертикальный отрезок. Проинтегрируем вдоль отрезков характеристик соответствующие равенства (2.1), а вдоль вертикального отрезка — соотношения (2.2) и используем при этом линейную

интерполяцию функций вдоль отрезков. Мы получим систему девяти алгебраических уравнений, позволяющих находить значения функций ω , u , Φ и их первых производных в вершине ячейки, исходя из их значений в остальных вершинах. Таким образом, можно вычислять искомые величины на каждом временном уровне, пользуясь их значениями в расположенных ниже точках и граничными условиями. Можно показать, что первые производные функций ω , u , Φ непрерывны всюду в плоскости (θ, τ) (фиг. 3,а). Следовательно, на линии OAB можно задаваться нулевыми граничными условиями. На линиях $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ выполняются условия симметрии движения оболочки относительно них.

Для нахождения величины q , входящей в уравнения (0.1), и пропорциональной разности перепадов давлений внешней жидкости и заполнителя, уравнения движения жидкости в акустическом приближении будем решать с помощью явной разностной схемы, предложенной в [10].

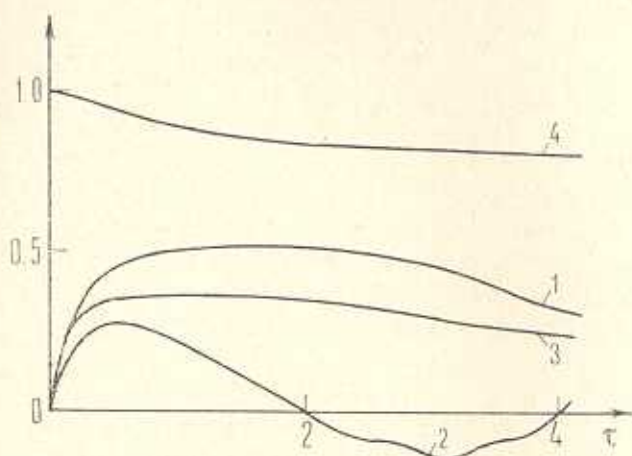
Уравнения движения внешней жидкости записываются в неподвижной декартовой системе координат $\bar{x}O\bar{y}$, совпадающей в момент удара с подвижной системой $\bar{x}O\bar{y}$. Граничные условия состоят в равенстве нормальных составляющих скоростей жидкости и оболочки в зоне их контакта и равенстве нулю перепада давления на свободной поверхности. Соответствие между координатами \bar{x} и θ на смоченной поверхности оболочки задается приближенным соотношением $\bar{x} = R\sin\theta$. Граничные условия сносятся с возмущенной поверхности жидкости на ось O, \bar{x} . Учено влияние подъема свободной поверхности жидкости на увеличение смоченной зоны оболочки. При этом свободная поверхность представляется ступенчатой линией; высота каждой ступеньки и скорость ее движения известны в исходный момент времени. Ступенчатая линия передвигается в течение временного шага, то же делается и с сечением плоскостью движения внешней поверхности оболочки. Находится новая точка пересечения этих двух линий, которая и является границей смоченной зоны в момент времени, следующий за исходным.

Движение заполнителя рассчитывается так же, как и движение внешней жидкости, при этом на внутренней поверхности оболочки используется условие равенства нормальных составляющих скоростей оболочки и жидкости.

Алгоритм связанного решения уравнений движения оболочки и жидкости строится следующим образом. Пусть известны параметры движения в момент τ_0 и нужно определить их в следующий расчетный момент τ_1 . Для этого определяется граница смоченной зоны при τ_1 ; на смоченных поверхностях ставятся граничные условия, исходя из значений скоростей частиц оболочки при τ_0 , и рассчитываются параметры движения жидкости; полученные значения перепадов давлений осредняются по временному интервалу от τ_0 до τ_1 и служат для расчета параметров движения оболочки при $\tau = \tau_1$.

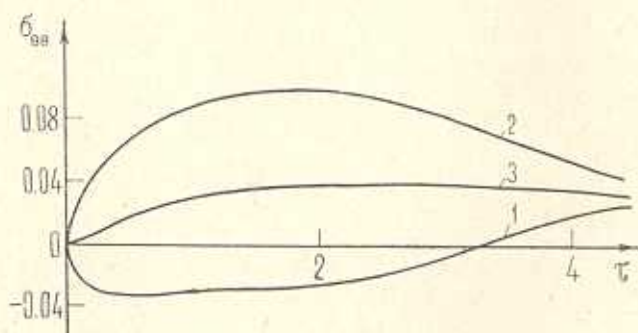
Приведем результаты расчета параметров гидроупругого взаимодействия при следующих значениях безразмерных параметров: $c = 0.528$; $D = 8350$; $L = 4.78$; $G = 1.65$; $\alpha = 25$; $B = 6.67$; $Q = 0.0172$; $M = 0.5$.

На фиг. 4 даны зависимости от τ отношений \tilde{w}_r/v_0 в точке $\theta = 0$ для полых цилиндрической, полых сферической и заполненной керосином цилиндрической оболочек (соответственно линии 1, 2 и 3). Кривая 4 представляет собой отношение значения ширины внешней смоченной поверхности полых цилиндрической оболочки, полученного с учетом подъема сво-



Фиг. 4.

бодной поверхности, к значению, полученному без учета подъема. На фиг. 5 даны зависимости от τ нормальных компонент напряжения $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$, отнесенных к $E\alpha^{-1}/(1-\mu^2)$, то есть $\sigma_{\theta\theta} = \alpha(1-\mu^2)\bar{\sigma}_{\theta\theta}/E$ для полых цилиндрической оболочки у ее внутренней, внешней и срединной поверхности (линии 1, 2 и 3).



Фиг. 5.

Из представленных результатов видно, что экстремальные напряжения в оболочках могут развиваться в период проникания, когда важен учет сжимаемости жидкости.

Результаты аналитических решений рассмотренных задач подтверждают на раннем этапе проникания численные расчеты.

Механико-математический факультет
МГУ им. М. В. Ломоносова

Поступила 15 XI 1979

Ա. ՅԱ. ՍԱԳՈՄՈՆՅԱՆ, ՅԱ. Պ. ԳՎՈՐԿԻՆ

ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՀԱՏՎԱԾԸ ՍԵՂՄՎՈՂ
ՀԵՂՈՒԿԻ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹԻՆ

Ա մ փ ո փ ու լ մ

Լուծվում են առաձգական զնդային և զլանային թաղանթների հատվածի և իդեալալիս սեղմվող հեղուկի մեջ նրանց հետազա ընկղման խնդիրները:

Հաշվի է առնվում հեղուկի ազատ մակերևույթի բարձրացման ազդեցությունը թաղանթների թրջվող մասի մեծացման վրա: Ներթափանցման սկզբնական փուլի համար ստացվել են ասիմպոտոտական լուծումներ: Հետազա ուսումնասիրությունը կատարվում է թվային եղանակներով:

ON THE IMPACT OF ELASTIC SHELLS UPON
A SURFACE OF COMPRESSIBLE FLUIDS

A. Ya. SAGOMONIAN, Ya. P. DVORKIN

S u m m a r y

The problems of the impact and subsequent penetration of elastic cylindrical and spherical shells into ideal compressible fluid are solved. The fluid free surface lifting is taken into account to find the shell wet zone. For the initial period of penetration some analytical solutions are obtained. Subsequent period is investigated by numerical methods.

ЛИТЕРАТУРА

1. Грицолок Э. И., Горшков А. Г. Взаимодействие упругих конструкций с жидкостью. Удар и погружение. Л., «Судостроение», 1976, 198 с.
2. Сагомониан А. Я. Проникание. М., Изд-во МГУ, 1974, 299 с.
3. Payton R. G. Initial bending stresses in elastic shells impacting into compressible fluids. "Quart. J. Mech. and Appl. Math.", 1962, 15, No. 1, 77—90.
4. Medick M. A. Initial response of an elastic spherical shell upon impact with a compressible fluid. Proc. 4-th U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., N. Y., 1962, v. 1, 285—291.
5. Сагомониан А. Я. Волны напряжения в сплошных средах. Часть 2. Изд-во МГУ, 1979, 208 с.
6. Кубенко В. Д. Про удар пружини оболонки об поверхню рідини. Доп. АН УРСР, 1974, А, 2, 164—167.

7. *Friedlander F. G.* Sound Pulses. "Cambr. Univ. Press.", Cambridge, England, 1958, 202 p.
8. *Tang S.-C., Yen D. N. Y.* Interaction of a plane acoustic wave with an elastic spherical shell. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1970, 47, No. 5, 1325—1333.
9. *Грицолок Э. И., Горшков А. Г.* Взаимодействие слабых ударных волн с упругими конструкциями. *Научн. тр. ин-та мех. МГУ*, 1971, № 13, 180 с.
10. *Голунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. М., 1976, 400 с.