ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIII, № 3, 1980 Механика

К. Б. КАЗАРЯН

К ЗАДАЧЕ МАГНИТОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИНКИ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА ХОЛЛА

Рассматривается задача колебаний электропроводящей бесконечной упругой пластинки в присутствии внешнего магнитного поля с учетом эффекта Холла. В отношении пластинки принимается гипотеза Кирхгофа. Токи смещения пренебрегаются по сравнению с токами проводимости. Для простоты считается, что магнитная проницаемость материала проводящей пластинки равна единице, пластинка находится во внешней среде, отождествленной с вакуумом. Материал пластинки обладает конечной электропроводностью.

§ 1. Пластинка постоянной толщины $2h$ находится в постоянном магнитном поле $\overline{H}_0$. Прямоугольная система координат сориентирована так, чтобы координатная плоскость (x, y) совпадала со срединной плоскостью пластинки.

Линеаризированные уравнения движения пластинки во внешнем магнитном поле имеют вид [1]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{1-\mu}{2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=$$

$$=\frac{\rho(1-\mu^2)}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{(1-\mu^2)}{2hE}\int\limits_{-h}^{h}R_x dz$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1-\mu}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)=\frac{\rho(1-\mu^2)}{E}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\frac{(1-\mu^2)}{2hE}\int\limits_{-h}^{h}R_y dz$$

$$D\Delta^2 w+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\int\limits_{-h}^{h}\left(R_z+\frac{\partial R_x}{\partial x}z+\frac{\partial R_y}{\partial y}z\right)dz \qquad (1.1)$$

(E — модуль Юнга, μ — коэффициент Пуассона; u, v, w — компоненты вектора перемещения), $D=2Eh^3/3(1-\mu^2)$.

Уравнения для возмущенного электромагнитного поля в области, занимаемой пластинкой ($|z|\leqslant h$), и вне ее ($|z|\geqslant h$) имеют вид [1].

$$\operatorname{rot}\overline{h}=\frac{4\pi}{c}\overline{j};\qquad \operatorname{rot}\overline{e}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\overline{h}}{\partial t};\quad \operatorname{div}\overline{h}=0;\quad \operatorname{div}\overline{e}=4\pi\rho_e \qquad (1.2)$$

$$\operatorname{rot}\overline{h}^{(e)}=\frac{1}{c}\frac{\partial\overline{e}^{(e)}}{\partial t};\quad \operatorname{rot}\overline{e}^{(e)}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\overline{h}^{(e)}}{\partial t};\quad \operatorname{div}\overline{h}^{(e)}=0;\quad \operatorname{div}\overline{e}^{(e)}=0 \quad (1.3)$$

Здесь $\overline{h}$, $\overline{e}$ — соответственно векторы индуцированного магнитного и электрического полей в области, занимаемой пластинкой; $\overline{h}^{(e)}$; $\overline{e}^{(e)}$ — векторы индуцированного магнитного и электрического полей во внешних областях; $\overline{j}$ — вектор плотности электрического тока пластинки; ρ_e — плотность свободных электрических зарядов, c — электродинамическая постоянная.

В (1.1) $\overline{R}$ — вектор объемной силы электромагнитного происхождения

$$\overline{R}=\frac{1}{c}(\overline{j}\times\overline{H}_0) \quad (1.4)$$

Уравнения (1.1) и (1.2) связаны между собой посредством вектора плотности электрического тока $\overline{j}$.

С учетом эффекта Холла закон Ома для медленно движущихся сред запишется в виде [2]

$$\overline{j}=\sigma\left(\overline{e}+\frac{1}{c}\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}\times\overline{H}_0\right)+\mu_0(\overline{j}\times\overline{H}_0) \quad (1.5)$$

где $\mu_0=R_0\sigma$, R_0 — коэффициент Холла.

Уравнения (1.2) и (1.3) связаны между собой посредством обычных граничных условий на поверхностях

$$\overline{h}=\overline{h}^{(e)};\qquad e_x=e_x^{(e)};\qquad e_y=e_y^{(e)} \quad (1.6)$$

Для решения задачи является удобным представление векторов $\overline{h}$, $\overline{e}$, $\overline{h}^{(e)}$, $\overline{e}^{(e)}$ с помощью вектора-потенциала $\overline{A}$:

$$\overline{e}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\overline{A}}{\partial t};\qquad \overline{h}=\operatorname{rot}\overline{A};\qquad \overline{e}^{(e)}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\overline{A}^{(e)}}{\partial t};\quad \overline{h}^{(e)}=\operatorname{rot}\overline{A}^{(e)} \quad (1.7)$$

Тогда, после некоторых преобразований уравнений (1.2) и (1.3) с учетом (1.5), для определения векторных функций $\overline{A}$, $\overline{A}^{(e)}$ получим следующие уравнения:

$$\Delta\overline{A}-\frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial\overline{A}}{\partial t}-\operatorname{grad}\operatorname{div}\overline{A}-\mu_0[(\Delta\overline{A}-\operatorname{grad}\operatorname{div}\overline{A})\times\overline{H}_0]+$$

$$+\frac{4\pi\sigma}{c^2}\left(\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}\times\overline{H}_0\right)=0 \quad (1.8)$$

$$\Delta\overline{A}^{(e)}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\overline{A}^{(e)}}{\partial t^2}=0 \quad (1.9)$$

Вектор объемной силы $\overline{R}$ посредством вектора-потенциала запишется в виде

$$\overline{R}=\frac{1}{4\pi}[(-\Delta\overline{A}+\operatorname{grad}\operatorname{div}\overline{A})\times\overline{H}_0] \quad (1.10)$$

§ 2. В дальнейшем рассмотрим частный случай колебаний пластинки, когда упругие и электромагнитные возмущения не зависят от координаты $y\left(\frac{\partial}{\partial y}=0\right)$, и ограничимся изучением двух характерных задач магнитоупругих колебаний пластинки ($H_{01}=\text{const}$, $H_{02}=H_{03}=0$; $H_{03}=\text{const}$, $H_{01}=H_{02}=0$).

В случае действия продольного магнитного поля H_{01} связанные уравнения колебаний пластинки имеют вид

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 A_z}{\partial x\partial z}-\frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial A_x}{\partial t}=0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}-\mu_0 H_{01}\left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial x\partial z}\right)-\frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial A_y}{\partial t}=-\frac{4\pi\sigma H_{01}}{c^2}\frac{\partial w}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}+\mu_0 H_{01}\left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial x\partial z}\right)-\frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial A_z}{\partial t}=\frac{4\pi\sigma H_{01}}{c^2}\frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 A_x^{(e)}}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 A_x^{(e)}}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_x^{(e)}}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 A_y^{(e)}}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 A_y^{(e)}}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_y^{(e)}}{\partial t^2} \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial^2 A_z^{(e)}}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 A_z^{(e)}}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_z^{(e)}}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\rho(1-\mu^2)}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{2\rho(1+\mu)}{E}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\frac{(1+\mu)H_{01}}{4\pi Eh}\int_{-h}^{h}\left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial x\partial z}\right)dz \tag{2.3}$$

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{H_{01}}{4\pi}\int_{-h}^{h}\left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}\right)dz$$

Векторы $\overline{A}$, $\overline{A}^{(e)}$ в силу (1.6) и (1.7) на границе раздела двух сред $z=\pm h$ удовлетворяют следующим условиям:

$$A_x=A_x^{(e)},\quad A_y=A_y^{(e)},\quad \frac{\partial A_y}{\partial z}=\frac{\partial A_y^{(e)}}{\partial z},\quad \frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}=\frac{\partial A_x^{(e)}}{\partial z}-\frac{\partial A_z^{(e)}}{\partial x} \tag{2.4}$$

Представляя искомые функции уравнений (2.1), (2.2) в виде монохроматических волн

$$w=w_0\exp i(\omega t-kx);\quad v=v_0\exp i(\omega t-kx)$$

$$u=u_0\exp i(\omega t-kx) \tag{2.5}$$

$$\overline{A}=\overline{A}_0(z)\exp i(\omega t-kx);\qquad \overline{A}^{(e)}=\overline{A}_0^{(e)}\exp i(\omega t-kx)$$

и разрешая полученные системы обыкновенных уравнений с помощью (2.4) и условий затухания решений внешней задачи электродинамики на бесконечности, получим следующие значения для компонент вектора-потенциала $\overline{A}$:

$$A_{x0} = -\frac{ir_1 \operatorname{sh} r_1 z}{\alpha_1}\Phi_1 - \frac{ir_2 \operatorname{sh} r_2 z}{\alpha_2}\Phi_2$$

$$A_{y0} = -\operatorname{ch} r_1 z \Phi_1 - \operatorname{ch} r_2 z \Phi_2 + \Phi_{y0} \tag{2.6}$$

$$A_{z0} = \frac{r_1^2 + \alpha_1\alpha_2}{k\alpha_1}\Phi_1 \operatorname{ch} r_1 z + \frac{r_2^2 + \alpha_1\alpha_2}{k\alpha_2}\Phi_2 \operatorname{ch} r_2 z + \Phi_{z0}$$

В (2.6) приняты следующие обозначения:

$$\Phi_1 = \frac{k\Phi_{y0}\alpha_1 \operatorname{ch} r_2 h + k\delta_2\Phi_{z0}}{\alpha_1\delta_1 \operatorname{ch} r_2 h - \alpha_2\delta_2 \operatorname{ch} r_1 h}; \qquad \Phi_2 = -\frac{k\Phi_{y0}\alpha_2 \operatorname{ch} r_1 h + k\delta_1\Phi_{z0}}{\alpha_1\delta_1 \operatorname{ch} r_2 h - \alpha_2\delta_2 \operatorname{ch} r_1 h}$$

$$\Phi_{y0} = \frac{4\pi\sigma i\omega H_{01}}{c^2}\,\frac{\nu^2 w_0 - \mu_0 H_{01} k^2 v_0}{\nu^4 + \mu_0^2 H_{01}^2 k^4}$$

$$\Phi_{z0} = -\frac{4\pi\sigma i\omega H_{01}}{c^2}\,\frac{\nu^2 v_0 + \mu_0 H_{01} k^2 w_0}{\nu^4 + \mu_0^2 H_{01}^2 k^4}$$

$$r_1^2 = \nu^2 + \frac{\mu_0^2 H_{01}^2 k^2}{2} + \frac{\mu_0 H_{01} k}{2}\sqrt{\mu_0^2 H_{01}^2 k^2 + \frac{16\pi\sigma i\omega}{c^2}}$$

$$r_2^2 = \nu^2 + \frac{\mu_0^2 H_{01}^2 k^2}{2} - \frac{\mu_0 H_{01} k}{2}\sqrt{\mu_0^2 H_{01}^2 k^2 + \frac{16\pi\sigma i\omega}{c^2}}$$

$$\alpha_1 = \frac{\mu_0 H_{01} k - \sqrt{\mu_0^2 H_{01}^2 k^2 + \frac{16\pi\sigma i\omega}{c^2}}}{2}$$

$$\alpha_2 = \frac{\mu_0 H_{01} k + \sqrt{\mu_0^2 H_{01}^2 k^2 + \frac{16\pi\sigma i\omega}{c^2}}}{2}$$

$$\delta_1 = r_1 \operatorname{sh} r_1 h + k \operatorname{ch} r_1 h; \quad \delta_2 = r_2 \operatorname{sh} r_2 h + k \operatorname{ch} r_2 h \tag{2.7}$$

$$\nu^2 = k^2 + \frac{4\pi\sigma i\omega}{c^2}$$

Подставляя (2.6) и (2.5) в систему уравнений (2.3) и производя соответствующие интегрирования, получим однородную алгебраическую систему уравнений относительно w_0, v_0. Из условия нетривиальности решений этой системы придем к дисперсионному уравнению относительно частот магнитоупругих колебаний пластинки.

Полученное дисперсионное уравнение является трансцендентным и содержит в себе гиперболические функции от аргументов $r_1 h$; $r_2 h$. Ввиду громоздкости это уравнение здесь не приводится.

Рассмотрим асимптотические приближения дисперсионного уравнения.

Принимая $k^2h^2 \ll 1$, что соответствует точности гипотезы Кирхгофа, а также

$$\left| \frac{4\pi\sigma i\omega}{c^2} h^2 \right| \ll 1; \quad \mu_0 H_0 \sim 1$$

из выражения для $r_{1,2}^2$ получим, что

$$| r_{1,2}^2 h^2 | \ll 1 \tag{2.8}$$

Разлагая гиперболические функции трансцендентного уравнения в ряд по параметру $|rh|$ и учитывая только первые члены асимптотического разложения, получим следующее дисперсионное уравнение с точностью, соответствующей условию (2.8):

$$(\delta_0 + \alpha_{01}\varepsilon_0\Omega + \Omega^2)(1 + kh + kh\varepsilon_0\Omega)[3\alpha_{01}\varepsilon_0(1 + kh)\Omega +$$

$$+ h^2k^2(1 + \Omega^2)(1 + kh + kh\varepsilon_0\Omega)] + \varepsilon_0^2(1 + kh)\alpha_{01}^2 \mu_0 H_0 \Omega^2 = 0 \tag{2.9}$$

В (2.9) введены следующие безразмерные параметры:

$$\varepsilon_0 = \frac{4\pi\sigma\Omega_0}{k^2c^2}; \; \alpha_{01} = \frac{H_{01}^2(1 - \mu^2)}{4\pi E}; \; \Omega_0 = \sqrt{\frac{Dk^4}{2\rho h}}; \; \Omega = \frac{i\omega}{\Omega_0}; \; \delta_0 = \frac{3(1 - \mu^2)}{2h^2k^2}$$

Для сопоставления результатов точного решения с результатами, полученными в [3, 4] на основе модели идеально-проводящей среды, рассмотрим другой предельный случай $|rh| \gg 1$, $(\sigma \to \infty)$.

Ввиду того, что коэффициент Холла обратно пропорционален коэффициенту электропроводности $R_0 \sim \sigma^{-1}$ [5], примем $\mu_0/\sigma \to 0$. Отметим, что в работе [6], посвященной вопросу распространения одномерной магнитоупругой волны в неограниченном пространстве с учетом эффекта Холла, при предельном переходе к случаю идеально-проводящей среды было принято во внимание слагаемое, характеризующее эффект Холла.

При $|rh| \gg 1$ получим следующие раздельные дисперсионные уравнения относительно частот продольных и поперечных колебаний соответственно

$$\Omega^2 + \delta_0 + \frac{3\alpha_{01}}{h^2k^2} = 0 \tag{2.10}$$

$$\Omega^2 + 1 + \frac{3(1 + kh)\alpha_{01}}{k^3h^3} = 0 \tag{2.11}$$

Уравнение (2.11) совпадает с уравнением, полученным в работах [3, 4].

Как видно из (2.9), учет токов Холла приводит к одному дисперсионному уравнению шестой степени относительно Ω, то есть токи Холла приводят к связности продольных и поперечных колебаний пластинки.

В табл. 1 приведены значения коэффициента μ_0 для ряда материалов, являющихся проводниками электрического тока. Из табл. 1 видно, что при напряженностях магнитных полей H_0, не превышающих значений 10^5 э, имеем $|\mu_0| H_0 \ll 1$. Отметим, что коэффициент $|\mu_0|$ для большинства проводящих материалов также имеет величину порядка 10^{-7} $э^{-1}$.

В силу вышесказанного в уравнении (2.9) можно пренебречь соответствующим слагаемым, содержащим $\mu_0 H_0$.

Таблица 1

Материал пластинки	μ_0 $(10^{-7}$ $э^{-1})$
Серебро	-8.8
Медь	-3.1
Алюминий	-1.3
Латунь	0.3
Цинк	1.9

Таким образом, при магнитных полях порядка 100 кэ учет эффекта Холла несущественно влияет на частоту магнитоупругих колебаний пластинки.

В результате пренебрежения токами Холла уравнение (2.9) распадается на два независимых уравнения

$$\Omega^2 + \gamma_0 + \alpha_{01}\sigma_0\Omega = 0 \tag{2.12}$$

$$\Omega^3\sigma_0 + \frac{1+kh}{kh}\,\Omega^2 + \Omega\sigma_0\left[1 + \frac{3\alpha_{01}(1+kh)}{k^3h^3}\right] + \frac{1+kh}{kh} = 0 \tag{2.13}$$

Уравнение (2.12) есть дисперсионное уравнение частот продольных колебаний пластинки, (2.13) — дисперсионное уравнение частот поперечных колебаний. Отметим, что для составляющей продольного перемещения u_0 имеем дисперсионное уравнение собственных колебаний.

Уравнение (2.13) совпадает с дисперсионным уравнением, полученным в работе [7].

§ 3. Рассмотрим теперь случай, когда пластинка находится под действием поперечного магнитного поля H_{03}. При этом связанные уравнения магнитоупругих колебаний пластинки имеют вид

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial z} - \mu_0 H_0 \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}\right) - \frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial A_x}{\partial t} = -\frac{4\pi\sigma H_{03}}{c^2}\frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial z} - \frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial A_z}{\partial t} = 0 \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} - \mu_0 H_0 \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right) - \frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial A_y}{\partial t} =$$

$$= \frac{4\pi\sigma H_{03}}{c^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - z\,\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho(1-\mu^2)}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{(1-\mu^2)H_{03}}{8\pi E h}\int\limits_{-h}^{h}\left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2}\right)\partial z$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{2\rho(1+\mu)}{E}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{(1+\mu)H_{03}}{4\pi E h}\int\limits_{-h}^{h}\left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right)dz \qquad (3.2)$$

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{H_{03}}{4\pi}\int\limits_{-h}^{h}\left(\frac{\partial^3 A_y}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 A_y}{\partial x \partial z^2}\right)z dz$$

$$\Delta\overline{A}^{(e)} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \overline{A}^{(e)}}{\partial t^2} = 0 \qquad (3.3)$$

После представления искомых функций в виде (2.5) получим следующие значения для компонент вектора — потенциала $\overline{A}$:

$$A_{x0} = B_1 \operatorname{sh}\lambda_1 z + B_2 \operatorname{sh}\lambda_2 z + B_3 \operatorname{ch}\lambda_1 z + B_4 \operatorname{ch}\lambda_2 z + \\ + \frac{H_{03}[\nu^2 v_0 - \mu_0 H_0 k^2 (u_0 + ikzw_0)]}{\nu^2} \qquad (3.4)$$

$$A_{y0} = \beta_2\lambda_1^2 B_1 \operatorname{sh}\lambda_1 z + \beta_1\lambda_2^2 B_2 \operatorname{sh}\lambda_2 z + \beta_2\lambda_1^2 B_3 \operatorname{ch}\lambda_1 z + \\ + \beta_1\lambda_2^2 B_4 \operatorname{ch}\lambda_2 z - \frac{4\pi\sigma i\omega H_{0x}}{c^2}(u_0 + ikzw_0)$$

$$A_{z0} = \frac{ik}{\nu^2}(\lambda_1 B_1 \operatorname{ch}\lambda_1 z + \lambda_2 B_2 \operatorname{ch}\lambda_2 z + \lambda_1 B_3 \operatorname{sh}\lambda_1 z + \lambda_2 B_4 \operatorname{sh}\lambda_2 z) + \frac{k^4\mu_0 H_0^2 w_0}{\nu^4}$$

В (3.4) приняты обозначения:

$$B_1 = \frac{B_{z0}\beta_1\lambda_2\gamma_2 + B_{x0}\operatorname{ch}\lambda_2 h}{\lambda_1(\beta_2\gamma_1\lambda_1 \operatorname{ch}\lambda_2 h - \beta_1\gamma_2\lambda_2 \operatorname{ch}\lambda_1 h)}$$

$$B_2 = \frac{-(B_{z0}\beta_2\lambda_1\gamma_1 + B_{x0}\operatorname{ch}\lambda_2 h)}{\lambda_2(\beta_2\gamma_1 \operatorname{ch}\lambda_2 h - \beta_1\gamma_2\lambda_2 \operatorname{ch}\lambda_1 h)}; \qquad B_3 = \frac{-B_{y0}\operatorname{sh}\lambda_2 h}{\lambda_1(\beta_2\lambda_1\gamma_3 \operatorname{sh}\lambda_2 h - \beta_1\lambda_2\gamma_4 \operatorname{sh}\lambda_1 h)}$$

$$B_4 = \frac{B_{y0}\operatorname{sh}\lambda_1 h}{\lambda_2(\beta_2\lambda_1\gamma_3 \operatorname{sh}\lambda_2 h - \beta_1\lambda_2\gamma_4 \operatorname{sh}\lambda_1 h)}; \quad B_{z0} = -\frac{ik^3 H_{03}^2\mu_0 w_0}{\nu^2}$$

$$B_{y0} = -\frac{4\pi\sigma i\omega H_{03} k u_0}{\nu^2 c^2}; \quad B_{x0} = \frac{4\pi\sigma i\omega H_{03}}{c^2\nu^2} ik(1+kh)w_0 \qquad (3.5)$$

$$\nu^2 = k^2 + \frac{4\pi\sigma i\omega}{c^2}; \qquad \lambda_1^2 = \frac{2\nu^2 + \mu_0^2 H_{03}^2 k^2 + \mu_0 H_{03}\sqrt{\mu_0^2 H_{03}^2 k^4 + 4\nu^2(k^2-\nu^2)}}{2(1+\mu_0^2 H_{03}^2)}$$

$$\lambda_2^2 = \frac{2\nu^2 + \mu_0^2 H_{03}^2 k^2 - \mu_0 H_{03}\sqrt{\mu_0^2 H_{03}^2 k^4 + 4\nu^2(k^2-\nu^2)}}{2(1+\mu_0^2 H_{03}^2)}$$

$$\beta_1 = \left(2H_{03}\mu_0\nu^2 - \mu_0 H_{03}k^2 - \sqrt{\mu_0^2 H_{03}^2 k^4 + 4\nu^2(k^2-\nu^2)}\right)(4\nu^4)^{-1}$$

$$\beta_2 = \left(2H_{03}\mu_0\nu^2 - \mu_0 H_{03}k^2 + \sqrt{\mu_0^2 H_{03}^2 k^4 + 4\nu^2(k^2-\nu^2)}\right)(4\nu^4)^{-1}$$

$$\gamma_1 = \lambda_1 \operatorname{ch}\lambda_1 h + k\operatorname{sh}\lambda_1 h; \quad \gamma_2 = \lambda_2 \operatorname{ch}\lambda_2 h + k\operatorname{sh}\lambda_2 h$$

$$\gamma_3 = \lambda_1 \operatorname{sh}\lambda_1 h + k\operatorname{ch}\lambda_1 h; \quad \gamma_4 = \lambda_2 \operatorname{sh}\lambda_2 h + k\operatorname{ch}\lambda_2 h$$

В приближении $\frac{1}{4}|\lambda^2h^2| \ll 1$, $(\mu_0 H_{03} \sim 1)$ имеем следующие раздельные дисперсионные уравнения:

а) поперечные колебания

$$(1+\sigma_0\Omega)^2(1+\Omega^2) + \alpha_{03}\sigma_0\Omega\left[(1+\sigma_0\Omega)^2 + \sigma_0\Omega\mu_0^2H_0^2\right] = 0 \tag{3.6}$$

б) продольные колебания

$$\Omega^3\sigma_0 + \frac{1+kh}{kh}\Omega^2 + \frac{3\sigma_0\Omega}{k^3h^3}\left[(1+kh)\alpha_{03} + kh\right] + \frac{3(1+kh)}{k^3h^3} = 0 \tag{3.7}$$

Уравнение (3.7) соответствует компоненту u_0. Для составляющей v_0 имеем уравнение собственных колебаний.

Как видно из (3.6), (3.7), в случае действия поперечного магнитного поля имеем независимые дисперсионные уравнения, и токи Холла не оказывают влияния на частоту продольных колебаний.

Принимая во внимание то обстоятельство, что при магнитных полях с напряженностью порядка 100 кэ для проводников $\mu_0 H_0 \ll 1$, в области значений $H_{03} < 100$ кэ получим следующее дисперсионное уравнение поперечных колебаний пластинки:

$$\Omega^2 + \alpha_{03}\sigma_0\Omega + 1 = 0 \tag{3.8}$$

Уравнение (3.8) совпадает с уравнением, полученным в работе [8].

При $|\lambda h| \gg 1$ $(\sigma \to \infty)$ имеем следующие раздельные дисперсионные уравнения частот продольных и поперечных колебаний соответственно:

$$\Omega^2 + \frac{3}{h^2k^2} + \frac{3(1+kh)\alpha_{03}}{k^3h^3} = 0 \tag{3.9}$$

$$\Omega^2 + 1 + \frac{3\alpha_{03}(1+kh)}{h^2k^2} = 0 \tag{3.10}$$

Таким образом, как в случае действия продольного, так и поперечного магнитных полей в диапазоне значений H_0 до 100 кэ влияние токов Холла на частоту магнитоупругих колебаний пластинки является пренебрежимо малым.

При значениях напряженности магнитного поля $H_0 < 100$ кэ влияние токов Холла на частоту колебаний может быть существенным для полупроводниковых пластин, в которых эффект Холла на несколько порядков сильнее этого же эффекта в проводниках. Однако исследование магнитоупругих колебаний таких пластин выходит за рамки настоящей работы, так как для этих материалов необходим учет иных электромагнитных эффектов.

§ 4. В заключение обсудим вопрос использования модели идеально проводящего тела в задачах магнитоупругих колебаний тонких пластин. В силу малости токов Холла примем, что $\mu_e = 0$.

В работах [3, 4] на основе модели идеально проводящей среды были получены дисперсионные уравнения, определяющие частоты поперечных колебаний бесконечной пластинки в продольном и поперечном магнитных полях. Эти уравнения совпадают с уравнениями (2.11) и (3.10), полученными из точных трансцендентных уравнений при $|\nu h| \gg 1$.

В случае действия продольного магнитного поля H_{01}, из сравнения уравнений поперечных колебаний (2.11) и (2.13) видно, что если в (2.13) перейти к пределу при $\sigma \to \infty$, эти уравнения совпадут. Для уравнений продольных колебаний это совпадение не имеет места. Из (2.10) видно, что магнитное поле приводит к увеличению частоты колебаний, в то время как из (2.12) следует, что частота уменьшается.

В случае действия поперечного магнитного поля H_{03}, сравнивая уравнения продольных колебаний (3.7) и (3.9), можно заключить, что уравнение (3.7) при $\sigma \to \infty$ совпадает с (3.9). Однако уравнения поперечных колебаний (3.8) и (3.10) отличны друг от друга. Из (3.10) видно, что магнитное поле приводит к увеличению частоты колебаний, а из (3.8) следует, что частота уменьшается.

Отметим, что из точных трансцендентных уравнений можно получить также и дисперсионные уравнения, соответствующие другой приближенной модели [4], если при разложении гиперболических функций принять

$$k^2 \gg \left|\frac{4\pi\sigma i\omega}{c^2}\right|; \quad k^2h^2 \ll 1 \tag{4.1}$$

Эта приближенная модель обсуждена в работе [4], и ее сущность заключается в пренебрежении влиянием индуцированного электромагнитного поля.

Таким образом, из точных трансцендентных дисперсионных уравнений в приближениях

$$|\nu^2h^2| \ll 1; \quad |\nu h| \gg 1; \quad k^2 \gg \left|\frac{4\pi\sigma i\omega}{c^2}\right|, \quad k^2h^2 \ll 1$$

имеем различные дисперсионные уравнения.

Так как использование гипотезы Кирхгофа требует выполнения неравенства $k^2h^2 \ll 1$, то условие $|\nu| h \gg 1$ имеет место, если выполняется неравенство

$$\sqrt{\frac{4\pi\sigma (\mathrm{Re}\,\omega)\, h^2}{c^2}} = \sqrt{\frac{4\pi\sigma h u_\varphi}{c^2} kh} \gg 1 \tag{4.2}$$

где $u_\varphi = \mathrm{Re}\,\omega/k$ — фазовая скорость магнитоупругих колебаний пластинки.

В табл. 2 для реальных тонких пластин, изготовленных из различных проводящих материалов, приведены значения u_c и соответствующие им значения напряженностей магнитного поля H_0 (в случаях $kh = 0.1$; $kh = 0.05$), при которых выполняется условие (4.1). Приведенные в табл. 2 значения H_0 определены на основе уравнений (2.10), (2.11) и (3.9), (3.10), полученных при условии справедливости неравенства (4.1).

Таблица 2

Материал пластинки	h (*см*)	u_c (10^8 *см/сек*)	$hk=0.1$ H_0 (10^6 *э*)	$hk=0.05$ H_0 (10^6 *э*)
Медь	0.01	1.3	440	220
$E=1.1\cdot10^{12}$ *дин·см*$^{-2}$	0.05	0.27	125	65
$\mu=0.35$	0.1	0.13	30	14
$\rho=8.9$ *г·см*$^{-3}$	0.5	0.02	6	3
$\sigma=5.3\cdot10^{17}$ *сек*$^{-1}$	1	0.01	3	1.5
Алюминий	0.01	2.24	400	200
$E=0.7\cdot10^{12}$ *дин·см*$^{-2}$	0.05	0.44	80	38
$\mu=0.35$	0.1	0.22	40	21
$\rho=2.7$ *г·см*$^{-3}$	0.5	0.04	8	4
$\sigma=3.2\cdot10^{17}$ *сек*$^{-1}$	1	0.022	4	2
Латунь	0.01	3.7	1250	620
$E=0.9\cdot10^{12}$ *дин·см*$^{-2}$	0.05	0.73	240	110
$\mu=0.32$	0.1	0.36	120	60
$\rho=8.5$ *г·см*$^{-3}$	0.5	0.07	20	10
$\sigma=2.0\cdot10^{17}$ *сек*$^{-1}$	1	0.03	9	4
Константан	0.01	35.8	10000	5100
$E=1.6\cdot10^{12}$ *дин·см*$^{-2}$	0.05	7.3	2220	1100
$\mu=0.3$	0.1	3.6	1100	550
$\rho=8.9$ *г·см*$^{-3}$	0.5	0.72	210	100
$\sigma=0.2\cdot10^{17}$ *сек*$^{-1}$	1	0.36	100	52

Из табл. 2 следует, что для тонких проводящих пластин с параметрами $h \sim 0.01 \div 1$ *см*, $hk = 0.1$; $hk = 0.05$ неравенство (4.1) будет иметь место при фазовых скоростях магнитоупругих колебаний u_c, соответствующих сверхсильным магнитным полям с напряженностью свыше 10^6 *э*.

Таким образом, можно сделать вывод, что для тонких проводящих пластин, находящихся в магнитных полях, не превышающих значений $H_0 = 10^5$ *э*, условие (4.1) не выполняется и, следовательно, при этих полях модель идеально проводящей среды может привести к неправильным результатам.

В [9] на основе численных примеров, характерных для рассматриваемого круга задач, показана реальность приближения $|\nu^2|h^2 \ll 1$.

Наконец, отметим, что в приближении $|\nu^2|/h^2 \ll 1$ имеет место совпадение дисперсионных уравнений, полученных на основе гипотезы магнитоупругости тонких тел, с соответствующими асимптотическими разложениями точных дисперсионных уравнений [1].

Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила 3 XII 1979

Կ. Բ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

ՀՈԼԻ ԷՖԵԿՏԻ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ ՍԱԼԻ ՄԱԳՆԻՍԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ԽՆԴՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ամփոփում

Դիտարկված է սալի մագնիսաառաձգական տատանումների խնդիրը ինչպես երկայնական, այնպես էլ լայնական մագնիսական դաշտի առկայությամբ։ Սալի տատանումների հաճախականությունների նկատմամբ ստացված են դիսպերսիոն հավասարումներ։ Քննարկված են ստացված դիսպերսիոն հավասարումների տարբեր մոտավորությունները։ Ցույց է տրված, որ Հոլի հոսանքի ազդեցությունը էլեկտրահաղորդիչ սալերի տատանումների վրա արհամարհելի է, երբ մագնիսական դաշտի լարվածության արժեքը չի գերազանցում 10^5 Oe. Դիսպերսիոն հավասարումներից ստացված են իդեալական հաղորդիչ սալի մոդելի կիրառելիության սահմանները։

THE PROBLEM OF PLATE MAGNETOELASTIC VIBRATION, CONSIDERING HOLL'S EFFECT

K. B. KAZARIAN

Summary

The problem of plate vibration under the effect of both longitudinal and transversal magnetic fields is dealt with. Some dispersion equations for plate's vibration frequencies are derived. Various approximations of the dispersion equations are examined. The effect of Holl's current upon the vibration frequencies of electroconductive plates is shown to be negligibly small in the range of magnetic field intensity up to 10^5 *Oe*. The range of application of a perfectly conducting plate model is found from the dispersion equations.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М., Изд. «Наука», 1977, стр. 31—37, 87—134.
2. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, т. 1, М., Изд. «Наука», 1976, стр. 330—332.

3. *Kaliski S.* Magnetoelastic vibration of perfectly conducting plates and bars assuming the principle of plane sections. Proc. Vibr. Probl. Pol. Ac. Sci., 1962, No. 3, p. 225—234.
4. *Амбарцумян С. А., Белубекян М. В.* О приближенных методах в задачах магнитоупругих колебаний пластинки. Сб. «Тепловые напряжения в элементах конструкций», Киев, Наукова Думка, 1979, № 19, стр. 3—6.
5. *Давыдов А. С.* Теория твердого тела. М., Изд. «Наука», 1976, стр. 192—198.
6. *Sergio Levoni*, "Sull' influenza dell'effetto Hall nella propagazione di onde magnetoelastiche", Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, 1973, XXII, p. 343—358.
7. *Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Осесимметричные колебания цилиндрической оболочки в магнитном поле. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1967, т. 20, № 5, с. 21—27.
8. *Багдасарян Г. Е., Мкртчян П. А.* О колебаниях проводящих пластин в поперечном магнитном поле. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1975, т. 28, № 1, стр. 3—19.
9. *Белубекян М. В., Казарян К. Б.* О применимости гипотезы магнитоупругости тонких тел к задачам колебаний токонесущих пластин. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1976, т. 29, № 4, стр. 29—40.